ҚЫЗЫЛОРДА ОБЛЫСЫНЫҢ ӘКІМДІГІ
ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІНІҢ
ҚОРҚЫТ АТА АТЫНДАҒЫ ҚЫЗЫЛОРДА МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ

ҚАЗІРГІ ЗАМАНҒЫ МАТЕМАТИКА: ПРОБЛЕМАЛАРЫ ЖӘНЕ ҚОЛДАНЫСТАРЫ

Академик А.Д.Таймановтың ғылыми-педагогикалық қызметіне арналған халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияның еңбектер жинағы

Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, 2013 жылғы 24-26 қазан

Алматы
2013

УДК 510
ББК 22. 1
С 56

С 56 **Қазіргі заманғы математика: проблемалары және қолданыстары:** Академик А.Д.Таймановтың ғылыми-педагогикалық қызметіне арналған халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияның еңбектер жинағы: Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, 2013 жылғы 24-26 қазан./ Ред.алқасы: Қ.А.Бисенов және т.б. – А.: «Ғылым ордасы», 2013. - 520 б.

ISBN 978-601-298-253-4

Топология, математикалық логика және модельдер теориясы саласындағы әлемге танымал ғалым, академик Асан Дабысұлы Таймановтың ғылыми-педагогикалық қызметі туралы материалдар ұсынылады. Қазіргі заманғы математикалық білім берудің өзекті мәселелері мен модельдер теориясы, алгебра және геометрия салаларындағы ғылыми-зерттеулер нәтижелері қарастырылады. Математика ғылымының қолданбалы аспектілері және ақпараттық технологиялардың инновациялық даму әдістері мазмұндалады.

Кілт сөздер: А.Д.Тайманов, модельдер теориясы, алгебра, геометрия, қазіргі заманғы математикалық білім беру, операторлық әдістер, математикалық модельдеу, ақпараттық технологиялар.

УДК 510
ББК22.1

ISBN 978-601-298-253-4

АКИМАТ КЫЗЫЛОРДИНСКОЙ ОБЛАСТИ
КЫЗЫЛОРДИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ КОРКЫТ АТА МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА: ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Сборник трудов международной научно-практической конференции, посвященной научно-педагогической деятельности академика А.Д.Тайманова

Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, 24-26 октября 2013г.

Алматы
2013

УДК 510
ББК 22. 1
С 56

С 56 **Современная математика: проблемы и приложения:** Сборник трудов международной научно-практической конференции, посвященной научно-педагогической деятельности академика А.Д.Тайманова: Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, 24-26 октября, 2013 г. /Ред.кол.: К.А.Бисенов и др.- А.: «Ғылым ордасы», 2013.-520 с.

ISBN 978-601-298-253-4

Представлены материалы о научно-педагогической деятельности ученого с мировым именем в области топологии, математической логики и теории моделей, академика Асана Дабсовича Тайманова. Рассматриваются актуальные проблемы современного математического образования и результаты научных исследований по теории моделей, алгебре и геометрии. Обобщены инновационные методы развития информационных технологий и прикладные аспекты математической науки.

Ключевые слова: А.Д.Тайманов, теория моделей, алгебра, геометрия, современное математическое образование, операторные методы, математическое моделирование, информационные технологии.

УДК 510
ББК 22.

ISBN 978-601-298-253-4

AKIMAT OF THE KYZYLORDA REGION
KORKYT ATA KYZYLORDA STATE UNIVERSITY
OF THE MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE REPUBLIC
OF KAZAKHSTAN

CONTEMPORARY MATHEMATICS: PROBLEMS AND APPLICATIONS

Collection of papers of the international scientific-practical conference devoted to the research and teaching activitiesd of the academic A.D.Taymanova

Kyzylorda State University Korkyt Ata,
October 24-26, 2013.

Almaty
2013

UDC 510
BBK 22. 1
C 56

C 56 **Contemporary Mathematics: Issues and Applications:** Collection of papers of the International Scientific- practical conference dedicated to research and teaching Academician A.D.Taymanova: Kyzylorda State University Korkyt Ata , October 24-26 , 2013 / Red.kol.: K.A.Bisenov etc. - A.: «Ғылым ордасы», 2013. – 520 p.

ISBN 978-601-298-253-4

Materials on research and teaching activities of the scientist with the world- renowned name in the field of topology, mathematical logics and theory of models, of the academician Hasan Dabsovich Taimanov. The urgent problems of contemporary mathematics education and research results within the theory of models, algebra and geometry. The work summarizes the development of innovative methods of information technology and applicational aspects of mathematics.

Key words: A.D.Taymanov, theory of models, algebra, geometry, advanced mathematics education, operator methods, mathematical modeling, information technology.

UDC 510
BBK 22.1

ISBN 978-601-298-253-4

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

УДК 323.329:37:51

ВЫДАЮЩИЙСЯ УЧЕНЫЙ И СОЗИДАТЕЛЬ

К.Е.КУШЕРБАЕВ, аким Кызылординской области,
доктор политических наук

Специалист в области топологии, математической логики и теории моделей, академик Асан Дабысович Тайманов входил в число ведущих математиков не только Казахстана, но и бывшего СССР.

Его яркая жизнь и славное имя всегда будут служить для нас образцом беззаветного служения Отчизне, интересам науки и образования. Будучи «маршалом науки», он всю свою жизнь посвятил научным открытиям, находился в вечном поиске научных истин, воспитал немало талантливых ученых.

После окончания Уральского государственного педагогического института им. А.С. Пушкина в 1936 году А.Д. Тайманов был оставлен в родном вузе ассистентом кафедры математики. В том же году, стремясь получить более глубокие знания, он поступает на заочное отделение механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, после третьего курса которого становится аспирантом Московского государственного педагогического института имени В.И. Ленина, где на его становление большое влияние оказал выдающийся ученый-педагог, член-корреспондент Академии наук СССР Александр Яковлевич Хинчин.

За период учебы в аспирантуре А.Д. Тайманов посещал научные семинары многих крупных ученых, в ряду которых были корифеи мировой математики Алексей Андреевич Ляпунов, Леонид Вениаминович Келдыш, Павел Сергеевич Александров.

В июле 1941 года А.Д. Тайманов, прервав учебу, вступил в ряды народного ополчения и с честью и мужеством прошел тяжелыми дорогами войны. В 1945 году, демобилизовавшись из армии, продолжил обучение в аспирантуре, где его научно-исследовательской работой по теоретико-множественной топологии руководили ученые Петр Сергеевич Новиков и Леонид Вениаминович Келдыш. Ряд фундаментальных результатов, полученных в ходе исследования, легли в основу его кандидатской диссертации, которую в свое время академик П.С.Александров назвал «выдающейся работой». Стоит признать, что не каждая диссертация заслуживает такой высокой оценки, тем более со стороны светил планетарного масштаба.

Мы с уверенностью можем утверждать, что в дальнейшем формировании Асана Дабысовича Тайманова как выдающегося ученого и яркой личности немаловажную роль сыграла и земля Сыра. Асан Дабысович в свою очередь также внес огромный вклад в дело развития науки в регионе, а также в подготовку высококвалифицированных специалистов в области математики.

Асан Дабысович с 1947 по 1954 годы заведовал кафедрой математики Кызылординского педагогического института им. Н.В. Гоголя. Этот период стал одним из ярчайших этапов в развитии научной и образовательной деятельности за более чем 75-летнюю историю вуза. Лекции А.Д. Тайманова пользовались огромной популярностью у студентов. С присущей ему энергией он за короткий срок организовал кружок юных математиков, факультативные курсы и постоянный научный семинар по математике для студентов, ввел в практику математические конкурсы и вечера. Постоянно поддерживал талантливую молодежь.

Впервые в республике в 1951 году по его инициативе были проведены городские и областные математические олимпиады. В том же году решением Высшей Аттестационной Комиссии СССР Тайманов А.Д. был утверждён в ученом звании доцента. В Кызылорде А.Д. Таймановым был проведён цикл глубоких научных исследований по дескриптивной теории множеств и теоретико-множественной топологии. В этих работах получены не только принципиальные и убедительные результаты в ряде научных направлений, но и найдены новые классы функций, изучение которых привело к созданию новых научных направлений в математике. Им опубликованы научные труды в «Известиях» АН СССР, в журнале «Успехи математических наук», а также в Математическом сборнике Российской Академии наук, который издается с 1866 года и по нынешнее время считается одним из наиболее престижных журналов по математике в мире. А.Д.Таймановым велась переписка с академиками А.А.Ляпуновым и П.С.Александровым.

Среди студентов-кызылординцев, которые стали последователями Асана Дабысовича, можно назвать кандидатов наук:Абшаита Оразалиева и Абдукарима Тажмаганбетова, возглавлявших, соответственно,физико-математический факультет и кафедру математики в родном вузе; Рахматуллу Турганалиева, выпускника докторантуры МГУ им. М.В. Ломоносова; Курманбека Сексенбаева, ныне профессора Карагандинского государственного университета им. Е. Букетова. В течение всей своей жизни Асан Дабысович поддерживал связь со своими учениками и интересовался их научными достижениями.

В 1954 году А.Д. Тайманова приглашают на работу в Шуйский государственный педагогический институт (Ивановская область Российской Федерации). Определяющими в его дальнейшей судьбе стали встреча и знакомство в 1956 году с выдающимся математиком, академиком Анатолием Ивановичем Мальцевым. Именно благодаря наставлениям и советам А.И. Мальцева Асан Дабысович начал в г. Иваново и продолжил в г. Новосибирске новый и самый блестящий период своей научной деятельности в области математики дискретных величин. Работая в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР и в Новосибирском государственном университете, Асан Тайманов оказался в когорте основателей знаменитого семинара «Алгебра и логика». Именно Асан Дабысович «прорубил окно» для казахстанских математиков в Новосибирскую математическую школу, уже в 1960 году разработал совместно с академиком А.И. Мальцевым программу по подготовке кадров по математике для Казахстана. Вплоть до своей кончины в 1990 году он уделял огромное внимание этому стратегическому вопросу. Он принимал непосредственное и активное участие в формировании казахстанских математических школ по целому ряду направлений математической науки.

В 1961 году А.Д. Тайманов защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, почти сразу был избран действительном членом Академии наук Казахской ССР.

А.Д. Тайманов,как один из основателей ведущей в мире школы по теории моделей, по приглашению Академии наук Казахской ССР в 1968 году переезжает в Алма-Ату, где избирается академиком-секретарём в отделении физико-математических наук и назначается директором Института математики и механики. По его инициативе открываются Республиканская физико-математическая школа, кафедра алгебры и математической логики в Казахском государственном университете имени С.М. Кирова, лаборатория алгебры и математической логики и ряд лабораторий по прикладной математике в Институте математики и механики.

В 1970 году А.Д. Тайманов возвращается в Институт математики Сибирского отделения Академии наук СССР, продолжая курировать лабораторию алгебры и математической логики в Институте математики и механики Академии наук Казахской ССР и кафедру алгебры и математической логики в Карагандинском государственном университете.

В Новосибирске Асан Дабысович продолжает активно заниматься научной и педагогической деятельностью. К этому периоду относятся его исследования по топологической алгебре. Являясь одним из создателей казахстанской математической школы, он с большим вниманием и заботой относился к своим ученикам, усиленно занимался их подготовкой, в результате чего большинство из них еще при жизни Асана Дабысовича добились больших достижений на научном поприще. В 60-80-е годы прошлого века ряд учеников А.Д.Тайманова защитили кандидатские диссертации. К ним можно отнести ученых Ж.А.Альмагамбетова, Н.Г.Хисамиева, Т.Ш.Шаяхметова, А.Т.Нуртазина, Б.Н.Дроботуна, А.И.Омарова, Т.Г.Мустафина, М.М.Еримбетова, Б.С.Байжанова, Б.Омарова, М.И.Бекенова, Т.А.Нурмагамбетова, Е.Р.Байсалова, А.В.Викентьева и др.

Как ученый и педагог с большой буквы, он также оказал огромное влияние на становление математиков из разных регионов России. Ректор Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, академик Виктор Антонович Садовничий также считает себя учеником Асана Дабысовича.

А.Д. Тайманов представлял свою страну на международных конгрессах по математике, логике, методологии и философии науки, участвовал в ряде международных конференций по вопросам теории моделей, неоднократно читал курсы лекций в иностранных университетах, а также являлся членом оргкомитета многих научных конференций по математической логике в масштабах страны. Его глубокие исследования в разных областях математической науки получили международную известность и вошли в монографии и учебники.

За заслуги перед страной и достигнутые успехи в развитии науки и образования он был награжден двумя орденами Трудового Красного Знамени, орденом Отечественной войны I степени, почетным знаком «Отличник просвещения СССР».

Дело отца достойно продолжают его дети: Искандер - доктор физико-математических наук, академик Российской Академии наук; Владимир и Надежда - кандидаты физико-математических наук, доценты московских вузов.

Как известно, Асан Дабысович Тайманов - уроженец Западного Казахстана. Жители благодатного региона помнят и чтят выдающегося ученого, великого математика. В этом я убедился в период своей работы в качестве акима Западно-Казахстанской области с 2000 по 2003 г.г. При поддержке акимата области в 2002 году впервые была проведена международная научно-практическая конференция «Таймановские чтения». Хочется отметить, что такие чтения регулярно проводятся на базе Западно-Казахстанского государственного университета им. М. Утемисова. В данном вузе открыта аудитория имени А.Д. Тайманова. Его именем названы улица и школа в областном центре – городе Уральске. Ежегодно проводится областная Таймановская научно-техническая олимпиада.

Глава государства Н.А. Назарбаев в Стратегии «Казахстан-2050» поставил перед казахстанцами задачу - войти в число 30-ти наиболее развитых стран мира. Образование и наука находятся на переднем крае решения этой задачи. И здесь не последняя роль отводится математике - главному языку любой науки, базовому инструменту по преобразованию природы.К знаниям и умениям будущих специалистов производства, молодых ученых предъявляются все более новые требования,связанные с достижением высокого квлификационного уровня. Поэтому на повестке сегодняшнего дня стоит один из главных вопросов – выпуск будущих специалистов с надлежащим уровнем математической подготовки. Данный вопрос актуален и для нашего региона. Для экономики Кызылординской области крайне важны специальности, связанные с техническими науками и информационными технологиями, так как в принятой в текущем году Стратегии социально-экономического развития области на период до 2020 года одним из ключевых направлений является формирование и развитие промышленных кластеров.И в этой связи актуальность международной научно-практической конференции «Современная математика: проблемы и приложения», посвященной научно-педагогической деятельности выдающегося ученого, академика Асана Дабысовича Тайманова, очевидна.

А.Д. Тайманов был не только выдающимся ученым мирового уровня, но и прекрасным педагогом с богатой фантазией и креативным мышлением, замечательным человеком, чутким руководителем, вселявшим в души своих учеников любовь к наукам и мировым знаниям. В самых трудных и запутанных математических теориях он, не считаясь со временем, искал «ключевое рациональное зерно», после чего эти теории раскрывались и прояснялись для слушателей, заинтересовывали их.

Его судьба является ярким примером того, каких высот может достичь талантливый и целеустремленный человек. Сегодня математическая школа Казахстана продолжает славные традиции своих основоположников, в когорте которых был и Асан Тайманов, покорявший научный мир своими открытиями.

Литература:

1. Послание Президента Республики Казахстан-Лидера нации Нурсултана Назарбаева народу Казахстана «Стратегия «Казахстан-2050»: новый политический курс состоявшегося государства». - 2012.- 14 декабря.

2. Концепция социально-экономического развития Кызылординской области Республики Казахстан на период до 2020 года./Отчет.- М.,2013.-июль

3. Асан Дабысович Тайманов. /Материалы к биобиблиографии ученых Казахстана. - Алма-Ата: Наука,1987. - 37с.

4. Рысбеков Т.З. Таймановские чтения - залог развития математической науки Казахстана./library.wksu.kz.Вход 2 октября 2013г.

5. Байгузов Н.С. А.Д.Тайманов - педагог и ученый. /Материалы международной научно-практической конференции «Таймановские чтения». –Уральск, 2012.

6. Байжанов Б.С. Асан Дабысович Тайманов в теории моделей. /library.wksu.kz. Вход 3 октября 2013г.

7. Тайманов, Асан Дабысович./ru.wikipedia.org. Вход 3 октября 2013г.

8.Нуртазин А. А.Д.Тайманов: Человек и математика. //Казахстанская правда. - 2007.- 31 октября.

Резюме

Статья посвящена научно-педагогической деятельности академика Асана Дабысовича Тайманова, ученого с мировым именем, специалиста в области топологии, математической логики и теории моделей. Излагаются жизненные этапы А.Д.Тайманова, данные о научных школах и выдающихся ученых, оказавших влияние на его становление как личности, деятеля, ученого и педагога. Особо отмечается значительный вклад А.Д.Тайманова в развитие казахстанской математической науки и сферы образования, в том числе создание собственной научной школы математической логики, открытие исследовательских лабораторий, специализированной физико-математической школы, подготовка научных кадров высокой квалификации. Сообщается об актуальности международной научно-практической конференции «Современная математика: проблемы и приложения», посвященной научно-педагогической деятельности А.Д. Тайманова, в свете реализации приоритетных направлений Стратегии «Казахстан-2050» и Стратегии социально-экономического развития Кызылординской области на период до 2020 года.

Ключевые слова: А.Д.Тайманов, топология, математическая логика, теория моделей, Академия наук Казахской ССР, Сибирское отделение Российской Академии наук.

Түйіндеме

Мақалада әлемге танымал ғалым, топология, математикалық логика және модельдер теориясы саласындағы маман, академик Асан Дабысұлы Таймановтың ғылыми-педагогикалық қызметі сөз болады. А.Д.Таймановтың өмірлік кезеңдері мен оның тұлға, қайраткер, ғалым және педагог ретінде қалыптасуына ықпалын тигізген ғылыми мектептер мен ғұлама ғалымдар туралы мәліметтер келтіріледі. А.Д.Таймановтың Қазақстанның математика ғылымы мен білім саласының дамуына, оның ішінде математикалық логикадан өзінің ғылыми мектебін жасақтаудағы, ғылыми зертханалар мен мамандандырылған физика-математика мектебін ашудағы, жоғары білікті ғылыми кадрлар даярлаудағы елеулі еңбегі ерекше аталады.

А.Д.Таймановтың ғылыми-педагогикалық қызметіне арналған «Қазіргі заманғы математика: проблемалары және қолданыстары» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияның «Қазақстан-2050» Стратегиясы мен Қызылорда облысының 2020 жылға дейінгі кезеңге арналған әлеуметтік-экономикалық даму стратегиясының басым бағыттарын жүзеге асыру тұрғысындағы өзектілігі айтылады.

Кілт сөздер: А.Д.Тайманов, топология, математикалық логика, модельдер теориясы, Қазақ ССР ғылым академиясы, Ресей ғылым академиясының Сібір бөлімшесі.

Summary

The article is devoted to the research and teaching activities of an academician Hasan Dabsovich Taimanov, a scientist with the world-renowned name and specialist in the field of topology, mathematical logics and theories of models. In the article it is proponed about the stages of A.D.Taymanov’s life and data about scientific schools and the outstanding scientists who had influenced on his becoming as an individual, scientist, personality and teacher. Taymanov`s significant contribution in the development of Kazakhstani mathematical science and the field of education is specially pointed out, including the creation of a private school of mathematical logics, his discovery of research laboratories, specialized physical - mathematical school, training of scientific staff of high qualification. It is also discussed about the relevance of the international scientific and practical conference "Contemporary Mathematics: Issues and Applications", devoted to the research and teaching activities of Taimanov within the frame of the foreground directions of the "Kazakhstan - 2050" Strategy and the Strategy of socio-economic development of the Kyzylorda region for the period up to 2020.

Key words: A.D.Taymanov, topology, mathematical logics, theory of models, The Academy of Sciences of the Kazakh SSR, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

УДК 519.6+515.146

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ

И.А.ТАЙМАНОВ, доктор физико-математических наук,
Я.В. БАЗАЙКИН, доктор физико-математических наук
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г.Новосибирск, Россия

Численное вычисление топологических инвариантов геометрических объектов сложной формы имеет важные приложения, которые и инициировали появление вычислительной топологии, бурно развивающейся в последнее время [1, 2, 3]. Часто задача вычислительной топологии сводится к эффективному вычислению чисел Бетти, т.е. рангов групп гомологий. В данной работе мы описываем метод вычисления чисел Бетти трехмерных тел, предложенный в [4, 5].

Одним из распространенных подходов к вычислению групп гомологий является теория Морса [6, 7], основанная на использовании функций Морса, т.е. таких гладких функций у которых все критические точки невырождены. При этом, стартуя с минимального значения функции Морса, исследуется как топология множества $M^a=\{\bar{x}\in M|f(\bar{x})\leq a\}$ изменяется при прохождении через критические значения функции f. Для морсовских функций такие перестройки легко описываются.

Дискретные подходы к теории Морса изучались систематически в [1] и [8]. Различные реализации дискретной теории Морса были рассмотрены также в [9, 10, 11, 12].

Алгоритм, предложенный нами, основан на использовании функций, имеющих кроме невырожденных критических точек еще только простейшие вырожденные критические точки, которые распознаются алгоритмом и чей вклад в перестройку топологии тоже легко описывается. В трехмерном случае, который мы рассматриваем, возникают только критические точки типа обезьянего седла.

В больших размерностях эта идея также работает, однако алгоритм пока не реализован из-за их быстро растущей сложности.

Нашим основным объектом исследования является множество M , являющееся объединением элементарных кубов – ячеек прямоугольной целочисленной решетки в трехмерном евклидовом пространстве, и лежащее в кубе

$K = [0,N] \times [0,N] \times [0,N] \subset \mathbf{R}^3$, для некоторого натурального N .

Поскольку во многих приложениях кубические ячейки, имеющие лишь общую вершину либо ребро не считаются соседними (например, в изучении задач протекания жидкости в телах [5]), необходимо предварительно обработать M , построив трехмерное тело $\widetilde{M}$, в котором кубические ячейки могут пересекаться только по общим двумерным граням и с которым и будет работать наш алгоритм. Для этого сначала рассмотрим

$K' = [0,3N] \times [0,3N] \times [0,3N]$,

и линейное отображение $P(x_1,x_2,x_3) = \left(3x_{1,3x_{2,3x_3}}\right)$ из K в K'. Положим $M' = P(M)$, т.е. M' — это подразбиение M , при котором каждый элементарный отрезок разделяется на три, а каждый элементарный куб — на девять частей. Теперь удалим все элементарные кубы в M', прилегающие хотя бы одной гранью к границе $\partial M'$, получив новое кубическое множество $\widetilde{M}$. В дальнейших рассуждениях мы предполагаем, что M уже получено после описанной предварительной обработки.

В качестве аналога функции Морса в K рассмотрим «диагональную» функцию

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3$.

Как обычно, положим

$M^a = \{\bar{x} \in M | f(\bar{x}) \le a\}$.

Очевидно, что если $a_1 < a_2$ и множество $f^{-1}([a_1,a_2]) \cap M$ не содержит точек с целочисленными координатами, то M^{a_1} и M^{a_2} гомеоморфны. Таким образом, при непрерывном изменении параметра a от 0 до 3N изменение топологического типа M^a может происходить лишь при переходе a через значение вида $a = f(x_1,x_2,x_3)$, где $x_i \in \mathbf{Z}$.

Пусть k_1,k_2,k_3 — тройка целых чисел, такая, что $v = (k_1,k_2,k_3) \in K$. Положим

$N(v) = \{\bar{x} \in M | |x_i - k_i| \le 1, i = 1,2,3\}$

Трехмерное тело $N(v)$ состоит из тех из восьми элементарных кубиков, окружающих точку v , которые лежат в M . Для $a = f(v)$ и для $|b - a| < \dfrac{1}{6}$ положим

$N_v M^b = N(v) \cap M^b$.

Будем называть точку $v \in M$ критической для функции f , если для достаточно малого $\varepsilon < \dfrac{1}{6}$ множества $N_v M^{a-\varepsilon}$ и $N_v M^{a+\varepsilon}$ не являются топологически эквивалентными.

Для того чтобы выяснить тип критической точки, мы кодируем окрестность $N(v)$ следующим образом. Окрестность состоит из восьми элементарных кубиков, по отношению к центральной целочисленной точке каждый кубик может быть определен изменением каждой из трех координат (т.е. уменьшение иди увеличение координаты). Таким образом, каждый кубик кодируется набором трех знаков «$\pm\pm\pm$». Далее, кубик отвечающий данному набору знаков может либо лежать в M, либо нет. Значит можно схематично закодировать окрестность данной целочисленной точки парой матриц

$$\begin{pmatrix} t_{---} & t_{+--} \\ t_{-+-} & t_{++-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{--+} & t_{+-+} \\ t_{-++} & t_{+++} \end{pmatrix},$$

где $t_{***} \in \{0,1\}$ (т.е. $\mathbf{1}$ — лежит в M, $\mathbf{0}$ — нет).

Назовем критическую точку $v \in M$ невырожденной, если $N_v M^{a+\varepsilon}$ гомеоморфно $N_v M^{a-\varepsilon}$ с одной приклеенной клеткой размерности i, $i = 1, 2, \mathbf{3}$. В противном случае, будем называть критическую точку вырожденной. Число i назовем индексом невырожденной критической точки. Следующие теоремы доказываются непосредственным перебором типов окрестностей целочисленной точки.

Все возможные типы критических точек описываются в следующей таблице:

	Шаблон	Индекс
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	0
	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	2
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	обезьянье седло

Последний тип критической точки, приведенный в таблице, отвечает «обезьяньему седлу» – в гладком случае оно может быть задано как критическая точка функции $f(x,y)=x^3-3xy^2$; при переходе через эту точку происходит приклеивание двух клеток размерности один.

Пусть M_i, $i = 0, 1, 2$ — множества критических точек индекса i. Для каждого обезьяньего седла v добавим к $M_{\mathbf{1}}$ две точки: саму точку v и ее формальный «дубль» v' (кроме того, мы рассматриваем vv' как элементарный отрезок, т.е. добавляем формальное ребро; при этом мы считаем, что v' находится выше по уровню, чем v и ребро vv' направлено вверх). Для каждого $i = 0, 1, 2$ рассмотрим свободный модуль C_i над $\mathbf{Z_2}$ с образующими из M_i. Чтобы построить цепной комплекс, по которому можно вычислять гомологии, необходимо построить граничные операторы $\partial_1: C_1 \to C_0$ и $\partial_2: C_2 \to C_1$.

В [4] граничные операторы строятся по следующей схеме: сначала определяется оператор ∂_1, при помощи градиентного спуска из критических точек индекса один вдоль ребер, идущих вниз по убыванию функции (обезьянье седло определяет пару критических точек, причем градиентный поток более высокой точки проходит через более низкую точку пары). Затем при помощи двойственности Александера определенный таким образом градиентный поток для дополнения к M дает оператор ∂_2.

Описанный подход может быть алгоритмизирован следующим образом. На входе имеем массив $M = M[i, j, k]$, где $i, j, k = 1 \dots N$, состоящий из нулей и единиц, причем наше трехмерное тело M мы отождествляем с объединением тех элементарных кубов $[i, i+1] \times [j, j+1] \times [k, k+1]$, для которых $M[i, j, k] = 1$.

Этап предварительной обработки заключается в следующем. Растягиваем массив M в три раза в каждом направлении, и убираем те элементарные кубы из M, которые граничат с нулями по целой квадратной грани.

На входе основного алгоритма имеем предварительно обработанный массив M. На выходе мы получаем списки $C0$ и $C1$ критических точек индексов 0 и 1 (как описано выше, каждое «обезьянье седло» дает вклад в $C1$ в виде двух точек индекса один; эти списки задают базисы модулей C_0 и C_1) и матрицу $D = D[i, j]$, задающую граничный оператор ∂_1.

С каждой целочисленной вершиной v мы свяжем формально сопряженную с ней вершину v'. Рассмотрим функцию Ind, которая для каждой целочисленной вершины $v \in M$ возвращает либо ее индекс (если она является невырожденной критической индекса 0 или 1), либо значение -1, если она является «обезьяньим седлом», либо -2, в остальных случаях. Критические точки индексов 0 и 1 (и «обезьяньи седла» в виде пары точек индекса 1) хранятся в в списках $C0$ и $C1$, соответственно, функция Num возвращает номер критической точки индекса i в списке Ci. Каждой вершине v с целочисленными координатами (i, j, k) приписывается дополнительное число $GF(v)$, содержащее номер критической точки индекса нуль, к которой можно спустится из точки v. Наконец, для каждой вершины v функции $Down_1$ и $Down_2$ возвращают вершины, стоящие ниже на один шаг вдоль по убывающим ребрам, или пустые значения, если таких ребер нет. При этом для критических точек индекса 1 функции $Down_1$ и $Down_2$ возвращают вершины, отвечающие убывающим ребрам разных знаков. Если v – «обезьянье седло», то мы считаем (в обозначениях предыдущего параграфа), что Down_1(v) и Down_2(v) – это вершины, находящиеся ниже v по направлению векторов (-1,0,0) и (0,-1,0), соответственно. Для сопряженной вершины, Down_1(v')=v и Down_2(v') – это вершина, находящаяся ниже v по направлению вектора (0,0,-1). Ниже приведено описание алгоритма из [4].

Input: предварительно обработанный массив M

Output: списки критических точек $C0$ и $C1$, матрица D граничного оператора.

D:=0
for все целочисленные вершины $v \in M$ **do**
if Ind(v)=0 **then** Add(C0,v)
GF(v):={Num(v)}
if Ind(v)=1 **then** Add(C1,v)
GF(v):= GF(Down_1(v))

```
                if GF(Down_1(v)) ≠  GF(Down_2(v))
                   then D(Num(v),Num(GF(Down_1(v)))):=1
                        D(Num(v),Num(GF(Down_2(v)))):=1
if Ind(v)= -1 then Add(C1,v)
                Add(C1, v')
                GF(v):= GF(Down_1(v))
                GF(v'):= GF(Down_1(v))
                if GF(Down_1(v)) ≠  GF(Down_2(v))
                   then D(Num(v),Num(GF(Down_1(v)))):=1
                        D(Num(v),Num(GF(Down_2(v)))):=1
                if GF(Down_1(v')) ≠  GF(Down_2(v'))
                   then D(Num(v'),Num(GF(Down_1(v')))):=1
                        D(Num(v'),Num(GF(Down_2(v')))):=1
if Ind(v)= -2 then GF(v):=GF(Down_1(v))
```

Дважды применив этот алгоритм к M и его дополнению M', мы получим матрицы D_1 и D_2 операторов ∂_1 и ∂_2. После этого числа Бетти находятся по формулам

$$b_0 = \dim(C_0)-rk(D_1),\ b_1=\dim(C_1)-rk(D_1)-rk(D_2),\ b_2=\dim(C_2)-rk(D_2).$$

Сложность алгоритма построения матрицы операторов (включая предварительную обработку) равна O(n), где $n=N^3$ – число вершин в K. Для последующего вычисления чисел Бетти необходимо вычислять ранги матриц D_i (например, методом Гаусса), что требует $O((n_c)^3)$ операций, где n_c – общее число критических точек. Связь чисел n и n_c в общем случае неясна и зависит от исходных данных.

Интересной задачей является распространение рассмотренного подхода на многомерный случай. Отметим здесь только, что при число комбиаторных типов критических точек растет очень быстро с ростом размерности кубируемого тела.

Литература:

1. Edelsbrunner, H., Harer, J., Zomorodian, A.J. Hierarchical Morse-Smale Complexes for Piecewise Linear 2-Manifolds // In AMC Symposium on Computational Geometry, Descrete & Compu. Geom. 30 (2003) 1, 87–107.
2. Kaczynski, T., Mischaikow, K., Mrozek, M.: Computational Homology // Appl. Math. Sci. Series 157, Springer-Verlag, New York 2004.
3. Zomorodian, Afra J. Topology for computing. Cambridge University Press, 2005 - 243 pp.
4. Базайкин Я. В. , Тайманов И. А., “Об одном численном алгоритме вычисления топологических характеристик трехмерных тел”. Вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. -С.523–530.
5. Базайкин Я.В., Байков В.А., Тайманов И.А., Яковлев А.А. Численный анализ топологических характеристик трехмерных геологических моделей нефтегазовых месторождений. Математическое моделирование. - 2013. - Т. 25. - N. 10. - С. 19-31.
6. Морс М. Вариационное исчисление в целом. – М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, ИКИ, 2010. – 512 с.
7. Милнор Дж. Теория Морса. – М.: Мир, 1965.
8. Forman, R. Morse theory for cell complexes // Advances in Math. 134 (1998), 90-145.

9. Allili, M., Corriveau, D., Derivi‘ere, S., Kaczynski, T., Trahan, A. Discrete Dynamical System Framework for Construction of Connections between Critical Regions in Lattice Height Data // Journal of Mathematical Imaging and Vision, V.28, Issue 2, June 2007. P. 99-111.

10. Corriveau, D., Allili, M., Ziou, D. Morse Connections Graph for Shape Representation // Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems, Lecture Notes in Computer Science, 2005, Volume 3708/2005, 219-226.

11. Gyulassy, A., Bremer, P.-T., Hamann, B., Pascucci, V. A Practical Approach to Morse-Smale Complex Computation: Scalability and Generality // IEEE Trans Vis Comput Graph. 2008 Nov-Dec;14(6):1619-26.

11. De Floriani, L., Mesmoudi, M.M., Donovaro, E. Extraction of Critical Nets based on a Discrete Gradient Vector Field // Eurographics 2002. Geometric Algorithms and Visibility, https://diglib.eg.org/EG/DL/Conf/EG2002/short/short86.pdf

Резюме

В работе описан алгоритм вычисления основных топологических характеристик трехмерных тел, основанный на дискретизации теории Морса и использующий дискретные аналоги гладких функций, имеющих только невырожденные (морсовские) и простейшие вырожденные критические точки.

Ключевые слова: вычислительная топология, кубические комплексы, числа Бетти, теория Морса.

Түйіндеме

Жұмыста үш өлшемді денелердің негізгі топологиялық сипаттамаларын есептеудің Морс теориясына негізделген алгоритмі көрсетіледі. Сонымен қатар мұнда Морс және жәй ерекше нүктелері бар тегіс функциялардың дискретті аналогтары қолданылады.

Кілт сөздер: есептеу топологиясы**,** кубтық комплекстер, Бетти сандары, Морс теориясы.

Summary

The algorithm of main topological characteristics of three dimentional corpus is described. In is founded on Morse`s sampling theory and is used on the sampling function`s, having only morsical and simplest critical points.

Key words: computational topology, cubical complexes, Betti numbers, Morse theory.

УДК 519.1

СТИРЛИНГОВЫЕ МУЛЬТИПЕРЕСТАНОВКИ

А.С. ДЖУМАДИЛЬДАЕВ, доктор физико-математических наук, профессор,
Д.А. ЕЛИУСИЗОВ, PhD
Казахстанско-Британский технический университет, г.Алматы, Республика Казахстан

1 Введение. Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ и $\mathbf{n} = \{1^{k_1}, \ldots, n^{k_n}\}$ мультимножество типа $\mathbf{k}$, т.е., k_i это количество копий элемента i. Перестановкой мультимножества является некоторая последовательность его элементов. Будем говорить, что перестановка мультимножества σ является *стирлинговой перестановкой,* если $\sigma(s) \geq \sigma(i)$ при $\sigma(i) = \sigma(j)$ и $i < s < j$.

стирлинговые перестановки были представлены Гесселем и Стэнли [1] в случае мультимножества $\{1^2,\dots,n^2\}$.

Обозначим через SP_k множество стирлинговых перестановок n. Для $\sigma\in\mathsf{SP}_k$ скажем, что i является индексом *спуска*, если $\sigma(i)>\sigma(i+1)$ и $i<K$ или $i=K$, где $K=k_1+\cdots+k_n$. Пусть

$$A_{k,i}=|\{\sigma\in\mathsf{SP}_k:|\operatorname{des}(\sigma)|=i\}|$$

количество Стирлинговых перестановок с i спусками (здесь $des(\sigma)$ множество индексов спуска σ). $A_{k,i}$ называется *эйлеровым числом*, а $\sum_{i=1}^{n}A_{k,i}x^i$ *эйлеровым многочленом*. Поскольку копии каждого элемента j $(1\le j\le n)$ содержат не более одного индекса спуска, ясно что $A_{k,i}=0$, если $i>n$. Все копии наибольшего элемента не могут быть разделены и их можно расположить в $k_1+\cdots+k_{n-1}+1$ промежутков между остальными элементами, что дает

$$|\mathsf{SP}_{\mathbf{k}}|=\prod_{i=1}^{n-1}(k_1+\cdots+k_i+1).$$

Определим рациональные функции $G_{\mathbf{k}}(x)$ и $g_{\mathbf{k}}(x)$ как

$$G_{\mathbf{k}}(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_{\mathbf{k},i}x^i}{(1-x)^{K+1}},\quad g_{\mathbf{k}}(x)=\frac{\sum_{i=K-n+1}^{K}A_{\mathbf{k},K+1-i}x^i}{(1-x)^{K+1}}.$$

Эти функции могут быть представлены как формальные ряды от x и пусть $B_{\mathbf{k}}(m)$, $b_k(m)$ их коэффициенты:

$$G_{\mathbf{k}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}B_{\mathbf{k}}(m)x^m,\qquad g_{\mathbf{k}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_{\mathbf{k}}(m)x^m.$$

На самом деле эти коэффициенты являются многочленами от m. Заметим также, что ряды выше дают

$$B_{\mathbf{k}}(0)=0,\qquad b_{\mathbf{k}}(0)=\cdots=b_{\mathbf{k}}(K-n)=0.$$

Мы называем многочлены $B_{\mathbf{k}}(m)$ и $b_k(m)$ *стирлинговыми многочленами*. Причиной такой терминологии служит тот факт, что

$$B_k(m)=S(n+m,m),\qquad b_k(m)=s(m,m-n),$$

где $s(i,j)$ и $S(i,j)$ числа Стирлинга первого и второго рода, если $k_i=2$ при всех $i=1,2,\dots,n$ ([1]).

Целью нашей работы является описание комбинаторных интерпретаций стирлинговых многочленов $B_{\mathbf{k}}(m),b_{\mathbf{k}}(m)$ для всех $k_1,\dots,k_n$. Основные положения этой работы изложены авторами в [2]. Наш подход заключается в следующем.

- Во-первых, мы применяем теорию P-разбиений [4] и строим частично упорядоченные множества, мы называем их $\mathbf{k}$*-стирлинговые частично упорядоченные множества* $P_{\mathbf{k}}$, у которых порядковые многочлены $\Omega(P_{\mathbf{k}},m),\overline{\Omega}(P_{\mathbf{k}},m)$ равны $B_{\mathbf{k}}(m),b_{\mathbf{k}}(m)$, соответственно.
- Далее, мы вводим понятие $\mathbf{k}$ *-стирлинговых чисел первого и второго рода* $s_{\mathbf{k}}(n,m),S_{\mathbf{k}}(n,m)$, для которых

$$B_{\mathbf{k}}(m)=S_{\mathbf{k}}(\ell+m,m),\qquad b_{\mathbf{k}}(m)=s_{\mathbf{k}}(m,m-\ell),$$

где $\ell=\ell(\mathbf{n})$ количество компонент $\mathbf{n}$ с кратностью выше 1,

$$\ell=|\{i\mid k_i>1,i=1,\dots,n\}|.$$

Комбинаторные значения $S_{\mathbf{k}}(n,m)$ и $s_{\mathbf{k}}(n,m)$ связаны с разбиениями множеств и статистиками на перестановках. Если $\mathbf{k}=(1,2,\ldots,2)$, мы называем $\mathbf{k}$-стирлинговые числа *стирлинговыми числами нечетного типа*. Случай $\mathbf{k}=(1,\ldots,1,2,\ldots,1,\ldots,1,2)$ показывает, что $\mathbf{k}$-стирлинговые числа являются натуральным обобщением центрально-факториальных чисел.

Примеры.

$\mathbf{k}$	$B_{\mathbf{k}}(m)$	$b_{\mathbf{k}}(m)$
$(k_1,\ldots,k_n)=(1,\ldots,1)$	m^n	m^n
$(k_1)=(k)$	$\binom{k+m-1}{k}$	$\binom{m}{k}$
$(k_1,\ldots,k_n)=(1,\ldots,1,2)$	$\sum_{i=1}^{m} i^n$	$\sum_{i=1}^{m-1} i^n$
$(k_1,\ldots,k_n)=(2,\ldots,2)$	$S(n+m,m)$	$s(m,m-n)$
$(k_1,\ldots,k_{2n})=(1,2,\ldots,1,2)$	$T(2n+2m,2m)$	$t(2m,2m-2n)$

Здесь $T(2i,2j), t(2i,2j)$ центрально-факториальные числа [3].

2 Общие свойства стирлинговых многочленов.

Теорема 1. *Пусть* m *натуральное число. Тогда*

- $B_{\mathbf{k}}(m), b_{\mathbf{k}}(m)$ многочлены от m степени K со старшими коэффициентами $|\mathrm{SP}_{\mathbf{k}}|/K!$ и

$$B_{\mathbf{k}}(0)=B_{\mathbf{k}}(-1)=\cdots=B_{\mathbf{k}}(-K+n)=0, \quad B_{\mathbf{k}}(m)=(-1)^K b_{\mathbf{k}}(-m).$$

- Если $k_n>1$, то

$$B_{\mathbf{k}}(m)=\sum_{i=0}^{m} iB_{\mathbf{k}\setminus k_n}(i)\binom{k_n+m-i-2}{k_n-2}, \quad b_{\mathbf{k}}(m)=\sum_{i=0}^{m-1} ib_{\mathbf{k}\setminus k_n}(i)\binom{m-i-1}{k_n-2},$$

где $\mathbf{k}\setminus k_n=(k_1,\ldots,k_{n-1})$.

- $B_{\varnothing}(m)=1, B_{\mathbf{k}}(0)=0$; и

$$B_{\mathbf{k}}(m)=\begin{cases} B_{\mathbf{k}}(m-1)+B_{\mathbf{k}'}(m), & \mathrm{k_n}>1;\\ mB_{\mathbf{k}'}(m), & \mathrm{k_n}=1, \end{cases}$$

- $b_{\varnothing}(m)=1, b_{\mathbf{k}}(0)=0$; и

$$b_{\mathbf{k}}(m)=\begin{cases} b_{\mathbf{k}}(m-1)+b_{\mathbf{k}'}(m-1), & \mathrm{k_n}>1;\\ mb_{\mathbf{k}'}(m), & \mathrm{k_n}=1, \end{cases}$$

где $\mathbf{k}'=(k_1,\ldots,k_{n-1},k_n-1)$.

3 Стирлинговые многочлены как порядковые многочлены. Предположим P конечное частично упорядоченное множество с частичным порядком $<_p$.

Определение 1. *Пусть* $\Omega(P,m)$ *количество отображений* $\sigma: P\to\{1,\ldots,m\}$, *сохраняющих нестрогий порядок и* $\overline{\Omega}(P,m)$ *количество отображений* $\overline{\sigma}: P\to\{1,\ldots,m\}$, *сохраняющих строгий порядок, т.е.,* $x<_p y \Rightarrow \sigma(x)\le\sigma(y)$ *и* $\overline{\sigma}(x)<\overline{\sigma}(y)$.

Известно, что $\Omega(P,m)$, $\overline{\Omega}(P,m)$ многочлены от m, которые называются *порядковые многочлены* и также, что $\Omega(P,m)=(-1)^{|P|}\overline{\Omega}(P,-m)$. (см. [4].)

Назовем набор s-ок $(q_1,\ldots q_s)$ как s-*серию с концом* q_s, если $q_1=\ldots=q_{s-1}=1$ и $q_s>1$; или просто s-*серией*, если такого q_s не существует. Скажем, что мультимножество n (или n-набор k) имеет

длину $\ell(\mathrm{n})=\ell$ и *вес* $\mathrm{w(n)}=(\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_\ell;\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_\ell;\mathrm{a})$

если k можно представить в виде последовательности a_i-серий с концами t_i и a-серией:

$$(k_1,\ldots,k_n)=(\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1\text{ones}},t_1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_\ell-1\text{ones}},t_\ell,\underbrace{1,\ldots,1}_{a\text{ones}}),$$

где $a_i>0, t_i>1$ для всех $1\le i\le\ell$ and $a\ge 0$.

Предположим, что $n=\{1^{k_1},\ldots,n^{k_n}\}$ имеет вес $(a_1,\ldots,a_\ell;t_1,\ldots,t_\ell;a)$. Положим

$$s_0=0, s_i=s_{i-1}+a_i+t_i-1,\qquad s_i=\sum_{j=1}^{i}(a_j+t_j-1),\ \ 1\le i\le\ell.$$

Определим $\mathbf{k}$-*стирлинговое частично упорядоченное множество* $P_{\mathbf{k}}$ следующей диаграммой Хассе:

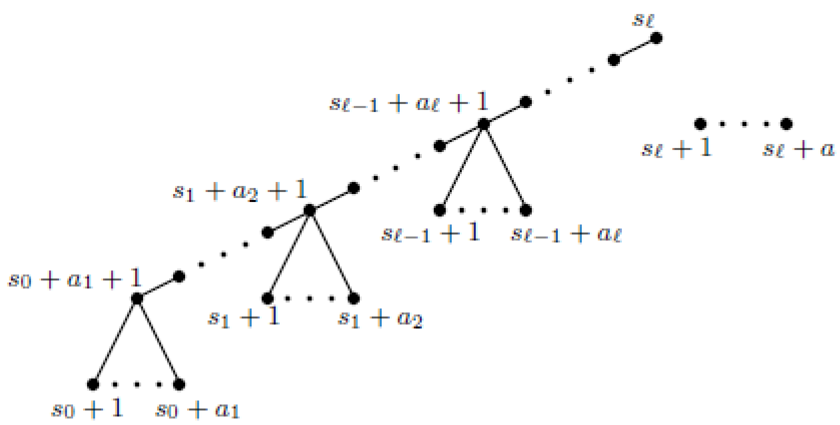


Рисунок 1.

Теорема 2. $B_{\mathbf{k}}(m)=\Omega(P_{\mathbf{k}},m),\quad b_{\mathbf{k}}(m)=\overline{\Omega}(P_{\mathbf{k}},m).$

4 Разбиение множеств и статистика на перестановках. Пусть $[n]=\{1,\ldots,n\}$. Для семейства $\mathsf{F}=\{B_1,\ldots,B_m\}$ непустых множеств (или мультимножеств) пусть $\min(B_i)$ это минимальный элемент множества B_i и $\min(\mathsf{F})=\{\min(B_1),\ldots,\min(B_m)\}$. Мы обозначаем $a:_{\mathsf{F}}b$, если $a,b\in B_j$ для некоторого j. Определим мультимножество $\mathrm{multiset}(\mathsf{F})$ как слияние мультимножеств:

$$\mathrm{multiset}(\mathsf{F})=\mathrm{U}_{i=1}^{m}B_i.$$

Для данного U рассмотрим непустые множества (или мультимножества) $B_1,\ldots,B_m$, где $B_i\subseteq U$ $(1\le i\le m)$. Скажем, что семейство $\mathsf{F}=\{B_1,\ldots,B_m\}$ *сегментированное,* если для всех $a<b<c$ ($a,b,c\in U$) условие $a:_{\mathsf{F}}c$ означает $b\in\min(\mathsf{F})$.

Пусть $\mathrm{lmin}(\sigma)$ минимумов, выписанных слева направо от перестановки σ.

Предположим, что n,m $(n\ge m)$ данные натуральные числа, $U=[n+1]$ и пусть $\mathbf{k}$ произвольный набор веса $(a_1,\ldots,a_{n-m};t_1,\ldots,t_{n-m};0)$, что представляет некоторое мультимножество длины $n-m$.

Пусть $M=\max(a_1,\ldots,a_{n-m})$.

Определение 2. $\mathbf{k}$ *-система разбиений* $[n]$ *на* m *блоков это упорядоченный набор* $(M+1)$ *-ок* $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M)$ *, удовлетворяющий:*

(i) $\pi_1, \ldots, \pi_M$ разбиения $[n]$ на непустые блоки;

(ii) $\min(\pi_1) = \cdots = \min(\pi_M)$ и $|\min(\pi_1)| = m$;

(iii) если $\{x_1, \ldots, x_{n-m}\} = [n] \setminus \min(\pi_1)$ так, что $x_1 < \cdots < x_{n-m}$, то для всех i $(1 \le i \le n-m)$ и $j > a_i$, имеем $x_i \,\vdots_{\pi_j}\, 1$;

(iv) π_0 сегментированное семейство мультимножеств такое, что $\min(\pi_0) = \min(\pi_1)$, $x_1 \,\vdots_{\pi_0}\, 1$ и $\mathrm{multiset}(\pi_0) \subseteq \min(\pi_1) \cup \{x_1, x_2^{t_1-2}, \ldots, x_{n-m}^{t_{n-m-1}-2}, (n+1)^{t_{n-m}-2}\}$.

Определение 3. $\mathbf{k}$ *-система перестановок* $[n]$ имеющая m *минимумов слева направо это упорядоченный набор* $(M+1)$ *-ок* $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_M)$*, удовлетворяющий:*

(i) $\sigma_1, \ldots, \sigma_M$ перестановки $[n]$;

(ii) $\mathrm{lmin}(\sigma_1) = \cdots = \mathrm{lmin}(\sigma_M)$ и $|\mathrm{lmin}(\sigma_1)| = m$;

(iii) если $\{x_1, \ldots, x_{n-m}\} = [n] \setminus \mathrm{lmin}(\sigma_1)$ так, что $x_1 < \cdots < x_{n-m}$, то для всех i $(1 \le i \le n-m)$ и $j > a_i$, если $\sigma_j(p) = x_i$, то $\sigma_j(q) > x_i$ для всех $q > p$;

(iv) σ_0 сегментированное семейство мультимножеств такое, что $\min(\sigma_0) = \mathrm{lmin}(\sigma_1)$, $x_1 \,\vdots_{\sigma_0}\, 1$ и $\mathrm{multiset}(\sigma_0) = \mathrm{lmin}(\sigma_1) \cup \{x_1, x_2^{t_1-2}, \ldots, x_{n-m}^{t_{n-m-1}-2}, (n+1)^{t_{n-m}-2}\}$.

Определение 4. *Пусть* $S_{\mathbf{k}}(n,m)$ *количество* $\mathbf{k}$ *-систем разбиений* $[n]$ *на* m *блоков и* $s_{\mathbf{k}}(n,m)$ *количество* $\mathbf{k}$ *-систем перестановок* $[n]$*, имеющих* m *минимумов слева направо.*

Теорема 3. *Если мультимножество* $n = \{1^{k_1}, \ldots, n^{k_n}\}$ *имеет длину* ℓ *и вес* $(a_1, \ldots, a_\ell; t_1, \ldots, t_\ell; 0)$, *то*

$$B_k(m) = S_{\mathbf{k}}(\ell+m, m), \qquad b_k(m) = s_{\mathbf{k}}(m, m-\ell).$$

Более того,

$$S_{\mathbf{k}}(\ell+m, m) = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_\ell \le m} i_1^{a_1} \ldots i_\ell^{a_\ell} \binom{t_1 + i_2 - i_1 - 2}{i_2 - i_1} \cdots \binom{t_\ell + m - i_\ell - 2}{m - i_\ell},$$

$$s_{\mathbf{k}}(m, m-\ell) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_\ell < m} i_1^{a_1} \ldots i_\ell^{a_\ell} \binom{i_2 - i_1 - 1}{t_1 - 2} \cdots \binom{m - i_\ell - 1}{t_\ell - 2}.$$

Литература:

1. I. M. Gessel, R. P. Stanley. Stirling Polynomials // J. Comb. Theory, Ser. A. -1978. –Vol. 24, -P. 24-33.

2. A. Dzhumadil'daev, D. Yeliussizov. Stirling permutations on multisets // European Journal of Combinatorics. –2014. –Vol.36. –P. 377-392

3. J. Riordan. Introduction to combinatorial analysis. –New York: Courier Dover Publications, 2002. -256 p.

4. R. P. Stanley. Enumerative Combinatorics. –Cambridge: Cambridge University Press, 2000. –Vol 1. -600 p.

Резюме

Мультиперестановка σ является стирлинговой перестановкой, если $\sigma(s) \geq \sigma(i)$ при $\sigma(i) = \sigma(j)$ и $i < s < j$. В работе изучаются стирлинговые многочлены, которые возникают в производящей функции для статистики спусков стирлинговых перестановок. Представлены обобщения классических чисел Стирлинга.
Ключевые слова: Стирлинговая перестановка, мультимножество, стирлинговый многочлен, числа Стирлинга.

Түйіндеме

Егер $\sigma(i) = \sigma(j)$ және $i < s < j$ болғанда $\sigma(s) \geq \sigma(i)$, σ мультиалмастыру стирлингтік алмастыру болып табылады. Бұл мақалада стирлингтік алмастыруларды түсірудің статистикасы үшін функциясындағы пайда болатын стирлингтік көпмүшелер зерттелінеді. Стирлинг классикалық сандарының жалпылануы көрсетілген.
Кілт сөздер: Стирлинг ауыстыру, мультижиын, Стирлинг көпмүшелігі, Стирлинг саны.

Summary

Multipermutation is a Stirling permutation if $\sigma(s) \geq \sigma(i)$ when $\sigma(i) = \sigma(j)$ and $i < s < j$. We study Stirling polynomials that occur in the generating function for the statistics slopes Stirling permutations. Presented generalizations of the classical Stirling numbers.
Key words: Stirling permutation, multiplicity, Stirling polynomial, Stirling numbers.

УДК 510.67:512.57

P -ОБОГАЩЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е.А.ПАЛЮТИН, доктор физико-математических наук
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г.Новосибирск, Россия

1 Введение

В тезисах Т.А.Нурмагамбетова [1] содержатся следующие две теоремы.

Теорема A. При предположении обобщенной континуум-гипотезы теория любой абелевой группы будет (P,e) -суперстабильной.

Теорема B. Если полная теория T абелевых групп суперстабильна, то число (P,e) -пополнений теории T с множеством выделенных констант A не зависит от A и принимает следующие значения: 1, ω или 2^{ω}.

В работе автора [2] доказана (P,e) -суперстабильность теории любой абелевой группы без предположения обобщенной континуум-гипотезы. В этой работе дано также полное описание абелевых групп, теории которых являются (P,s) -суперстабильными.

Теорема 1 данной статьи обобщает теорему B, снимая условие суперстабильности, и исправляет список чисел (P,e) -пополнений, дополняя его числом 2.

Теорема 3 данной статьи показывает, что для заданной полной теории T абелевых групп число (P,s) -пополнений теории T с множеством выделенных констант A либо равно $2^{|A|}$, либо не зависит от A и равно одному из следующих значений: ω и n, где $n \in \omega, n \neq 0$.

Мы будем использовать некоторые результаты статьи [2]. Для удобства читателя в данной статье мы повторим некоторые определения, соглашения из статьи [2] и некоторые содержащиеся там простые рассуждения.

Отметим, что результаты данной статьи анонсированы в сообщении [3].

Необходимые для понимания сведения из теории абелевых групп можно найти, например, в [4] и [6] (параграф 8.4).

В дальнейшем под группой всегда подразумевается абелева группа. Буквой p всегда будет обозначаться некоторое простое число.

Элементарной p-группой называться прямая сумма циклических групп порядка p. Элементарной группой называться элементарной p-группа для некоторого p.

Для группы A и кардинала λ через $A^{<\lambda}$ обозначаем прямую сумму λ экземпляров группы A.

Подгруппа P группы A называется сервантной или чистой (pure), если $nP = (P \cap nA)$ для любого натурального числа n. Это свойство равносильно тому, что $p^k P = (P \cap p^k A)$ для любого простого числа p и любого натурального числа k.

2 P_{Δ}-спектры

Зафиксируем в этом параграфе некоторую полную теорию T языка L. Для удобства работы с моделями теории T мы, как принято в современной теории моделей, зафиксируем некоторую достаточно насыщенную модель C теории T и будем считать, что все рассматриваемые нами T-модели являются элементарными подмоделями модели C. Такая T-модель C называется монстр-моделью теории T.

Конечные последовательности называются кортежами и множество всех кортежей из элементов множества U обозначается через $U^{<\omega}$. Длину кортежа $\mathbf{u}$ обозначаем через $l(\mathbf{u})$. Для простоты вместо обозначения $\mathbf{u} \in U^{<\omega}$ будем использовать обозначение $\mathbf{u} \in U$. Кортежи элементов монстр-модели C будут обозначаться жирными буквами начала латинского алфавита: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$, а кортежи переменных — жирными буквами конца этого алфавита: $\ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

Если A — структура языка L, $\Phi(\mathbf{x})$ — формула языка L с параметрами из структуры A, то через $\Phi(A)$ обозначаем множество $\{\mathbf{a} \mid A \quad \Phi(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in A\}$. Если X — подмножество монстр-модели C, то X будем называть множеством в теории T. Через $L(X)$ будем обозначать язык, который получается из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант. Через $T(X)$ будем обозначать следующее множество формула языка $L(X)$:

$$\{\varphi(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in X, C \quad \varphi(\mathbf{a}), \varphi(\mathbf{x}) - \text{формулы языка } L \text{ без параметров}\}$$

Ясно, что $T(X)$ будет полной теорией языка $L(X)$ и являться расширением теории T.

Пусть язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P. Пусть Δ — некоторое множество предложений языка L_P.

Отношение, сопоставляющее каждому бесконечному кардиналу некоторый кардинал будем называть кардинальной функцией.

Определение *Пусть* T *— некоторая полная теория языка* L, Δ *— некоторое множество предложений языка* L_P, X *— множество в теории* T. *Обозначим через* $C_T(\Delta, X)$ *мощность множества пополнений в языке* $(L(X))_P$ *множества*

$$T(\Delta, X) = (T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta).$$

Кардинальную функцию, сопоставляющую кардиналу λ супремум кардиналов $C_T(\Delta, X)$ при различных множествах X в теории T с условием $|X| \square\lambda$ называется P_Δ-спектром теории T и обозначается через $S_T(P, \Delta)$.

Лемма 1 *Для любой полной теории T конечного или счетного языка L и любого множества Δ предложений языка L_P и любого не более чем счетного множества X кардинал $C_T(\Delta, X)$ может принимать только одно из следующих значений: 2^ω, ω и n, где $n \in \omega$.*

Доказательство. Если множество всех пополнений множества $T_\Delta(X)$ непусто, то оно образует компактное топологическое пространство со счетной базой открыто-замкнутых множеств. То, что мощность такого пространства принимает только те значения, которые указаны в формулировке леммы, является хорошо известным фактом.

Определение *Пусть Δ — некоторое множество предложений языка L_P*

1) Полная теория T языка L называется P_Δ-стабильной, если для некоторого бесконечного кардинала λ выполнено $S_T(P, \Delta)(\lambda) \square\lambda$.

2) Полная теория T языка L называется P_Δ-суперстабильной, если для некоторого кардинала Щ выполнено $S_T(P, \Delta)(\lambda) \square\lambda$ для всех кардиналов λ Щ.

3) Структура A называется P_Δ-(супер)стабильной, если таковой является ее теория.

Рассмотрим следующие важные случаи P_Δ-спектров для случая, когда теория T является некоторой полной теорией абелевых групп.

Определение *1) Если Δ_s, состоит из предложений, выражающих тот факт, что P является подгруппой, то P_{Δ_s}-спектр называется (P, s)-спектром.*

2) Если Δ_e состоит из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является элементарной подструктурой, то P_{Δ_e}-спектр называется (P, e)-спектром.

Соответствующие пунктам 1) и 2) (P, i)-спектры, где $i \in \{s, e\}$, будем обозначать через $S_T(P, i)$. Вместо P_{Δ_i}-(супер)стабильности будем писать (P, i)-(супер)стабильность.

Ясно, что для любой полной теории T абелевых групп выполнено $S_T(P, e) \square S_T(P, s)$.

Примитивной формулой языка L называется формула вида

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \Phi,$$

где Φ — конъюнкция атомарных формул языка L.

В дальнейшем через L будем обозначать язык теории абелевых групп, состоящий из двухместного функционального символа $+$, одноместного функционального символа $-$ и символа константы 0. Через AG будем обозначать теорию всех абелевых групп, заданную обычными аксиомами абелевых групп языка L.

Следующая лемма хорошо известна. Ее доказательство можно найти, например, в [7] и [6].

Лемма 2 *Пусть T — полная теория абелевых групп. Любая формула языка абелевых групп эквивалентна в теории T булевой комбинации примитивных формул.*

Следующие три леммы доказывается точно так же как соответствующие леммы для модулей (см., например, [7]).

Лемма 3 *Пусть A — абелева группа, P — ее подгруппа. Любая примитивная формула $\Phi(x)$ языка L_P без параметров определяет в структуре $A = \langle A, P \rangle$ подгруппу, а примитивная формула $\Psi(x; \mathbf{a})$ языка L_P с параметрами из кортежа $\mathbf{a} \in A$ определяет в этой структуре* *либо пустое множество, либо класс смежности по подгруппе* $\Psi(A;0)$, *где* 0 *— кортеж, состоящий из нулей группы* A.

Лемма 4 *Пусть* A *— абелева группа,* P *— ее подгруппа. В теории* $Th(\langle A;P\rangle)$ *любая формула языка* L_P *эквивалентна булевой комбинации примитивных формул языка* L_P.

Для структуры A языка L_P и примитивных формул $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ языка L_P без параметров через $[\Phi(A):\Psi(A)]$ обозначается индекс подгруппы $\Phi(A)\cap\Psi(A)$ в группе $\Phi(A)$.

Лемма 5 *Пусть* A_1, A_2 *— абелевы группы,* P_1, P_2 *— их подгруппы. Пусть для каждой пары примитивных формул* $\Phi(x)$ *и* $\Psi(x)$ *языка* L_P *без параметров выполнено* $[\Phi(A_1):\Psi(A_1)] = [\Phi(A_2):\Psi(A_2)]$. *Тогда* $\langle A_1, P_1\rangle \equiv \langle A_2, P_2\rangle$.

Следующая лемма восходит к работе Ванды Шмелев [5] и в данном виде содержится в [6] (лемма 8.4.7).

Лемма 6 *Любая примитивная формула* $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ *языка абелевых групп эквивалентна в теории* AG *конъюнкции* $\Psi(x_1,\ldots,x_n)$ *формул вида* $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ *и* $\exists y \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = p^k y$ *для целых чисел* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, *простых чисел* p *и натуральных чисел* k, *которые будут называться соответственно стандартными формулами первого и второго рода. При этом простое число* p *в стандартной формуле второго рода будем называть модулем этой формулы.*

Следствие 1 *Пусть* A *— абелева группа,* P *— ее сервантная подгруппа,* $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ *— примитивная формула языка абелевых групп. Тогда для любых* $a_1,\ldots,a_n \in P$ *выполнено условие*

$$A \quad \Phi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow P \quad \Phi(a_1,\ldots,a_n). \tag{1}$$

Из леммы 2 и следствия 1 вытекает следующая лемма.

Лемма 7 *Пусть* A *— абелева группа,* P *— ее подгруппа. Для того, чтобы подгруппа* P *была элементарной подструктурой группы* A *необходимо и достаточно, чтобы она была сервантной подгруппой и выполнялось условие* $A \equiv P$.

Замечание 1 *Можно считать, что примитивная формула* $\Phi(\mathbf{x})$ *языка* L_P *имеет вид*

$$\exists y_1 \cdots \exists y_k (P(y_1) \wedge \cdots \wedge P(y_k) \wedge \Psi),$$

где Ψ — примитивная формула языка L. В самом деле, если формула Φ содержит подформулу вида $P(t)$ для некоторого терма t, то Φ эквивалентна формуле $\exists y(P(y) \wedge \Phi^*)$, где — переменная y не входит в формулу Φ, а формула Φ^* получается из формулы Φ заменой подформулы $P(t)$ на формулу $y = t$.

3 (P,e)-спектр

Из доказательства теоремы 1 статьи [2] вытекает

Следствие 2 *Для любой полной теории* T *абелевых групп, любого множества* X *в теории* T *выполнено* $C_T(\Delta_e, X) = C_T(\Delta, \varnothing)$.

Следующее замечание очевидно.

Замечание 2 *Пусть* A *— абелева группа,* P *— ее элементарная подгруппа и* $\varphi(x)$ *— формула языка абелевых групп с параметрами из подгруппы* P. *Тогда из условия* $\varphi(A) \neq \varnothing$ *следует* $\varphi(P) \neq \varnothing$.

Лемма 8 *Пусть* A *— абелева группа,* P *— ее элементарная подгруппа,* A/P *— делимая группа без кручения,* $\Phi(x;\mathbf{y})$ *— примитивная формула (без параметров),* $\mathbf{a} \in P$ *и* $\Phi(A;\mathbf{a})$ЪP. *Тогда* $(\Phi(A;\mathbf{a}) + P) = A$.

Доказательство. Так как $\Phi(A;\mathbf{a})\neq\varnothing$, то в силу предыдущего замечания мы имеем $(\Phi(A;\mathbf{a})\cap P)\neq\varnothing$. Предположим, что $(\Phi(A;\mathbf{a})+P)\neq A$. Тогда примитивная формула $\Phi(x;0)$ без параметров будет определять в группе A/P ненулевую собственную подгруппу. Таких подгрупп в делимой группе без кручения нет.

Лемма 9 *Пусть A_1, A_2 — абелевы группы, P_1, P_2 — их подгруппы и выполнено условие $A_1\neq P_1$. Пусть для $i\in\{1,2\}$ A_i/P_i — группа без кручения и для некоторой примитивной формулы $\Phi(x)$ (без параметров) языка L выполнено $\Phi(A_1)\subseteq P_1$. Тогда $\Phi(A_2)\subseteq P_2$.*

Доказательство. По лемме 6 можно считать, что формула $\Phi(x)$ представляет собой конъюнкцию стандартных формул. Если среди этих формул есть стандартная формула первого рода, т.е. $nx=0$, то $\Phi(A_2)\subseteq A_2[n]$. Так как группа A_2/P_2 без кручения, то $A_2[n]\subseteq P_2$. Таким образом, мы имеем $\Phi(A_2)\subseteq P_2$.

Предположим, что формула $\Phi(x)$ представляет собой конъюнкцию стандартных формул второго рода и m — произведение всех чисел p^k, для которых формула $\exists y nx=p^k y$ входит в формулу $\Phi(x)$. Ясно, что $mA_1\subseteq\Phi(A_1)$. Возьмем произвольный элемент $a\in(A_1\setminus P_1)$. Так как группа A_1/P_1 без кручения, то $ma\notin P_1$. Это противоречит условию $\Phi(A_1)\subseteq P_1$.

Лемма 10 *Пусть A — абелева группа, P,Q — ее подгруппы. Пусть для некоторого элемента $a\in A$ выполнено $(a+Q)\cap P)\neq\varnothing$ и $(a+Q)\not\subseteq P$. Тогда для любого $b\in A$ выполнено $(b+Q)\not\subseteq P$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $b\in A$ выполнено $(b+Q)\subseteq P$. Тогда $b\in P$. Так как $(a+Q)\cap P)\neq\varnothing$, то можно считать, что $a\in P$. Из условий $(b+Q)\subseteq P$ и $b\in P$ получаем $Q\subseteq P$, следовательно, в силу $a\in P$ должно быть $(a+Q)\subseteq P$. Это противоречит условию.

Теорема 1 *Для любой полной теории T абелевых групп ее (P,e)-спектр тождественно равен одному из следующих значений: 2^{ω}, ω, 2 и 1. Причем каждый из этих видов (P,e)-спектра реализуются для некоторой полной теории абелевых групп.*

Доказательство. В силу следствия 2 и леммы 1 (P,e)-спектр полных теорий абелевых групп тождественно равен одному следующих значений: 2^{ω}, ω и n, где $n\in\omega, n\neq 0$.

Рассмотрим группу $A_{2^{\omega}}=\bigoplus_{i\in\omega} Z_{p_i}^{<\omega}$, где $p_i, i\in\omega$, — нумерация простых чисел, Z_{p_i} — циклическая группа порядка p_i. Возьмем произвольную функцию $f:\omega\to\omega$. Подгруппу $Z_{p_n}^{<\omega}$ группы $A_{2^{\omega}}$ представим в виде $Z_{p_n}^{f(n)}\oplus D_n$, где D_n изоморфна группе $Z_{p_n}^{<\omega}$. Подгруппу $\bigoplus_{n\in\omega} D_n$ группы $A_{2^{\omega}}$ обозначим через H_f. Подгруппа H_f является сервантной и имеет те же шмелевские инварианты, что и группа $A_{2^{\omega}}$. Следовательно, подгруппа H_f является элементарной подгруппой группы $A_{2^{\omega}}$. Фактор-группа $A_{2^{\omega}}/H_f$ имеет вид $\bigoplus_{i\in\omega} Z_{p_i}^{f(i)}$. Ясно, что если $f_1\neq f_2$, то группы $A_{2^{\omega}}/H_{f_1}$ и $A_{2^{\omega}}/H_{f_2}$ не являются элементарно эквивалентными. Следовательно, (P,e)-спектр теории $Th(A_{2^{\omega}})$ тождественно равен 2^{ω}.

Ясно, что (P,e)-спектр теории конечной группы тождественно равен 1.

Пусть $T_2 = Th(Q)$. Покажем, что (P,e)-спектр теории T_2 тождественно равен 2. Одно расширение теории T_2 в языке L_P порождается множеством $T_2 \cup \{\forall x P(x)\}$. Нужно показать, что счетные структуры $A_1 = \langle A_1, P_1 \rangle$ и $A_2 = \langle A_2, P_2 \rangle$ с условиями $\exists x \neg P_1(x)$ и $\exists x \neg P_2(x)$ являются элементарно эквивалентными. Подгруппы P_1, P_2 являются делимыми, поэтому выделяются прямыми слагаемыми. Таким образом $A_i = P_i \oplus D_i$, $P_i = Q^{<\text{щ}}$, $D_i = Q^{<\lambda_i}$, где $\text{щ}, \lambda_i$ являются счетными или конечными ненулевыми кардиналами. Возьмем ультрастепени структур A_1 и A_2 по "хорошему" ультрафильтру U. Тогда эти ультрастепени будут иметь следующий вид: $A_i^U = \langle A_i^U, P_i^U \rangle$, где $A_i^U = P_i^U \oplus D_i^U$, $P_i = Q^{<\lambda^*}$, $D_i = Q^{<\lambda^*}$, где $\lambda^* = |\omega^U|$. Ясно, что структуры A_1^U и A_2^U будут изоморфными, следовательно структуры A_1 и A_2 будут элементарно эквивалентными.

Ясно, что (P,e)-спектр теории группы $A_\omega = Z_2^{<\omega}$ не превосходит ω. Любая бесконечная подгруппа группы A_ω является элементарной подструктурой. Ясно также, что для любого натурального числа n существует подгруппа B_n группы A_ω, для которой выполнено $|A_\omega / B_n| = n$. Таким образом, (P,e)-спектр теории $T(A_\omega)$ тождественно равен ω.

Если какой-то из шмелевских инвариантов теории T бесконечен, то существует такая модель A теории T, что $A = E^{<\omega} \oplus B$, где подгруппа E равна конечной циклической группе или квазициклической или R_p, в зависимости от того, какой шмелевский инвариант бесконечен. (См. доказательство предложения 8.4.12 из [6]). Тогда для любого натурального числа n группа A представляется в виде $A = E^n \oplus P_n$, где подгруппа P_n изоморфна группе A. Так как подгруппа P_n является прямым слагаемым группы A, то она сервантна и по лемме 7 является элементарной подгруппой. Фактор-группа A/P_n изоморфна группе E^n, следовательно, теории $Th(\langle A, P_n \rangle)$, $n \in \omega$, попарно различны. Таким образом, (P,e)-спектр теории T бесконечен.

Пусть все шмелевские инварианты группы A конечны и P — ее элементарная подгруппа. Тогда для любого простого p и любого натурального n группа $A[p^n]$ конечна, следовательно, $A[p^n] \subseteq P$.

Если группа A конечна, то (P,e)-спектр теории $Th(A)$ тождественно равен 1. Если группа A бесконечна, то имеется 2 пополнений множества $(Th(A) \cup \Delta_e)$. Одно из них содержит формулу $\forall x P(x)$, другие - отрицание этой формулы.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что для любой полной теории T абелевых групп, имеющей бесконечные модели и конечные шмелевские инварианты существует только одно пополнение множества $T^* = (T \cup \Delta_e \cup \{\exists x \neg P(x)\})$ в языке L_P.

В дальнейшем мы будет рассматривать только структуры $\langle A, P \rangle$, являющиеся моделями множества T^*.

Покажем, что A/P — группа без кручения.Предположим, что для некоторого $a \in (A \setminus P)$ выполнено $pa \in P$. Из элементарности P следует ее сервантность, поэтому для некоторого $b \in P$ мы имеем $pb = pa$. Тогда $(a-b) \in A[p] \subseteq P$, следовательно, $a \in P$, что противоречит выбору a.

Покажем делимость группы A/P. Предположим, что это не так, т.е. для некоторого простого p и элемента $a^* \in (A \setminus P)$ не существует элемента e с условием $(a^* - pe) \in P$.

Пусть $m^* = \gamma_p(A)$ и n^* — такое натуральное число, что $\dim((A/A[p^{n^*}])/p(A/A[p^{n^*}])) = m^*$. Так как $P \equiv A$, то $m^* = \gamma_p(P)$ и $\dim((P/P[p^{n^*}])/p(P/P[p^{n^*}])) = m^*$. Возьмем такие элементы $a_1, \dots a_{m^*} \in P$, что

$$(a_1 + P[p^{n^*}]) + p(P/P[p^{n^*}]), \dots, (a_{m^*} + P[p^{n^*}]) + p(P/P[p^{n^*}]) \tag{2}$$

— базис p-группы $(P/P[p^{n^*}])/p(P/P[p^{n^*}])$. Покажем, что элементы

$$(a_1 + A[p^{n^*}]) + p(A/A[p^{n^*}]), \dots, (a_{m^*} + A[p^{n^*}]) + p(A/A[p^{n^*}]) \tag{3}$$

являются независимыми в p-группе $(A/A[p^{n^*}])/p(A/A[p^{n^*}])$. Предположим, что это не так. Если $m^* = 0$, то доказывать нечего. Если $m^* = 1$, то это означает, что для некоторого $b \in A$ выполнено $(a_1 + A[p^{n^*}]) = (pb + A[p^{n^*}])$. Так как $A[p^{n^*}] = P[p^{n^*}]$ и $a_1 \in P$, то из элементарности подгруппы P следует, что найдется такой элемент $e \in P$, что $(a_1 + P[p^{n^*}]) = (pe + P[p^{n^*}])$. Это противоречит независимости последовательности 2. Пусть $m^* > 1$.

Поменяв базис 2 можно считать, что для некоторого $b \in A$ выполнено $((a_1 - a_2) + A[p^{n^*}]) = (pb + A[p^{n^*}])$. Это означает, что $((a_1 - a_2) - pb) = c$ для некоторого $c \in A[p^{n^*}]$. Из элементарности подгруппы P, свойства $A[p^{n^*}] \subseteq P$ и $a_1, a_2 \in P$ получаем, что для некоторого $d \in P$ мы имеем равенство $((a_i - a_j) - pd) = c$. Это противоречит тому, что последовательность 2 является базисом p-группы $(P/P[p^{n^*}])/p(P/P[p^{n^*}])$. Так как последовательность 3 является базисом группы $(A/A[p^{n^*}])/p(A/A[p^{n^*}])$, то, прибавив к этому списку элемент $(a^* + A[p^{n^*}]) + p(A/A[p^{n^*}])$, мы получим зависимое множество. Заменив базис 3, можно считать, что для некоторого e выполнено $((a^* - a_1) - pe) = c$ для некоторого $c \in A[p^{n^*}]$. В силу включения $A[p^{n^*}] \subseteq P$ и условия $a_1 \in P$, это противоречит выбору элемента a^*. Таким образом A/P — делимая группа без кручения, т.е. $A/P; Q^{<\lambda}$ для некоторого кардинала λ.

В силу леммы 5, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что если структуры $\mathcal{A}_1 = \langle A_1, P_1 \rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle A_2, P_2 \rangle$ языка L_P удовлетворяют условиям: $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$, для $i \in \{1,2\}$ выполнено $P_i \theta A_i$ и группы A_i/P_i являются делимыми группами без кручения, то для каждой пары примитивных формул $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ языка L_P выполнено условие

$$[\Phi(\mathcal{A}_1) : \Psi(\mathcal{A}_1)] = [\Phi(\mathcal{A}_2) : \Psi(\mathcal{A}_2)] \tag{4}$$

Взяв вместо формулы Ψ формулу $(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$, вводя фиктивные переменные и учитывая замечание 1 можно считать, что формулы $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ имеют вид

$$\Phi(x) = \exists y_1 \cdots \exists y_n (P(y_1) \wedge \cdots \wedge P(y_n) \wedge \Phi^*),$$

$$\Psi(x) = \exists y_1 \cdots \exists y_n (P(y_1) \wedge \cdots \wedge P(y_n) \wedge \Psi^*),$$

где $\Phi^*(x; \mathbf{y})$, $\Psi^*(x; \mathbf{y})$ — примитивные формулы языка L и $(\Phi^*(x; \mathbf{y}) \to \Psi^*(x; \mathbf{y}))$ — тождественно истинная формула.

Ясно, что $\Phi(A_1) = \bigcup\{\Phi^*(A_1;\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in P_1\}$ и $\Psi(A_1) = \bigcup\{\Psi^*(A_1;\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in P_1\}$.

По следствию 1 для $\mathbf{a} \in P_1$ мы имеем $\Phi^*(P_1;\mathbf{a}) = (\Phi^*(A_1;\mathbf{a}) \cap P_1)$ и $\Psi^*(P_1;\mathbf{a}) = (\Psi^*(A_1;\mathbf{a}) \cap P_1)$.

Случай 1: для некоторого кортежа $\mathbf{a}^* \in P_1$ выполнено условие $\varnothing \neq \Phi^*(A_1;\mathbf{a}^*) \subseteq P_1$.

В силу лемм 3, 10 и замечания 2 для любого кортежа $\mathbf{a} \in P_1$ той же длины, что у кортежа $\mathbf{y}$, выполнено условие $\Phi^*(A_1;\mathbf{a}) \subseteq P_1$. Следовательно, $\Phi(A_1) \subseteq P_1$. В частности, $\Phi^*(A_1;0) \subseteq P_1$. По лемме 9 мы получаем $\Phi^*(A_2;0) \subseteq P_2$. По лемме 10 и замечания 2 для любого кортежа $\mathbf{a} \in P_2$ той же длины, что у кортежа $\mathbf{y}$, выполнено условие $\Phi^*(A_2;\mathbf{a}) \subseteq P_2$. Следовательно, $\Phi(A_2) \subseteq P_2$. Равенство 4 получается в этом случае из условия $P_1 \equiv P_2$.

Случай 2: для любого кортежа $\mathbf{a} \in P_1$ с условием $\varnothing \neq \Phi^*(A_1;\mathbf{a})$ выполнено $\Phi^*(A_1;\mathbf{a})Ъ P_1$.

Подслучай 2a: для некоторого кортежа $\mathbf{a}^* \in P_1$ выполнено условие $\varnothing \neq \Psi^*(A_1;\mathbf{a}^*) \subseteq P_1$.

Так же как в случае 1 получаем, что для любого $i \in \{1,2\}$ выполнено условие $\Psi(A_i) \subseteq P_i$. Следовательно, для любого $i \in \{1,2\}$ выполнено условие

$$[\Phi(A_i):\Psi(A_i)][\Phi(A_i):P_i]. \tag{5}$$

По лемме 8 для любого $i \in \{1,2\}$ индекс $[\Psi(A_i):P_i]$ совпадает с мощностью группы A_i/P_i, которая бесконечна. Учитывая условие 5, получаем равенство 4.

Подслучай 2b: для любого кортежа $\mathbf{a} \in P_1$ с условием $\varnothing \neq \Psi^*(A_1;\mathbf{a})$ имеет место $\Psi^*(A_1;\mathbf{a})Ъ P_1$.

Так же, как в случае 1, заменив Φ^* на Ψ^* и A_1 на A_2, получаем, что для любого кортежа $\mathbf{a} \in P_2$ с условием $\varnothing \neq \Psi^*(A_2;\mathbf{a})$ имеет место $\Psi^*(A_2;\mathbf{a})Ъ P_2$.

Рассмотрим формулы: $\Phi^*(x;0)$, $\Psi^*(x;0)$, $\Phi_0(x) = \exists\mathbf{y}\Phi^*(x;\mathbf{y})$ и $\Psi_0(x) = \exists\mathbf{y}\Psi^*(x;\mathbf{y})$.

В силу $P_1 \equiv P_2$, для установления равенства 4 достаточно показать, что для любого $i \in \{1,2\}$ выполнено

$$[\Phi(A_i):\Psi(A_i)] = ([\Phi^*(P_i;0):\Psi^*(P_i;0)] \times [\Phi_0(P_i):\Psi_0(P_i)]). \tag{6}$$

Пусть $H = (\Phi^*(A_i;0) \cap \Phi_0(P_i))$ и $Q = (\Psi^*(A_i;0) \cap \Psi_0(P_i))$. Ясно, что $H = (\Phi^*(A_i;0) \cap P) = \Phi^*(P_i;0)$ и $Q = (\Psi^*(A_i;0) \cap P) = \Psi^*(P_i;0)$.

В силу леммы 8 и условия $\Psi^*(A_i;0)Ъ P$, мы имеем $(\Psi^*(A_i;0) + P) = A$, поэтому $(\Psi^*(A_i;0) + H) = \Phi^*(A_i;0)$.

Из предыдущих равенств получаем

$$[\Phi^*(A_i;0):\Psi^*(A_i;0)] = [H:Q]. \tag{7}$$

Рассмотрим подгруппу $R = (\Psi_0(P_i) + \Phi^*(A_i;0))$.

Как было отмечено ранее, мы имеем $\Phi(A_i) = (\Phi_0(P_i) + \Phi^*(A_i;0))$ и $\Psi(A_i) = (\Psi_0(P_i) + \Psi^*(A_i;0))$. Поэтому индекс $[\Phi(A_i):\Psi(A_i)]$ равен

$$[(\Phi_0(P_i) + \Phi^*(A_i;0):R] \times [R:(\Psi_0(P_i) + \Psi^*(A_i;0))]. \tag{8}$$

Ясно, что

$$[(\Phi_0(P_i)+\Phi^*(A_i;0):R]=[\Phi_0(P_i):((\Psi_0(P_i)+H)] \tag{9}$$

Из вида подгруппы R получаем

$$[R:(\Psi_0(P_i)+\Psi^*(A_i;0))]=[\Phi^*(A_i;0):\Psi^*(A_i;0)]=[H:Q] \tag{10}$$

Таким образом, индекс $[\Phi(A_i):\Psi(A_i)]$ равен

$$[\Phi_0(P_i):((\Psi_0(P_i)+\Phi^*(P_i;0)]\times[\Phi^*(P_i;0):\Psi^*(P_i;0)].$$

Из условия $P_1\equiv P_2$ получаем

$$[\Phi(A_1):\Psi(A_1)]=[\Phi(A_2):\Psi(A_2)].$$

4 (P,s)-спектры

Будем говорить, что P_Δ-спектр $S_T(P,\Delta)$ теории T является максимальным, если для любого бесконечного кардинала λ выполнено $S_T(P,\Delta)=2^\lambda$.

Теорема 2 *Если теория группы A имеет немаксимальный (P,s)-спектр, то группа A является прямой суммой конечного числа элементарных групп и конечной группы.*

Доказательство. Из лемм 3 и 4 статьи [2] вытекает, что если группа A не является прямой суммой конечного числа элементарных групп и конечной группы, то ее теория не является (P,s)-стабильной. На самом деле в доказательствах этих лемм получено более сильное утверждение, которое как раз и сформулировано в данной теореме.

Следующая лемма представляет собой легкое упражнение, для читателя, знакомого с начальными сведениями из теории абелевых групп.

Лемма 11 *Пусть A — группа, являющаяся прямым произведением элементарной p-группы и конечной p-группы F для некоторого простого числа p. Пусть P — некоторая подгруппа группы A. Тогда*

(1) Существует лишь конечное число элементов группы A, делящихся на p.

(2) $(P+F)$ — сервантная подгруппа группы A;

(3) $A=E_0\oplus(P+F)$, где E_0 — элементарная p-группа;

(4) если $A=(P+F)$, то для некоторой элементарной p-группы E мы имеем $A=E\oplus F_1$ и $P=E\oplus F_2$, где F_1,F_2 — некоторые конечные подгруппы и $F_2\subseteq F_1$.

Предложение 1 *Пусть p — простое число, A — счетная p-группа, являющаяся прямой суммой элементарной p-группы и конечной p-группы F. Тогда число типов изоморфизма структур вида $\langle A,P\rangle$, где P — произвольная подгруппа, равно ω.*

Доказательство. Следует из утверждений (3) и (4) леммы 11, так как существует только счетное число типов изоморфизма конечных групп и не более, чем счетных элементарных p-групп.

Следствие 3 *Пусть A — бесконечная абелева группа, являющаяся прямой суммой конечного числа элементарных групп и конечной группы. Пусть $T=Th(A)$. Тогда число $C_T(\Delta_s,\varnothing)$ расширений теории T до полной теории языка L_P равно ω.*

Доказательство. Так как ограниченные группы являются конечной прямой суммой своих p-компонент, то достаточно доказать это утверждение для p-групп. Так как группа A бесконечна и ограничена, то она имеет бесконечное число типов изоморфизма конечных подгрупп. Поэтому $C_T(\Delta_s,\varnothing)\ \ \omega$. Ограничение $C_T(\Delta_s,\varnothing)\square\omega$ следует из предложения 1, так как любое расширение теории T имеет счетную модель.

Далее мы докажем следующую теорему.

Теорема 3 *Для любой полной теории* T *абелевых групп ее* (P,s)*-спектр является либо максимальным, либо тождественно равен одному из следующих значений:* ω *и* n*, где* $n\in\omega, n\neq 0$*. Причем каждый из этих видов* (P,s)*-спектра реализуются для некоторой полной теории абелевых групп.*

Доказательство. Теория нулевой группы имеет (P,s)-спектр, тождественно равный 1. Теория группы Z_2^n для положительного числа n имеет (P,s)-спектр, тождественно равный $(n+1)$. Теория группы $Z_2^{<}\omega$ имеет (P,s)-спектр, тождественно равный ω. Из теоремы 2 следует что (P,s)-спектр теории группы Z_4^{ω} является максимальным. Таким образом, учитывая следствие 3, нам нужно показать, что если (P,s)-спектр теории T не является максимальным, то он ограничен числом ω.

Пусть (P,s)-спектр полной теории T не является максимальным. По теореме 2 каждая модель теории T является прямой суммой конечного числа элементарных групп и конечной группы. Если теория T не имеет бесконечных моделей, то ее (P,s)-спектр тождественно равен некоторому натуральному числу. Пусть все модели теории T бесконечны. Так как ограниченные группы являются конечной прямой суммой своих p-компонент, то (P,s)-спектр теории T является произведением (P,s)-спектров теорий T_p p-компонент моделей теории T. Итак, можно считать, что T является теорией группы A, представляющей собой прямое произведение элементарной p-группы E и конечной p-группы F для некоторого простого числа p. Пусть X — некоторое множество в теории T. Ясно, что можно считать, что в $T(X)$-моделях X является подгруппой. Пусть $A=\langle A,P,X\rangle$ — модель множества $T(\Delta_s,X)$. По свойствам (3) и (4) леммы 11 мы имеем

$$A=E_0\oplus E_1\oplus E_2\oplus F_0,\quad P=E_1\oplus E_2\oplus F_1,\quad X=E_2\oplus F_2, \tag{11}$$

для некоторых элементарных подгрупп E_0,E_1,E_2 и конечных подгрупп $F_2\subseteq F_1\subseteq F_0$.

Заметим, что из полноты теории $T(X)$ следует единственность размерности группы E_2 и единственность типа изоморфизмы группы F_2. Ясно также, что если для другой модели $A^*=\langle A^*,P^*,X\rangle$ теории $T(\Delta_s,X)$ мы имеем разложение

$$A^*=E_0^*\oplus E_1^*\oplus E_2\oplus F_0^*,\quad P^*=E_1^*\oplus E_2\oplus F_1^*,\quad X=E_2\oplus F_2, \tag{12}$$

размерности групп E_0,E_0^* и E_1,E_1^* совпадают и существует изоморфизм f группы F_0 на F_0^*, отображающий F_1 на F_1^* и оставляющий элементы подгруппы F_2 на месте, то f продолжается до изоморфизма структуры A на A^*.

Будем говорить, что размерности α,β элементарных абелевых p-групп совпадают по модулю ω, если $\alpha=\beta$ или обе бесконечны.

Будем называть структуры $A=\langle A,P,X\rangle$ и $A^*=\langle A^*,P^*,X\rangle$ подобными, если в разложениях 11 и 12 размерности групп E_0,E_0^* и E_1,E_1^* совпадают по модулю ω и существует изоморфизм f, описанный выше.

Ясно, что число типов подобия структур не более чем счетно. Осталось показать, что подобные структуры элементарно эквивалентны. Это получается из того, что если взять ультрастепени подобных структур по "хорошему" ультрафильтру, то совпадение размерностей по модулю ω превратится в совпадение.

Укажем непосредственное следствием теоремы 3.

Следствие 4 *(P,s)-стабильность теории любой абелевой группы совпадает с ее (P,s)-суперстабильностью.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 12-01-00460.

Литература:

1. Нурмагамбетов Т.А. P-стабильность полных теорий абелевых групп. // XI Межреспубл. конф. по мат. логике. Тезисы сообщений. – Казань: Изд-во КГУ, 1992. - С. 106.
2. Палютин Е.А. P-суперстабильные абелевы группы. // Вестник Карагандинского университета, Серия математика. – 2013. - № 1(69). - С. 74-80.
3. Палютин Е.А. Число P-обогащений абелевых групп. // Алгебра и логика. – 2013. - Т. 52. - N 2. - С. 255-258.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы т.1, перевод с английского. - Москва: Издательство "Мир", 1974. - 335 с.
5. Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups, Fund.Math. 1955, v.41, pp.203-271.
6. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. / 6-е издание. - Москва: Изд-во ”Физматлит”, 2011. - 357 с.
7. Ziegler M. Model theory of modules, Ann. Pure and Appl. Logic, 1984 v.26, pp.149-213.

Резюме

Работа посвящена элементарным теориям абелевых групп с выделенной подгруппой. Обогащения путем выделения элементарных подсистем называются \$(P,e)\$-обогащениями. Основными результатами данной работы являются полные описания возможных чисел \$(P,e)\$-обогащений и \$(P,s)\$-обогащений полных теорий абелевых групп с выделенным множеством констант.

Ключевые слова: элементарные теории, обогащения теорий, абелевы группы.

Түйіндеме

Жұмыс топ тармақтары айқындалған абелдік топтардың элементарлық теориясына арналған. Элементар жүйе тармақтарын айқындау жолымен байыту \$(P,e)\$-байытулар деп аталады. Бұл жұмыстың негізгі нәтижелері абелдік топтардың толық теорияларының \$(P,e)\$-байытулар мен \$(P,s)\$-байытулардың көп санды тұрақтылары бөліп алынған мүмкін сандарын толық суреттеу болып табылады.

Кілт сөздер: элементарлық теориялар, теориялардың байытылуы, абелдік топтар.

Summary

The workis devoted to theelementary theoriesof Abelian groups withselected subgroup.Expansion by elementary subsystems is called to be $ (P, e) $-expansion. The main the results ofthis work arecomplete descriptions ofpossible numbers $ (P, e) $-expansions and$ (P, s) $-expansionsof complete theoriesof Abelian groupswith a selectedset of constants.

Key words: elementarytheory, expansion of theories, Abelian groups.

УДК 510.673

СЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ МАЛЫХ КВАЗИ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Б.С. БАЙЖАНОВ, доктор физико-математических наук,
А. АЛИБЕК, магистр
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

Структура $\mathfrak{M}$ с определенным на ней отношением линейного порядка ‘$<$’ называется *о-минимальной*, если любое определимое подмножество является объединением конечного числа интервалов и точек. Кроме того есть и иные варианты о-минимальности: слабо о-минимальные и квази о-минимальные структуры.

Упорядоченная структура $\mathfrak{M}$ называется *слабо о-минимальной*, если любое ее определимое подмножество является конечным объединением выпуклых множеств [1]. Структура $\mathfrak{M}$ с порядком является *квази о-минимальной*, если любое ее формульное множество можно представить в виде конечного объединения интервалов и булевых комбинаций $\emptyset$-определимых подмножеств [2].

Теория называется *квази о-минимальной*, если все модели этой теории квази о-минимальны. Полная счетная теория является *малой*, если число всех счетных типов не более чем счетно. Будем говорить, что полная счетная теория обладает *малым числом счетных моделей*, если число ее счетных неизоморфных моделей меньше 2^{ω}.

В данной статье изучаются полные типы и счетные модели малых квази о-минимальных теорий. Всюду далее $\mathfrak{M}$ – счетная насыщенная модель квази о-минимальной теории T.

Для изучения типов будут применяться понятия слабой и почти ортогональности, а также определения социальных и одиночных типов. Но прежде введем понятие окрестности.

Определение 1. *Окрестность* элемента α в типе p – это множество

$V_p(\alpha) = \{\gamma \in p(M) \mid \exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$, существует 2-формула $\phi,\ \gamma_1 < \phi(M, \alpha) < \gamma_2\}$.

Пусть A – произвольное подмножество множества-носителя структуры. Тогда определим:

$$A^{+} = \{\gamma \in M \mid \forall \alpha \in A, \alpha < \gamma\},$$
$$A^{-} = \{\gamma \in M \mid \forall \alpha \in A, \gamma < \alpha\}.$$

Определение 2 [3]. Тип $p \in S_1(A)$, где A – некоторое конечное подмножество структуры, будет называться *одиночным*, если для любого $\alpha \in p(M)$, $|V_p(\alpha)| = 1$, то есть $V_p(\alpha) = \{\alpha\}$.

Тип $p \in S_1(A)$, где A – некоторое подмножество структуры, будет называться *квази одиночным*, если для любого $\alpha \in p(M)$, $V_p(\alpha)$ является $(A \cup \{\alpha\})$-определимым множеством.

Тип $p \in S_1(A)$, где A – некоторое подмножество структуры, будет называться *социальным*, если для любого $\alpha \in p(M)$, $V_p(\alpha)^{+}$ и $V_p(\alpha)^{-}$ не являются определимыми подмножествами модели.

Определение 3 [3]. Рассмотрим для $p \in S_1(T)$, где T – малая квази о-минимальная теория, множество

$$p^c = \{\varphi^c(x) \mid \varphi(x) \in P\}.$$

Здесь φ^c – выпуклая формула следующего вида:

$$\varphi^c(x) = \exists y_1 \, \exists y_2 \, (\varphi(y_1) \wedge \varphi(y_2) \wedge y_1 \leq x \leq y_2).$$

Важным определением в нашей статье является понятие взаимно плотных формул. Для того чтобы ввести его надо дать несколько вводных обозначений.

Пусть $H(x), \Theta(x)$ – 1-формулы, и существует понятие *класса выпуклой эквивалентности* (convex equivalence class):

$$E_{H,\Theta}(x,y) = H(x) \wedge H(y) \wedge \big[x < y \to \forall z \left([x < z < y \wedge \Theta(z)] \to H(z)\right)\big] \wedge$$
$$\wedge \big[y < x \to \forall z \left([y < z < x \wedge \Theta(z)] \to H(z)\right)\big].$$

Определение 4 [3]. Две формулы $\phi(x), \psi(x)$ называются *взаимно плотными* в типе, если для любой формулы $\Theta(x) \in p$, для любых классов $E_{\phi,\Theta}(x,a), E_{\phi,\Theta}(x,b)$, таких что

$$E_{\phi,\Theta}(\mathfrak{M},a) < E_{\phi,\Theta}(\mathfrak{M},b)$$

существует класс $E_{\psi,\Theta}$, такой что

$$E_{\phi,\Theta}(\mathfrak{M},a) < E_{\psi,\Theta}(\mathfrak{M},c) < E_{\phi,\Theta}(\mathfrak{M},b).$$

То же верно и для двух произвольных $E_{\psi,\Theta}$.

Очевидно, что если в малой квази o-минимальной теории есть счетное число взаимно плотных $\emptyset$-определимых формул, то эта теория обладает максимальным числом счетных неизоморфных моделей (2^ω).

Определение 5 [3]. Типы p и $q \in S_1(A)$ будут *слабо-ортогональными*, $p \perp^w q$, если $p(x) \cup q(y)$ – полный два тип над множеством A.

Типы p и $q \in S_1(A)$ будут *почти-ортогональными*, $p \perp^a q$, если не существует -определимая 2-формула $H(x,y)$, такая что

$$\forall \alpha \in p(M), \emptyset \neq H(M,\alpha) \subset V_q(\alpha) \subset q(M).$$

Определение 6 [3]. 2-формула $\phi(x,y)$ называется *квази-следователем* на типе p, если $\forall \alpha \in p(M) \, \exists \beta \in \phi(M,\alpha) \cap p(M)$, такие что

$$\phi(M,\beta) \setminus \phi(M,\alpha) \neq \emptyset,$$

где $\phi(x,y)$ – возрастающая формула, то есть формула, чьи определимые множества сохраняют отношение порядка:

$$\alpha < \beta \to \phi(M,\beta)^+ \subseteq \phi(M,\alpha)^+.$$

Также 2-формула $\phi(x,y)$ называется *квази-следователем* на типе p, если формула $\phi(x,y)$ – не возрастающая, а убывающая, то есть:

$$\alpha < \beta \to \phi(M,\alpha)^- \subseteq \phi(M,\beta)^-.$$

Если $\phi(x,y)$ квази-следователь на типе p, тогда следующая формула тоже является квази-следователем на p:

$$\phi_n(x,y) = \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_{n-1}\big(\phi(y_1,y) \wedge \phi(y_2,y_1) \wedge \ldots \wedge \phi(x,y_{n-1})\big).$$

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема 1. В малой квази o-минимальной теории с малым числом моделей любой тип является квази одиночным.

Или эквивалентно, если в малой квази o-минимальной теории есть социальный тип, то эта теория имеет 2^ω моделей.

Но прежде докажем вспомогательную:

Лемма 2. Для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in p(\mathfrak{M})$, если $V_p(\alpha) < \gamma_1 < V_p(\beta)$ и $V_p(\alpha) < \gamma_2 < V_p(\beta)$, тогда

$$tp^c(\gamma_1|\alpha,\beta) = tp^c(\gamma_2|\alpha,\beta).$$

Поскольку доказательство леммы насыщено формулами, предлагаем вначале ознакомиться с ходом рассуждения.

Предположим, что существует формула $H(x,\alpha,\beta)$, такая что α,β – принадлежат множеству реализаций типа p и $V_p(\alpha) < V_p(\beta)$. Поскольку теория квази о-минимальная, $H(x,\alpha,\beta)$ определяет собой не просто какой-то интервал, а в точности его границу, разделяющую $H(\mathfrak{M},\alpha,\beta)$ от $\neg H(x,\alpha,\beta)$.

Тогда, поскольку окрестности α и β не «допрыгивают» до $H(x,\alpha,\beta)$, мы можем сказать, что существуют две формулы $H_1(x,\alpha,\beta)$ и $H_0(x,\alpha,\beta)$, первая из которых лежит в $H(\mathfrak{M},\alpha,\beta)$, а вторая в $H(\mathfrak{M},\alpha,\beta)$.

Окрестности α и β тоже не «допрыгивают» до $H_1(x,\alpha,\beta)$ и $H_0(x,\alpha,\beta)$ соответственно. Следовательно, можем говорить о существовании соответствующих формул $H_{11}(x,\alpha,\beta)$, $H_{10}(x,\alpha,\beta)$, $H_{01}(x,\alpha,\beta)$ и $H_{00}(x,\alpha,\beta)$.

Мы можем продолжать так и дальше до бесконечности, поскольку классы взаимно плотные. Но в итоге нахождения всех таких формул мы получаем счетное 2-ветвящееся дерево.

Любая его ветвь – совместный тип. А поскольку ветвей 2^{ω}, то и типов будет 2^{ω}. Но это противоречит нашему предположению о том, что теория малая. Получаем противоречие.

Доказательство Леммы 2:

Допустим обратное: есть такие $\gamma_1,\gamma_2 \in p(\mathfrak{M})$, что существует α,β-определимая формула $H(x,\alpha,\beta)$ и $\gamma_1 \in H(\mathfrak{M},\alpha,\beta) < \gamma_2$.

По компактности можно предположить существование формулы $\Theta(x) \in p$, что для любых $\alpha,\beta \in \Theta(\mathfrak{M}), \alpha < \beta$ и если $V_\Theta(\alpha) < V_\Theta(\beta)$ тогда

$$V_\Theta(\alpha) < \gamma_1 < V_\Theta(\beta),$$
$$V_\Theta(\alpha) < \gamma_2 < V_\Theta(\beta).$$

Пусть $k, n_1, n_2 < \omega$ и $n_1 + n_2 < k$. Введем следующее обозначение

$$S_{k,n_1,n_2}(H)(x,y) = \left(x < y \wedge y \notin \phi^k(\mathfrak{M},x)\right) \to \exists z_1 \exists z_2$$
$$\begin{pmatrix} x < z_1 < z_2 < y \wedge z_1 \notin \phi^{n_1}(\mathfrak{M},x) \wedge y \notin \phi^{n_2}(\mathfrak{M},z_2) \wedge z_1 \in H(\mathfrak{M},x,y) \wedge \\ H(\mathfrak{M},x,y) < z_2 \wedge z_2 \notin \phi(\mathfrak{M},z_1) \end{pmatrix}$$

Предположение 1.1. Существуют две непостоянные невозрастающие функции $s_1, s_2 : \omega \to \omega$, такие что

$$\exists m < \omega\ \forall k < m\ \forall \alpha' \forall \beta' \in (\alpha,\beta)_{p(\mathfrak{M})}$$

для них истинно

$$\mathfrak{M} \models S_{k,s_1(k),s_2(k)}(H)(\alpha',\beta').$$

Обозначим через

$$L_0(x,\alpha,\beta) = \neg H(x,\alpha,\beta) \wedge \exists y \left(\phi(x,y) \wedge H(y,\alpha,\beta)\right).$$

По предположению 1.1 мы знаем, что $L_0(\mathfrak{M},\alpha,\beta) \cap p(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$ и

$$L_0(\mathfrak{M},\alpha,\beta) \cap p(\mathfrak{M}) \subset V_p(\gamma_0),$$

где $\gamma_0 \in \left(V_p(\alpha), V_p(\beta)\right)$.

Тогда обозначим:

$$K_0(x,\alpha,\beta) = \exists z\left(H(x,\alpha,z) \wedge L_0(z,\alpha,\beta)\right)$$
$$K_1(x,\alpha,\beta) = \exists z\left(H(x,z,\beta) \wedge L_0(z,\alpha,\beta)\right).$$

$K_0(\mathfrak{M},\alpha,\beta) < V_p(\gamma_0)$, $V_p(\alpha) < K_0(\mathfrak{M},\alpha,\beta)^+$ и $V_p(\gamma_0) < K_1(\mathfrak{M},\alpha,\beta)^+$, $K_1(\mathfrak{M},\alpha,\beta) < V_p(\beta)$.

Обозначим следующим образом:

$$L'_0(x) = \neg K_0(x,\alpha,\beta) \wedge \exists y\left(K_0(y,\alpha,\beta) \wedge \phi(x,y)\right),$$
$$L'_1(x) = \neg K_1(x,\alpha,\beta) \wedge \exists y\left(K_1(y,\alpha,\beta) \wedge \phi(x,y)\right)$$

Тогда по предположению $L'_0(\mathfrak{M},\alpha,\beta) \cap p(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$ и $L'_0(\mathfrak{M},\alpha,\beta) \cap p(\mathfrak{M}) \subset V_p(\gamma'_0)$,

где $\gamma'_0 \in \left(V_p(\alpha), V_p(\gamma_0)\right)$; $L'_1(\mathfrak{M},\alpha,\beta) \cap p(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$ и $L'_1(\mathfrak{M},\alpha,\beta) \cap p(\mathfrak{M}) \subset V_p(\gamma'_1)$,

где $\gamma'_1 \in \left(V_p(\alpha), V_p(\gamma_1)\right)$.

Тогда обозначим:

$$K_{00}(x,\alpha,\beta) = \exists z(H(x,\alpha,z) \wedge K_0(z,\alpha,\beta))$$
$$K_{01}(x,\alpha,\beta) = \exists z_1 \exists z_2(H(x,z_1,z_2) \wedge K_0(z_1,\alpha,\beta) \wedge L_0(z_2,\alpha,\beta))$$
$$K_{10}(x,\alpha,\beta) = \exists z_1 \exists z_2(H(x,z_1,z_2) \wedge L_0(z_1,\alpha,\beta) \wedge L_1(z_2,\alpha,\beta))$$
$$K_{11}(x,\alpha,\beta) = \exists z\big(H(x,z,\beta) \wedge L_1(z,\alpha,\beta)\big).$$

Повторяя это рассуждение счетное число раз мы получим счетное число формул, составляющих несчетное число типов. А это значит, что теория не малая. Противоречие.

Исходя из этой леммы мы можем перейти к доказательству главной теоремы:

Доказательство Теоремы 1:

Допустим T – малая квази о-минимальная теория и есть тип $p \in S_1(T)$, который является социальным. Рассмотрим тогда произвольный элемент реализации этого типа – α и его окрестность внутри типа p. Это множество элементов, которые определяются формульно относительно α. Это формульное подмножество может быть представлено в виде объединения интервалов и булевых комбинаций $\emptyset$-определимых подмножеств M (следует из определения квази о-минимальной теории).

Элементы и их окрестности лежат плотно в структуре, и по Лемме 2 между ними нет формулы, которая бы формульно отделяла их друг от друга. Следовательно, между ними можно ввести неглавные типы, которые можем либо опускать, либо реализовывать. В этом случае счетное число типов порождает континуум моделей.

В качестве наглядного примера можно рассмотреть квази о-минимальную теорию $\langle \mathbb{Z}, =, < \rangle$. В ней окрестностями будут копии$\mathbb{Z}$, между которыми нет отделяющих формул, но где мы можем спокойно вводить неглавные типы.

Исходя из этого, малая упорядоченная теория, обладающая социальным типом, имеет 2^{ω} моделей, а это противоречит условию малой теории. Таким образом, в малой квази о-минимальной теории все типы должны быть квази-одиночными.

Литература:

1. Mayer, L.L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // Journal of Symbolic Logic. – 1988. - #53. – C. 146-159.

2. Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Generic queries over quasi o-minimal domains // Logical foundations of computer science Lecture Notes in Computer Science 1234. – Springer Verlag. – 1997. – C. 21-32.

3. Baizhanov, B.S., Hodges W. Countable ordered models with small theories // Preprint. – 2001.

Резюме

Данная статья посвящена изучению счетных моделей малых квази о-минимальных теорий. Квази о-минимальные теории – теории с отношением порядка, в чьих структурах определимые подмножества являются конечными объединениями интервалов и булевых комбинаций пусто-определимых формул. Исследование счетных моделей проводится на основе изучения типов и множеств их реализаций в данном классе малых теорий. Теория называется малой, если число счетных типов не более чем счетное.

Ключевые слова: теория моделей, квази о-минимальные структуры, типы, малые теории.

Түйіндеме

Бұл мақала кіші квази о-минималды теориялардағы саналымды модельдерді зерттеуге арналады. Квази о-минималды теорияларда құрамындағы анықталған көпмүшелер – интервалдар мен булевті комбинацияларының бос анықталған формуларының қосылуынан шыққан реттік қатынас теориясы. Саналымды модельдерді зерттеу типтер мен көпмүшелердің реализациялауын негізге ала отырып жүреді. Егер саналымды типтер саны шектеулі болса – бұл кіші теория деп аталады.

Кілт сөздер: модельдерін теориясы, квази о-минималды құрылымдар, типтар, кіші теориялар.

Summary

This paper is dedicated to the study of countable models of quasi o-minimal theories. Quasi o-minimal theories are theories with the order relation and the definable subsets of their structures can be represented as the finite union of intervals and Boolean combinations of empty set-defined formulas. The study of countable models is based on the research of types and their definable sets in the class of small theories. We will call theories small, if they have at most a countable number of countable types.

Key words: model theory, quasi o-minimal structures, types, small theories.

УДК 513.946

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г.Б.БАКАНОВ, доктор физико-математических наук, профессор
А.К.КОНЫС, кандидат физико-математических наук, доцент,
Т.Б.ДИЛЬМАН, кандидат физико-математических наук, доцент
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, Республика Казахстан

Задачи интегральной геометрии состоят в нахождении функции, определенной на некотором многообразии, через ее интегралы по некоторому семейству подмногообразий меньшей размерности.

Новый период развития интегральной геометрии начался в 1966 году. Впервые М.М.Лаврентьевым и В.Г.Романовым [1],[2] было показано, что ряд обратных задач для гиперболических уравнений сводятся к задачам интегральной геометрии. В дальнейшем теория задач интегральной геометрии получила развитие в работах Ю.Е.Аниконова, А.Л.Бухгейма, И.Н.Бернштейна, М.Л.Гервера, В.Р.Кирейтова, Р.Г.Мухометова, Д.С.Аниконова, В.А.Шарафутдинова и других авторов.

Рассматривается задача интегральной геометрии для семейства не гладких кривых, инвариантных относительно горизонтального сдвига [3]

$$f(\xi,\eta)=\int_{L(\xi,\eta)}G(x-\xi,\eta)u(x,y)dx+\iint_{R(\xi,\eta)}K(x-\xi,\eta,y)u(x,y)dxdy\,,$$

где $f(\xi,\eta)$, $G(x-\xi,\eta)$, $K(x-\xi,\eta,y)$ - *заданные функции,* $L(\xi,\eta)$ - заданное семейство кривых $x=\xi+\varphi_k(y,\eta), 0\le y\le\eta\le H, k=1{,}2$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases}\varphi_k(y,\eta)\epsilon C^2([0,H]\times[0,H]), k=1{,}2,\\ \quad \varphi'_{1y}(y,\eta)>0,\ \varphi'_{2y}(y,\eta)<0,\end{cases} \qquad (*)$$

$R(\xi,\eta)$ - области, ограниченные кривыми $L(\xi,\eta)$ и осью $y=0$.

Теорема. *Если $G(x-\xi,\eta)$ - нерерывно дифференцируема по всем переменным и $G(0,\eta)\neq 0$, $K(x-\xi,\eta,y)$ непрерывна вместе с производными по η, то решение рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в классе непрерывных финитных функции.*

Пусть

$$M = \left\{ f(\xi,\eta) \in L_2(D) \colon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp[2C_0(1+|\lambda|)H] \left|\hat{f}'_\eta(\lambda,\eta)\right|^2 d\lambda \le C_1^2, \right.$$

$\left. \int_{-\infty}^{+\infty} exp[2C_0(1+|\lambda|)H] \left|\hat{f}'_\eta(\lambda,\eta)\right|^2 C_0(1+|\lambda|)^k d\lambda < +\infty, k=1,2, \right\}$,

$C_0, C_1 = const.$

Теорема. *Если* $f(\xi,\eta) \in M$, *то для решения данной задачи интегральной геометрии справедлива оценка устойчивости*

$\|u(x,\eta)\|_{L_2(D)} \le C\left\{\int_0^H \|f(x,\eta)\|_1^{4(1-\frac{\eta}{H})} d\eta\right\}^{\frac{1}{4}}$,

где

$\|f(x,\eta)\|_1^2 = \max\limits_{0 \le \eta \le H} \left\|f'_\eta(x,\eta)\right\|^2_{L_2(-\infty,+\infty)}$,

$C = \left\{\int_0^H C_1^{\frac{4\eta}{H}} d\eta\right\}^{\frac{1}{4}}$.

Рассматривается задача интегральной геометрии с возмущением для семейства не гладких кривых, инвариантных относительно горизонтального сдвига, удовлетворяющих условию (*):

$$f(\xi,\eta) = \int_{L(\xi,\eta)} G(x-\xi,\eta)u(x,y)dx + \iint_{R(\xi,\eta)} K(\xi,\eta,x,y)u(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Теорема. *Если* $G(x-\xi,\eta)$, $K(\xi,\eta,x,y)$ - *нерывно дифференцируемые функции, причем* $G(0,\eta) \ne 0$,

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\xi} \left[\frac{\partial}{\partial\eta} \int\limits_{\xi+\varphi_1(y,\eta)}^{\xi+\varphi_2(y,\eta)} K(\xi,\eta,x,y)e^{-i\tau x}dx \right] d\xi \right| \le$$

$\le e^{-\tau^2} e^{-C_0(1+|\lambda|)H}(1+|\lambda|)^{-1}$, $C_0 = const.$

тогда решение уравнения (1) единственно в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функции.

Рассмотрена задача восстановления функции через интегралы от нее по семейству кривых типа парабол инвариантных относительно вертикального сдвига [4]

$f(x,y,z,\alpha) = \int_0^{r(x,y,z,0,\alpha)} \sum_{k=1}^2 u(\xi_k,\eta_k,\zeta)dr$,

где

$$\xi = x + (-1)^k\sqrt{z-\zeta}\left[1+\varphi(x,y,\sqrt{z-\zeta},\alpha)\right]cos\alpha,$$

$$\eta_k = y + (-1)^k\sqrt{z-\zeta}\left[1+\varphi(x,y,\sqrt{z-\zeta},\alpha)\right]sin\alpha,$$
$$k=1,2;\ 0 \le \zeta \le z;$$

$r(x,y,z,0,\alpha) = \sqrt{z-\zeta}\left[1+\varphi(x,y,\sqrt{z-\zeta},\alpha)\right]$ – длина проекции кривой из заданного семейства на плоскости $z=0$.

Теорема. *Пусть функция* $\varphi(x,y,\tau,\alpha)$ *трижды непрерывно дифференцируема по всем переменным, четна по переменной* τ *и удовлетворяет условиям*

$\varphi(x,y,0,\alpha) = 0$,

$$\|\tau'\varphi(x,y,\tau',\alpha) - \tau''\varphi(x,y,\tau'',\alpha)\|_C \le q\|\tau'-\tau''\|_C, q<1,$$

тогда решение рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в достаточно малой области в классе финитных функций $u(x,y,z)$ *с носителем* $\Omega = \{(x,y)\} \subset R^2$, *принадлежащих* $L_2(\Omega)$ *по* x,y, *а по переменной* z *удовлетворяющей условию* $|u(x,y,z)| \le Me^{az}$, *если* $z \geq 0$; $u(x,y,z) \equiv 0$, *если* $z < 0$, $M = const$, a - *показатель степени роста функции* $u(x,y,z)$ *по* z.

Исследуется устойчивость задачи интегральной геометрии

$v(\xi,\eta) = \int_{L(\xi,\eta)} u(x,y)dy,$

где $L(\xi,\eta)$ - семейство ветвей парабол $x = \xi + (\eta - y)^2, y \leq \eta$. Предполагается, что функция $u(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема и финитна в области $\overline{D} = \{(x,y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, a \geq 0, b \geq 0\}$.

Теорема. *На множестве корректности*

$M = \left\{u(x,y): \|u\|_{W_2^1} \leq C_0, \forall y \in [0,b]\ \int_0^a u(x,y)dx = 0\right\}$ *справедлива оценка устойчивости*

$\|u\|_{L_2(\overline{D})} \leq (C_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}})^{\frac{2}{3}} \|v\|_{L_2(\overline{D})}^{\frac{2}{3}}.$

Для указанной задачи интегральной геометрии оценка условной устойчивости получена и в более общем случае, когда рассматриваются кривые типа парабол $x = \xi + (\eta - y)^2 + (\eta - y)^3\varphi(\eta - y), y \leq \eta, \varphi(t) \in C^1[0;H]$. Предполагается, что функция $u(x,y)$ непрерывная финитная функция в области $D = \{(x,y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq H, 0 < H < +\infty\}$, $v(\xi,\eta)$ непрерывна по ξ, непрерывно дифференцируема по η в области D.

Теорема. *Если* $u \in \mathfrak{M} = \{u: \|u\|_{t+t_1,0} \leq M\}, t_1 > 0$, *то справедлива оценка устойчивости*

$$\|u\|_{t,0} \leq \min_N \left[(1 + N^2)^{-\frac{t_1}{2}} M + \varphi(N)\|v\|_{t,1}\right],$$

$$\|u\|_{t,0} \leq w(\|v\|_{t,1}), w(\varepsilon) \sim \frac{1}{ln\frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon \to 0.$$

Исследуется устойчивость пространственной задачи интегральной геометрии с не гладкими кривыми [5]

$f(x,y,z,\alpha) = \int_{\Gamma(x,y,z,\alpha)} u(\xi,\eta,\zeta)ds,$

где семейство кривых $\Gamma(x,y,z,\alpha)$ определяется

$$\begin{cases} \xi_k = x + (-1)^k \tau cos\alpha, \\ \eta_k = y + (-1)^k \tau sin\alpha, \\ \zeta = z - \sqrt{\tau}, 0 \leq \tau \leq z^2, 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \end{cases}$$

Теорема. *Если* $\forall \alpha \epsilon [0,2\pi]$, $\forall (x,y,z) \in D = \{(x,y,z): (x,y) \in R^2, 0 \leq z \leq h\}$, $f(x,y,z,\alpha) \in L_2(D), f(x,y,z,\alpha) \in C[0;2\pi]$, *то справедлива оценка*

$\|u\|_{t,0} \leq C\|f\|_{t,1}.$

Пусть D - плоская, ограниченная, односвязная область, имеющая гладкую границу Г:

$$x = \xi(z), y = \eta(z), z \in [0,l], \xi(0) = \xi(l), \eta(0) = \eta(l), \quad (2)$$

где z - длина кривой Г. В $\overline{D}$ заданы гладкие кривые уравнениями

$$x = \varphi(x_0, y_0, \theta, s), \qquad y = \psi(x_0, y_0, \theta, s), \quad (3)$$

где (x_0, y_0)- точка, из которой выходит кривая под углом θ, переменный параметр s есть длина дуги. Множество определения функций φ и ψ есть множество $T = \{(x_0, y_0, \theta, s)/\ (x_0, y_0) \in \overline{D}, \theta \in [0,2\pi],\ s \in [0, \tilde{l}(x_0, y_0, \theta)]\}$, где $\tilde{l}(x_0, y_0)$, θ)- длина части кривой, выходящей из точки (x_0, y_0) под углом θ и лежащей между (x_0, y_0) и точкой пересечения кривой с границей.

Пусть множество кривых (3) будет таково, что его можно рассматривать как двухпараметрическое семейство кривых $K(\gamma, z)$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) через любые две различные точки из $\overline{D}$ проходит единственная кривая $K(\gamma, z)$; каждая кривая семейства $K(\gamma, z)$ пересекает Г в точках $(\xi(z), \eta(z))$ и $(\xi(\gamma), \eta(\gamma))$, другие точки не лежат па Г; длины всех кривых равномерно ограничены;

б) $\varphi \in C^3(T), \psi \in C^3(T)$, причем все производные этих функций равномерно ограничены в T;

в) $\frac{1}{s}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(\theta,s)} \geq c_1 > 0$,

где c_1 - постоянная,

г) $\varphi(x,y,0,s) = \varphi(x,y,2\pi,s)$, $\psi(x,y,0,s) = \psi(x,y,2\pi,s)$,

аналогичные равенства справедливы также для производных от этих функций до третьего порядка включительно.

Пусть $u(x,y) \in C^2(\overline{D})$ и

$$V(\gamma,z) = \int_{K(\gamma,z)} u(x,y)ds \qquad (4)$$

Задача интегральной геометрии (4) заключается в отыскании функции $u(x,y)$ в области $\overline{D}$ по данным кривым $K(\gamma,z)$ и функции $V(\gamma,z)$.

Весьма общий результат по единственности и оценкам устойчивости для задачи интегральной геометрии (4) был получен Р.Г. Мухометовым. В его работе было показано, что если семейство кривых $K(\gamma,z)$ удовлетворяет условиям а)-г), то задача (4) эквивалентна следующей граничной задаче:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial W}{\partial y}\sin\theta\right) = 0, \ (x,y,z) \in \Omega_1 \qquad (5)$$

$$W(\xi(\gamma),\eta(\gamma),z) = V(\gamma,z), V(z,z) = 0; \ \gamma,z \in [0,l] \qquad (6)$$

где $\Omega_1 = \Omega\backslash\{(\xi(z),\eta(z),z): z \in [0,l]\}$, $\Omega = \overline{D} \times [0,l]$, $K(x,y,z)$ - часть кривой из семейства $K(\gamma,z)$, соединяющая точки $(x,y) \in \overline{D}$ и $\big(\xi(z),\eta(z)\big)$,

$$W(x,y,z) = \int_{K(x,y,z)} u(x,y)ds \qquad (7)$$

Поставим следующую разностную задачу (зависящую от параметра z**):** найти функции $\Phi_{i,j}(z), u_{i,j}$, которые удовлетворяют уравнению

$$\Phi_{\overset{0}{x}} A + \Phi_{\overset{0}{y}} B = u_{i,j}, \quad (a_1 + ih_1, a_2 + jh_2) \in D_h, \ z \in [0,l] \qquad (8)$$

и граничному условию

$$\Phi_{i,j}(z) = \mathrm{F}_{i,j}(z), \quad (a_1 + ih_1, a_2 + jh_2) \in \Delta_h^{\varepsilon}, \ z \in [0,l] \qquad (9)$$

Здесь $A = cos\,\theta_{i,j}(z)$, $B = sin\,\theta_{i,j}(z)$, $\theta_{i,j}(z) = \theta(a_1 + ih_1, a_2 + jh_2, z)$.

Отметим, что в этой постановке информация о решении задается не только на границе Г, но и в некоторой ее ε -окрестности, что связано с наличием особенностей типа $[(x-\xi(z))^2 + (y - \eta(z))^2]^{-1/2}$ у производных $\theta_z, W_{xz}, W_{yz}, W_{xy}$ в окрестности любой точки вида $(\xi(z),\eta(z),z)$ [6],[7].

Теорема. *Предположим, что решение задачи* (8) - (9) *существует. Пусть при всех* $(x_i, y_j) \in D_h$ *функции*

$$\Phi_{i,j}(z) \in \mathrm{C}^1[0,l], \ \Phi_{i,j}(0) = \Phi_{i,j}(l),$$
$$F_{i,j}(z) \in \mathrm{C}^1[0,l], \ F_{i,j}(0) = F_{i,j}(l),$$

а функция $\theta_{i,j}(z)$ *удовлетворяет условиям*

$$\theta_{i,j}(0) = \theta_{i,j}(l), \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} \geq 0.$$

Тогда при всех $N_j > 9, j = 1,2$ *имеет место оценка*

$$\sum_{D_h^{\varepsilon}} u_{i,j}^2 h_1 h_2 \leq c_2 \int_0^l \sum_{\Delta_h^{\varepsilon}} \left(F_{\overset{0}{x}}^2 h_1 + F_{\overset{0}{y}}^2 h_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 (h_1 + h_2) \right) dz,$$

в которой c_2*- некоторая положительная постоянная.*

Далее мы рассматриваем обобщение задачи (4):

$$V(\gamma,z) = \int_{K(\gamma,z)} u(x,y)\rho(x,y,\gamma,z)ds, \qquad (10)$$

где $\rho(x,y,\gamma,z)$- некоторая известная функция.

Введем функцию $W(x,y,z) = \int_{\widetilde{K}(x,y,z)} u(x_1,y_1)\rho(x,y,z)ds$, где $\widetilde{K}(x,y,z)$ - часть кривой из семейства $K(\gamma,z)$, соединяющая точки $(x,y) \in \overline{D}$ *и* $(\xi(z),\eta(z),z)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)=0,\quad (x,y,z)\in\Omega_1. \qquad (11)$$

Из данных задачи получаем для W граничное условие

$$W(\xi(\gamma),\eta(\gamma),z)=V(\gamma,z),\quad V(z,z)=0,\quad \gamma,z\in[0,l]. \qquad (12)$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что коэффициенты и решение задачи (11) - (12) обладают следующими свойствами:

$$W(x,y,z)\in C^3(\Omega^\varepsilon),\qquad \theta(x,y,z)\in C^2(\Omega^\varepsilon),$$

$$\rho(x,y,z)\in C^2(\Omega),\qquad \rho(x,y,z)>d>0,\ \frac{\partial\theta}{\partial z}>\left|\frac{\rho_z}{\rho}\right|.$$

Поставим следующую разностную задачу (зависящую от параметра z): найти функции $\Phi_{\mathrm{i,j}}(\mathrm{z}), u_{i,j}$, которые удовлетворяют уравнению

$$\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{A}{c}+\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{B}{C}=u_{i,j},\quad (a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in D_h,\ \ z\in[0,l] \quad (13)$$

и граничному условию

$$\Phi_{i,j}(z)=F_{i,j}(z),\quad (a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in\Delta_h^\varepsilon,\quad z\in[0,l]. \quad (14)$$

Здесь $A=\cos\theta_{i,j}(z),\ B=\sin\theta_{i,j}(z),\ \theta_{i,j}(z)=\theta(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z),\ C=\rho\Big(a_1+$ *$ih1$, $a2+jh2$.*

Для поставленной задачи (13) - (14) получена оценка устойчивости и доказана следующая теорема единственности [8],[9]:

Теорема. Предположим, что решение задачи (13) - (14) существует. Пусть при всех $(x_i,y_j)\in D_h$ функция

$$\Phi_{i,j}(z)\in C^1[0,l],\ \Phi_{i,j}(0)=\Phi_{i,j}(l),$$
$$\mathrm{F}_{i,j}(z)\in C^1[0,l],\ \mathrm{F}_{i,j}(0)=\mathrm{F}_{i,j}(l),$$

а функции $C=\rho(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z),\ \theta_{i,j}(z),$ удовлетворяют условиям

$$\theta_{i,j}(0)=\theta_{i,j}(l),\quad \frac{\partial\theta}{\partial z}\ge\left|\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\right|$$

Тогда при всех $N_j>9,\ j=1{,}2$ имеет место оценка

$$\sum_{D_h^\varepsilon}u_{i,j}^2h_1h_2\le c_4\int_0^l\sum_{\Delta_h^\varepsilon}\left(F_{\overset{0}{x}}^2h_1+F_{\overset{0}{y}}^2h_2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2(h_1+h_2)\right)dz,$$

в которой c_4 зависит от функции $\rho(x,y,z)$ и семейства кривых $K(\gamma,z)$.

Отметим, что при более сильных априорных предположениях можно получить оценки условной устойчивости конечно-разностных аналогов задач интегральной геометрии [10].

Поставим разностную задачу: найти функцию $\Phi_{i,j}^k$, удовлетворяющую следующим соотношениям

$$\left[\Phi_{\overset{0}{x}}A+\Phi_{\overset{0}{y}}B\right]_z=0,\quad (a_1+ih_1,a_2+jh_2,kh_3)\in\Omega_h^\varepsilon, \qquad (15)$$

$$\Phi_{i,j}^k=F_{i,j}^k,\quad (a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in\Delta_h^\varepsilon,\ \ k=\overline{1,N_3-1}, \qquad (16)$$

$$\Phi_{i,j}^0=\Phi_{i,j}^{N_3},\quad (a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in D_h^\varepsilon. \qquad (17)$$

Здесь $A=\cos\theta_{i,j}^k, B=\sin\theta_{i,j}^k, \theta_{i,j}^k=\theta(a_1+ih_1,a_2+jh_2,kh_3)$.

Результатом исследования задачи (15) - (17) является следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что решение задачи* (15) - (17) *существует и кроме того*

$$\left|\Phi_{\overset{0}{x}z}\right|\le c_5,\qquad \left|\Phi_{\overset{0}{y}z}\right|\le c_5,$$

где c_5 - постоянная. Пусть функция $\theta(x,y,z)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} \geq 0.$$

Тогда при всех $N_j > 9, j = 1,2,\ N_3 > Pl/\pi$ *имеет место оценка*

$$\sum_{\Omega_h^\varepsilon} \frac{M}{2}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}^2 + \Phi_{\overset{0}{y}}^2\right) h_1 h_2 h_3 \leq c_6 \sum_{\Delta_h^\varepsilon}\left(F_{\overset{0}{x}}^2 h_1 h_3 + F_{\overset{0}{y}}^2 h_2 h_3 + F_z^2 h_3 (h_1 + h_2)\right) + c_5 h_3^2.$$

Здесь c_6 - *некоторая положительная постоянная, не зависящая от* h_j, $h = 1,2,3$,

$$M = M_{i,j}^k = (AB_z - A_z B) \geq 0, \quad \mathrm{p} = \left\|\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{z}}\right\|_{C(\Omega^\varepsilon)}$$

Рассмотрим теперь конечно-разностный аналог следующей граничной задачи:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\sin\theta}{\rho}\right) = 0, \qquad (x, y, z) \in \Omega_1 \tag{18}$$

$$W(\xi(\gamma), \eta(\gamma), z) = V(\gamma, z), \quad V(z, z) = 0, \quad \gamma, z \in [0, l]. \tag{19}$$

Предположим, что коэффициенты и решение задачи (18) - (19) обладают следующими свойствами:

$$W(x, y, z) \in C^3(\Omega^\varepsilon), \quad \theta(x, y, z) \in C^2(\Omega^\varepsilon), \quad \rho(x, y, z) \in C^2(\Omega),$$

$$\rho(x, y, z) > d > 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{z}} > \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{z}}\right|.$$

Поставим разностную задачу: найти функцию $\Phi_{i,j}^k$ удовлетворяющую следующим соотношениям

$$\left[\Phi_{\overset{0}{x}} \frac{A}{C} + \Phi_{\overset{0}{y}} \frac{B}{C}\right]_z = 0, \quad (a_1 + ih_1, a_2 + jh_2, kh_3) \in \Omega_h^\varepsilon, \tag{20}$$

$$\Phi_{i,j}^k = \mathrm{F}_{i,j}^k, \quad (a_1 + ih_1, a_2 + jh_2) \in \Delta_h^\varepsilon, \ k = \overline{1, N_3 - 1}, \tag{21}$$

$$\Phi_{i,j}^0 = \Phi_{i,j}^{N_3}, \quad (a_1 + ih_1, a_2 + jh_2) \in D_h^\varepsilon, \tag{22}$$

где

$$A = \cos\theta_{i,j}^k, \ B = \sin\theta_{i,j}^k, \ \theta_{i,j}^k = \theta(a_1 + ih_1, a_2 + jh_2, kh_3),$$
$$C = \rho_{i,j}^k = \rho(a_1 + ih_1, a_2 + jh_2, kh_3).$$

Для поставленной задачи (20) - (22) доказана следующая

Теорема. *Предположим, что решение задачи* (20) - (22) *существует и кроме того*

$$\left|\boldsymbol{\Phi}_{\overset{0}{xz}}\right| \leq \boldsymbol{c_5}, \quad \left|\boldsymbol{\Phi}_{\overset{0}{yz}}\right| \leq \boldsymbol{c_5},$$

$$(\boldsymbol{AB_z - A_z B}) - \left|\frac{C_z}{C}\right| \geq \boldsymbol{\beta} > 0 \ \ \textit{при всех} \ \ \boldsymbol{N_j}, \ \ \boldsymbol{j = 1, 2, 3}.$$

Тогда существует, положительная постоянная $\boldsymbol{P}$ *такая, что при всех*
$\boldsymbol{N_j > P}$, $\boldsymbol{j = 1, 2, 3}$ *имеет место оценка*

$$\sum_{\Omega_h^\varepsilon}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}^2 + \Phi_{\overset{0}{y}}^2\right) h_1 h_2 h_3 \leq c_8 \sum_{\Delta_h^\varepsilon}\left(F_{\overset{0}{x}}^2 h_1 h_3 + F_{\overset{0}{y}}^2 h_2 h_3 + F_z^2 h_3 (h_1 + h_2)\right) + c_5 h_3^2.$$

в которой $\boldsymbol{c_8}$ *зависит от. функции* $\boldsymbol{\rho(x, y, z)}$ *и семейства кривых* $\boldsymbol{K(\gamma, z)}$.

Первыми работами, посвященными исследованиям параболических уравнений с меняющимся направлением времени вида $\boldsymbol{U_t = L(u)}$, когда квадратичная форма эллиптического оператора $\boldsymbol{L}$ меняет знак при переходе через многообразие, лежащее в области определения решения, были работы М. Жевре (Gevrey M., 1913-1914). В дальнейшем линейные и нелинейные уравнения такого вида исследовали в своих работах С.А.Терсенов [11], В.Н.Врагов, Н.Н.Яненко, В.А.Новиков, Н.А.Ларькин, И.Е.Егоров, O.Arena, C.D.Pagani, А.А.Керефов, Т.И.Зеленяк, А.Г.Подгаев, А.И.Кожанов и другие. Впоследствии было выяснено, что такие уравнения входят в так называемый класс уравнений переменного типа [12].

Разрешимость первой и второй краевых задач для модельных уравнений вида

$$U_t = Sgn\{(1-x)(2-x)\}U_{xx}$$

в области $Q = (0 < x < 3) \times (0 < t < T)$,

$$U_t = Sgn\{\prod_{j=1}^{n-1} (j-x)\}U_{xx}$$

в области $Q = (0 < x < n) \times (0 < t < T), n \geq 4 -$ любое, в пространстве функции $H_x^{2l+\beta,\ l+\beta/2}{}_t(Q_i)$, $l \geq 0$ –целое, $0 < \beta < \frac{1}{2}$, была исследована А.К.Конысовым [13]. С применением методов теории потенциала эти задачи редуцируются к системе сингулярных интегральных уравнений нормального типа с ядром Коши, для которой в случае значения индекса $\varkappa = -1$ были получены соответственно $4l$ и $2l(n-1)$ условий, необходимые и достаточные для существования искомых решений из пространства $H_x^{2l+\beta,}\ {}_t^{l+\beta/2}$.

Также исследованы уравнения параболистического типа с меняющимся направлением времени

$$Sgn\, x_n \times U_t - \Delta U = f_1(x,t),$$

и

$$Sgn\, x_n \times U_t - \Delta U + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a_i} \times U_{x_i} + \lambda U = f_2(x,t)$$

в области $Q = \Omega \times (0 < t < T)$ из пространства E_{n+1}, внутри которой на гиперплоскости S_0 они меняют направление времени. Для указанных уравнений обобщенные решения отыскиваются из пространства $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q)$, существование которых доказывается методом эллиптической ε –регуляризации, т.е. каждое решение будет получено как предел при $\varepsilon \to 0$ решения соответствующей задачи Дирихле в области Q для регуляризованного строго эллиптического уравнения

$$-\varepsilon \times U_{\varepsilon tt} + LU_\varepsilon = f_i(x,t), \qquad \varepsilon > 0, \qquad i = 1,2,$$

с граничным условием

$$U_\varepsilon(x,t)|_{\,\partial Q} = 0.$$

Для обеспечения предельного перехода получены нужные априорные оценки;

А.К.Конысовым также исследована разрешимость первой краевой задачи для двухвременного ультрапараболического уравнения с переменой направления времени (вектора):

$$\lambda_1 \frac{\partial U}{\partial t_1} + \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial t_2} \equiv \partial_\lambda U = Sgn\{(1-x)(2-x)\}U_{xx},$$

где $\partial_\lambda U = (\lambda_1\, grad_t U)$ –производная по направлению вектора

$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2), |\bar{\lambda}| = 1, \lambda_j \geq 0$, взятая вдоль характеристики. В этом случае решение уравнения также ищется из класса $H_x^{2l+\beta,\ l+\beta/2}{}_\lambda(Q\,{}^i_T)$ в параллелепипеде

$$Q_T = G_T \times (0 < x < 3), l \geq 1, \qquad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \qquad i = \overline{1,3}.$$

Разрешимость поставленной задачи обеспечивается путем сведения системы интегральных уравнений с обобщенными операторами Абеля к Фредгольмовым интегральным уравнениям второго рода, при котором будут получены $4l$ необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости поставленной задачи [14].

Для рассмотренных выше задач корректность обеспечивается дополнительными условиями склеивания решения внутри области и применением теории сингулярных интегральных уравнений в случае отрицательного индекса задачи ($\varkappa = -1$) [15].

Литература:

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – Москва: Наука, 1980. – 286 с.
2. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264 с.
3. Дильманов Т.Б. Теорема единственности решения одной задачи интегральной геометрии //

Некорректные математические задачи и проблемы геофизики.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979.- С. 66-70.
4. Дильманов Т.Б. Об условной корректности одной задачи интегральной геометрии // Вопросы корректности задач математической физики и анализа.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. - С. 52-60.
5. Дильманов Т.Б. Об одной задачи интегральной геометрии в трехмерном пространстве // Вопросы корректности и методы исследования обратных задач.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986.- С. 71-75.
6. Кабанихин С.И. Проекционно – разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений.-Новосибирск: Наука, 1988. -167с.
7. Kabanikhin S.I. and Bakanov G.B. On the stability of a finite-difference analogue of a two-dimensional problem of integral geometry // American Mathematical Society, 1987. –Vol. 35, № 2. – p. 16-19.
8. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. and Bakanov G.B. Investigation of a differential-difference analogue of a three-dimensional problem in integral geometry // American Mathematical Society, 1990. –Vol. 41, № 2. –P.306-309.
9. Kabanikhin S.I. and Bakanov G.B. On the Stability Estimation of Finite-Difference and Differential-Difference Analogues of a Two-Dimensional Integral Geometry Problem // Computerized Tomography. Proceedings of the Fourth International Symposium.-VSP, Utrecht, The Netherlands, 1995. –p.246-258.
10. Баканов Г.Б. Методы решения конечно – разностных обратных задач теории распространения волн. –Кызылорда: КГУ, 2001.-128с.
11. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. – Новосибирск: Наука, 1985.-104 с.
12. Ларкин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. – Новосибирск: Наука, 1983.-270 с.
13. Конысов А.К. Первая краевая задача для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. – Новосибирск, 1984. -26 с. (Препринт/АН СССР. Сиб.отделение. Инст-т математики: №79).
14. Конысов А.К. О первой краевой задаче для ультрапараболического уравнения с переменой направления времени. /Кызылорд.гуманит.ун-т. – Кызылорда, 1997. – 16 с. Депонир. в КазгосИНТИ 10.02.97, №7431-К 97..
15. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. -512с.

Резюме

В работе рассматриваются задачи интегральной геометрии для семейства кривых и краевые задачи для параболических уравнений. Получены теоремы единственности решения задач интегральной геометрии, необходимые и достаточные условия существования решения краевых задач для некоторых параболических уравнений.

Ключевые слова: интегральная геометрия, краевые задачи, корректность.

Түйіндеме

Жұмыста қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия есептері және параболалық теңдеулер үшін шеттік есептер қарастырылады. Интегралдық геометрия есептерінің шешімінің жалғыздығы туралы теоремалар, параболалық теңдеулер үшін қойылған шеттік есептердің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Кілт сөздер: интегралдық геометрия, шеттік есептер, есептің корректілігі.

Summary

We consider the integral geometry problems for the family of curves and the boundary problems for parabolic equations. We have obtained the uniqueness theorem for solving of integral geometry

problems, the necessary and sufficient condition of unique solvability of boundary problems for some parabolic equations.

Key words: integral geometry, boundary problems, correctness.

УДК 517.95

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г.И. БИЖАНОВА, доктор физико-математических наук, профессор
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

Математическое моделирование физических процессов таких, как плавление, кристаллизация, испарение вещества, фильтрация жидкостей и газов в пористых телах, диффузия жидкостей, приводит к задачам со свободными (неизвестными) границами для различных уравнений с частными производными. В связи с этим, они широко применяются в металлургии, теории сварки, горения, вулканологии, геологии, геотермии, механике, мелиорации, в теории фильтрации, в том числе при изучении процессов добычи и транспортировки нефти, в биологии. С другой стороны, задачи со свободными границами являются естественными нелинейными задачами, очень содержательными в математическом плане, они порождают линейные неклассические задачи новых типов (нерегулярные, условно - корректные, сингулярно возмущенные), которые не вкладываются в общую теорию задач для уравнений с частными производными. Ими занимались и занимаются многие математики мира, в частности, П.И.Плотников, В.В.Пухначев, Е.В.Радкевич, В.А. Солонников, Н.Н.Уральцева (Россия), Л.Каффарелли Д. Киндерлерер, Л.Ниренберг, А.Фридман (США), Дж. Дюво, Ж.Л. Лионс (Франция), А.Лунарди, М.Примиччерио, А.Фазано, (Италия), Кенмочи, Е.И. Ханзава (Япония), Ж.Ф.Родригес (Португалия), Ж. Диас, Ж. Вазгес (Испания), Незгудка, И.Павлов (Польша), И.Ешер (Германия); Ч.Эллиот (Англия), И.И. Данилюк, Б.В. Базалий (Украина), А.Бегматов (Узбекистан), Г.И.Бижанова, А.М.Мейрманов, С.Т.Мухамбетжанов, С.Н.Харин (Казахстан) и др.

В настоящей статье рассматриваются многомерные задачи со свободными границами для параболических уравнений, дается описание их физического смысла и приводится обзор работ, в которых они изучаются.

Пусть в оганиченной области $\Omega\subset R^n,\ n\geq 2,$ с границей Σ находится замкнутая поверхность $\gamma(t)$, делящая Ω на две подобласти $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ такие, что $\partial\Omega_1(t)=\Sigma\cup\gamma(t)$, $\partial\Omega_2(t)=\gamma(t)$, $\gamma(0):=\Gamma$, $\Omega_j(0)\coloneqq\Omega_j$. Пусть $Q_{jT}:=\{(x,t)|\,x\in\Omega_j(t),t\in(0,T)\}$, $j=1,2$, $x=(x',x_n)$, $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_{x_i}=\partial/\partial x_i$, $\Delta\coloneqq\partial^2_{x_1}+\ldots+\partial^2_{x_n}$ - оператор Лапласа, ν - нормаль к $\gamma(t)$, направленная в $\Omega_2(t)$, ∂_ν - производная по нормали ν, V_υ - скорость продвижения свободной границы по нормали ν. Если свободную границу задать в виде $x_n=\rho(x',t)$ или $x=\xi+\nu_0(\xi)\rho(\xi,t)$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\Gamma$, то $V_\upsilon=\partial_t\rho$, здесь $\nu_0(\xi)$ - единичная нормаль к Γ.

Наиболее известной из задач со свободной границей является задача Стефана. Эта задача была поставлена в 1889 г. Стефаном в одномерном случае при рассогласовании начальных и граничных данных. Им же было получено автомодельное решение этой задачи [1,2]. Сформулируем многомерную двухфазную задачу Стефана. Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и свободную границу $\gamma(t)$, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$\partial_t u_1-a_1\Delta u_1=0,\quad (x,t)\in Q_{1T} \tag{1}$$

$$\partial_t u_2-a_2\Delta u_2=0,\quad (x,t)\in Q_{2T}, \tag{2}$$

начальным условиям

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \quad u_j|_{t=0} = u_{0j}(x), \ \ x \in \Omega_j, \quad j = 1,2, \tag{3}$$

граничному условию

$$u_1|_{\Sigma} = p(x,t), \ t \in (0, \mathrm{T}), \tag{4}$$

и условиям на свободной границе: $x \in \gamma(t), \ t \in (0, \mathrm{T})$,

$$u_1 = u_2 = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_1 \partial_\upsilon u_1 - \lambda_2 \partial_\upsilon u_2 = -k V_\upsilon , \tag{6}$$

где a_j, λ_j , $j = 1,2$, k - положительные постоянные.

Задача (1) - (6) описывает, например, процесс плавления или кристаллизации вещества, неизвестными являются температура жидкой фазы $u_1(x,t)$ и твердой фазы $u_2(x,t)$, а также граница $\gamma(t)$ раздела жидкой и твердой фаз, условие (5) означает, что температура $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ на границе фазового перехода равна температуре плавления (кристаллизации), (6) есть условие Стефана, определяющее продвижение свободной границы и представляющее собой баланс энергии на $\gamma(t)$. Задача Стефана имеет большие приложения при изучении процессов плавления (кристаллизации) в металлургии, теории сварки, горения, вулканологии, геотермии, мерзлотоведении и т.д..

Классическое решение многомерной задачи Стефана изучали A.Friedman и D.Kinderlehrer [3], L.A.Caffarelli [4,5] D.Kinderlehrer и L.Nirenberg [6], A.M.Мейрманов [7], E.I. Hanzawa [8], Б.В.Базалий [9], Е.В.Радкевич [10], Б.В.Базалий и С.П.Дегтярев [11], М.А.Бородин [12], Г.И.Бижанова [13, 14], Г.И.Бижанова и В.А.Солонников [15]. В работах [13 - 15] была установлена коэрцитивная разрешимость многомерной двухфазной задачи Стефана в весовых $C_s^l(Q_T)$ и классических $C_x^{l,l/2}{}_t(\overline{Q}_T)$ [16] пространствах Гельдера в малом по времени. Весовые пространства Гельдера $C_s^l(Q_T)$, $s \le l$, l – нецелое положительное число, с весом в виде степени t были введены В.С.Белоносовым [17]. Изучение задач в этом пространстве позволяет уменьшить число условий согласования граничных и начальных данных задачи, получить результаты для классических пространств Гельдера при $s = l$.

Значительно более короткую историю имеют задачи Флорина и Маскета – Веригина. В.А.Флорин в 1951 г. поставил одномерную задачу с другим условием на свободной границей вместо условия (6) и получил ее автомодельное решение [18]. Приведем многомерную задачу Флорина, в которой требуется определить функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и свободную границу $\gamma(t)$ по условиям

$$\partial_t u_1 - a_1 \Delta u_1 = 0, \quad (x,t) \in Q_{1T} \tag{7}$$

$$\partial_t u_2 - a_2 \Delta u_2 = 0, \quad (x,t) \in Q_{2T}, \tag{8}$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \quad u_j|_{t=0} = u_{0j}(x), \ \ x \in \Omega_j, \quad j = 1,2, \tag{9}$$

$$u_1|_{\Sigma} = p(x,t), \ t \in (0, \mathrm{T}) \tag{10}$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad x \in \gamma(t), \ t \in (0, \mathrm{T}), \tag{11}$$

$$\lambda_1 \partial_\upsilon u_1 - \lambda_2 \partial_\upsilon u_2 = 0, \ x \in \gamma(t), \ t \in (0, \mathrm{T}), \tag{12}$$

где a_j, λ_j , $j = 1,2$, - положительные постоянные. Сравнивая условия (6) и (12) на свободной границе, мы видим, что задача Флорина является вырожденной задачей Стефана с $k = 0$.

Занимаясь укреплением оснований гидротехнических сооружений, Н.Н.Веригин в 1952 г. сформулировал одномерную задачу для уравнений теплопроводности с условиями (17) на свободной границе и нашел ее автомодельное решение [19], но раньше, в 1937 г. М.Маскет вывел аналогичные условия на свободной границе в трехмерном случае [20]. В многомерной задаче Маскета – Веригина функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и свободная граница $\gamma(t)$ находятся по следующим условиям:

$$\partial_t u_1 - a_1 \Delta u_1 = 0, \quad (x,t) \in Q_{1T} \tag{13}$$

$$\partial_t u_2 - a_2 \Delta u_2 = 0, \quad (x,t) \in Q_{2T}, \tag{14}$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \quad u_j|_{t=0} = u_{0j}(x), \ \ x \in \Omega_j, \quad j = 1,2, \tag{15}$$

$$u_1|_{\Sigma} = p(x,t),\ t \in (0,\mathrm{T}), \tag{16}$$

$$u_1 = u_2, \qquad \lambda_1 \partial_\nu u_1 = \lambda_2 \partial_\nu u_2 = -k\, V_\nu,\ \ x \in \gamma(t),\ t \in (0,\mathrm{T}), \tag{17}$$

где $a_j,\ \lambda_j,\ j = 1,2,\ k$ - положительные постоянные, V_ν - скорость продвижения свободной границы по нормали ν к $\gamma(t)$, направленная в $\Omega_2(t)$.

Задачи (7) - (12) и (13) - (17) описывают фильтрацию жидкостей и газов в пористой среде. Предположим, что области $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ заняты различными жидкостями, например, водой и нефтью, разделенными границей $\gamma(t)$. Неизвестные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ могут быть, например, давлением в воде и нефти соответственно. Подобные задачи возникают при изучении процессов извлечения жидкой нефти по скважинам. Как известно, в нагнетающую скважину под высоким давлением $u_1(x,t)$ подается вода, которая выталкивает нефть по добывающей скважине на поверхность земли. Задачи Флорина и Маскета – Веригина могут найти приложения при усовершенствовании технологий гидротехники, гидрогеологии, мелиорации и ирригации почв, а также добычи нефти, газа и эксплуатации источников водоснабжения.

Классическое решение однофазной задачи Флорина изучали А. М. Мейрманов в двумерном случае [21], А. Фазано, М. Примичерио и Е. В. Радкевич [22] в многомерном случае, двухфазной многомерной задачи - Г.И.Бижанова [13, 14, 23].

Многомерная задача Маскета-Веригина была рассмотрена Е. В. Радкевичем [10], Г.И.Бижановой и В.А.Солонниковым [15].

В работах [13, 14, 23] и [15] для задач Флорина и Маскета – Веригина соответственно была установлена однозначная разрешимость задач, получены коэрцитивные оценки решений в весовых и классических пространствах Гельдера для малых времен.

В задачах Стефана и Флорина выполнен основной постулат

$$u_1 \geq u^* \text{ в } \Omega_1(t),\ \ u_2 \leq u^* \text{ в } \Omega_2(t), \tag{18}$$

который означает, что в жидкой фазе $\Omega_1(t)$ температура или давление выше или равны u^* (в нашем случае $u^* = 0$), а в твердой фазе $\Omega_2(t)$ температура или давление меньше или равны u^*. Однако наблюдаются физические процессы с фазовыми переходами, при которых температура жидкого вещества около свободной границы ниже, чем температура плавления u^*. В этих случаях не выполняется постулат (18), температура фазового перехода u^* неизвестна, и процессы являются неравновесными. К числу таких процессов относятся фильтрационный процесс, описываемый задачей Веригина, процессы плавления с "переохлаждением" и плавления бинарных сплавов. Рассмотрим задачи, являющиеся математическими моделями неравновесных процессов с фазовыми переходами.

В задачах с «переохлаждением» требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и свободную границу $\gamma(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\partial_t u_1 - a_1 \Delta u_1 = 0, \quad (x,t) \in Q_{1T} \tag{19}$$

$$\partial_t u_2 - a_2 \Delta u_2 = 0, \quad (x,t) \in Q_{2T}, \tag{20}$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma,\ \ u_j|_{t=0} = u_{0j}(x),\ \ x \in \Omega_j,\ \ j = 1,2, \tag{21}$$

$$u_1|_{\Sigma} = p(x,t),\ t \in (0,\mathrm{T}), \tag{22}$$

$$u_1 = u_2 = -\beta V_\nu, \qquad \lambda_1 \partial_\nu u_1 = \lambda_2 \partial_\nu u_2 = -k\, V_\nu,\ \ x \in \gamma(t),\ t \in (0,\mathrm{T}), \tag{23}$$

в первой задаче и

$$\partial_t u_1 - a_1 \Delta u_1 = 0, \quad (x,t) \in Q_{1T} \tag{24}$$

$$\partial_t u_2 - a_2 \Delta u_2 = 0, \quad (x,t) \in Q_{2T}, \tag{25}$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma,\ \ u_j|_{t=0} = u_{0j}(x),\ \ x \in \Omega_j,\ \ j = 1,2, \tag{26}$$

$$u_1|_{\Sigma} = p(x,t),\ t \in (0,\mathrm{T}), \tag{27}$$

$$u_1 = u_2 = -\beta V_\nu, \qquad \lambda_1 \partial_\nu u_1 = \lambda_2 \partial_\nu u_2 = 0,\ \ x \in \gamma(t),\ t \in (0,\mathrm{T}), \tag{28}$$

во второй задаче, где $a_j,\ \lambda_j,\ j = 1,2,\ \beta,\ k$ - положительные постоянные.

A. Friedman и B. Hu доказали существование классического решения задачи (19) - (23) в окрестности стационарного решения [24]. В работе [25] Г.И. Бижановой и А.С.Сарсекеевой были установлены существование, единственность, оценки решений задач (19) - (23) и (24) - (28) в весовых и классических пространствах Гельдера.

Задача Стефана (1) - (6) является математической моделью плавления (кристаллизации) чистого вещества. Наличие примеси в веществе существенно влияет на его свойства, процесс плавления становится неравновесным, и температура плавления неизвестна. Пусть область $\Omega_1(t)$ занята жидкой фазой с температурой $u_1(x,t)$ и концентранией примеси $c_1(x,t)$, область $\Omega_2(t)$ - твердой фазой с температурой $u_2(x,t)$ и концентрацией примеси $c_2(x,t)$. Сформулируем задачу, в которой требуется найти функции $u_j(x,t)$, $c_j(x,t)$, $j=1,2$, а также границу $\gamma(t)$ раздела жидкой и твердой фаз

$$\partial_t u_j - a_j \Delta u_j = 0, \quad (x,t) \in Q_{jT}, \; j=1,2, \tag{29}$$

$$\partial_t c_j - b_j \Delta c_j = 0, \qquad (x,t) \in Q_{jT}, \; j=1,2, \tag{30}$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \;\; u_j|_{t=0} = u_{0j}(x), \;\; c_j|_{t=0} = c_{0j}(x), \;\; x \in \Omega_j, \;\; j=1,2, \tag{31}$$

$$u_1|_\Sigma = p(x,t), \quad c_1|_\Sigma = q(x,t), \quad t \in (0,\mathrm{T}), \tag{32}$$

$$u_1 = u_2, \; c_j = \sigma_j\left(u_j\right), \; j=1,2, \quad x \in \gamma(t), \quad t \in (0,\mathrm{T}), \tag{33}$$

$$\lambda_1 \partial_\nu u_1 - \lambda_2 \partial_\nu u_2 = -\kappa V_\nu, \;\; x \in \gamma(t), \; t \in (0,\mathrm{T}), \tag{34}$$

$$k_1 \partial_\nu c_1 - k_2 \partial_\nu c_2 = -(c_1 - c_2)\, V_\nu, \;\; x \in \gamma(t), \; t \in (0,\mathrm{T}), \tag{35}$$

где a_j, b_j, k_j, λ_j, $j=1,2$, κ - положительные постоянные, V_ν – скорость продвижения свободной границы по нормали ν к $\gamma(t)$, направленной в $\Omega_2(t)$, σ_1, σ_2 - непрерывные функции, причем, $\sigma_2 \geq \sigma_1$. Как видно из условий (33), на свободной границе $\gamma(t)$ температура u непрерывна, а концентрация c разрывна, причем $(c_2 - c_1)|_{\gamma(t)} > 0$.

Многомерная задача (29) - (35) изучена Г.И.Бижановой и Ж.Ф.Родригесом в работе [26]. Было доказано, что эта задача однозначно разрешима в малом по времени в весовых и классических пространствах Гельдера, установлены оценки решения.

Литература:

1. Stefan J. Ober die Theorie der Eisbildung, insbesondere ilber die Eisbildung im larmeere // Sitzber. Wien. Akad. Mat. naturw. – 1889. - Bd. 98, lla. – P. 965-983.

2. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. – Рига: Звайгзне, 1967. – 458 с.

3. Friedman A., Kinderlehrer D. A one—phase Stefan problem // Indiana Univ.Math.J. – 1975. - 24. – P. 1005 - 1035.

4. Caffarelli L.A. The regularity of the free boundaries in higher dimensions // Acta Math. – 1977. – 139. – P. 155 - 184.

5. Caffarelli L.A. Some aspects of one—phase Stefan problem // Indiana Univ.Math.J. – 1978. - 27. - P. 73 - 77.

6. Kinderlehrer D., Nirenberg L. The smoothness of the free boundary in the one--phase Stefan problem // Comm. Pure Appl. Math. - 1978. – 31. – P. 257 – 282.

7. Мейрманов А.М. О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений // Матем. сборник. – 1980. – 2 (112). – С.170 – 192.

8. Hanzawa E.I. Classical solutions of the Stefan problem // Tohoku Math. J. – 1981. - 3(33). – P. 297 - 335.

9. Базалий Б.В. Задача Стефана // Доклады Акад наук УкрССР. Сер. А. – 1986. – 11. – С. 3 - 7.

10. Радкевич Е.В. О разрешимости общих нестационарных задач со свободной границей // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. - Акад. наук СССР, Сибирское отд., Институт матем., Новосибирск. – 1986. – С. 85 - 111.

11. Базалий Б.В., Дегтярев С.П. О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сборник. – 1987. – 2 (132). – С.3 - 19.

12. Бородин М.А. Существование классического решения в многомерной задаче Стефана на конечном промежутке времени // Укр. матем. журнал. – 1992. - 12 (44) . – С.1652 -1657.

13. Бижанова Г.И. Исследование разрешимости в весовом гельдеровском пространстве функций многомерных двухфазых задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка (Задачи Коши-Стефана и Коши-Флорина) // Записки научн. семинаров ЛОМИ. – 1994. - Т.213. - С.14-47 (English transl. J. Math.Sci. – 1997. - 84 (1). - P.823-844).

14. Бижанова Г.И. Решение в весовом гельдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и Флорина для параболических уравнений второго порядка в ограниченной области // Алгебра и анализ. – 1995. - Т.7. - 2. - С.46-76 (English transl. St-Petersburg Math.J. – 1996. - V.7. - 2. - P.217-241).

15. Бижанова Г.И., Солонников В.А. О задачах со свободными границами для параболических уравнений // Алгебра и анализ. – 2000. - Т.12. - 6. - С.3 - 45 (English transl. St-Petersburg Math.J. – 2001. - V.12. - 6. - P.949 - 981).

16. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М: Наука. - 1967. – 736 с.

17. Белоносов В. С, Зеленяк Т. И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнний - Новосибирск: НГУ. - 1975.- 155 с.

18. Флорин В.А. Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды // Изв. АН СССР. ОТН. – 1951. – 1. – С. 1635 – 1649.

19. Веригин Н.Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений // Изв. АН СССР. ОТН. – 1952. – 5. – С. 674 – 687.

20. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media - Michigan. - 1937. – 763 c.

21. Мейрманов А. М. Об одной задаче со свободной границей для параболических уравнений // Матем. сборник. – 1981. – 4. – С.532 – 543.

22. Фазано А., Примичерио М., Радкевич Е. В. Проблемы переходной зоны // ДАН СССР. – 1991. – 3. - С. 562-566.

23. Бижанова Г.И. On the Stefan problem with the small parameter // Banach Center Publications. - 2008. - V. 81. - P.43-63.

24. Friedman A., Hu B. The Stefan problem with kinetic condition at the free boundary // Ann.Scuola Norm.Sup. Pisa Cl.Sci. – 1992. - 4 (19). – 1. – P. 87-111.

25. Bizhanova G.I., Sarsekeeva A.S. On the solvability of free boundary problems with supercooling // Far East Journal of Applied Mathematics. – 2004. - V.15. - 2. - P. 223-243.

26. Bizhanova G.I., Rodrigues J.F. Classical solutions to parabolic systems with free boundary of Stefan type // Advances in Differential Equations. – 2005. - 12. - P.1345-1388.

Түйіндеме

Параболалық теңдеулер үшін еркін (белгісіз) шекаралы сызықтық емес көпөлшемді екі фазалы есептердің шолуы берілген. Қарастырылып отырған есептердің математикалық модельдері болып табылатын физикалық процестер суреттеледі. Бұл есептердің классикалық шешімділігінің нәтижесі келтіріледі.

Кілттік сөздер: көпөлшемді шеттік есептер, еркін шекара, параболалық теңдеулер, шешімнің бар және жалғыз болуы, Гельдер кеңістігі.

Резюме

В статье дается обзор нелинейных многомерных двухфазных задач со свободными (неизвестными) границами для параболических уравнений. Описываются физические процессы, математическими моделями которых являются рассматриваемые задачи. Приводятся результаты о классической разрешимости этих задач.

Ключевые слова: многомерные краевые задачи, свободная граница, параболические уравнения, существование, единственность, пространства Гельдера.

Summary

There is given an overview of the nonlinear multidimensional two – phase problems with the free (unknown) boundaries for the parabolic equations. There are described the physical processes, mathematical models of which are the considered problems. The results on the classical solvability of these problems are given.

Key words: multidimensional boundary value problems, free boundary, parabolic equations, existence, uniqueness, Holder spaces.

УДК 517.956.225

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ШАРЕ

М.А. САДЫБЕКОВ, доктор физико-математических наук, профессор,
Б.Т. ТОРЕБЕК, Б.Х. ТУРМЕТОВ
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

Задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x) = f(x), \; x \in D \; ; \; u = \varphi \; , \; x \in \partial D \qquad (1)$$

в области $D \subset R^n, n \geq 2$ с регулярной границей ∂D является классической и хорошо исследованной задачей. Ее решение существует, единственно и представляется с помощью функции Грина $G_D(x,y)$ в виде:

$$u(x) = \int_D G_D(x,y) f(y) dy + \int_{\partial D} \frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x,y) \varphi(y) dS_y . \qquad (2)$$

Здесь и далее $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к ∂D .

В случае, когда $D = \{x \in R^n\colon |x| < 1\}$ является единичным шаром, функция Грина задачи Дирихле может быть построена методом отражений и имеет вид:

$$G_D(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon(x-y) - \varepsilon\left(x|y| - \frac{y}{|y|}\right)\right], \qquad (3)$$

где $\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ - площадь единичной сферы в R^n, а $\varepsilon(x-y)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$\varepsilon(x-y) = \begin{cases} \ln|x-y|, n = 2; \\ \dfrac{1}{(n-2)}|x-y|^{2-n}, n \geq 3. \end{cases} \tag{4}$$

Наряду с задачей Дирихле, классической и хорошо исследованной является задача Неймана для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x) = f(x), \ x \in D; \ \frac{\partial u}{\partial n} = \psi, \ x \in \partial D. \tag{5}$$

Хорошо известно, что решение задачи Неймана (5) не единственно с точностью до постоянного слагаемого. Для существования решения задачи необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_D f(y)dy = \int_{\partial D} \psi(y) dS_y. \tag{6}$$

Если решение задачи (4) существует, то это решение может быть представлено в интегральном виде с помощью функции Грина задачи Неймана $G_N(x,y)$ по формуле, аналогичной представлению (2):

$$u(x) = \int_D G_N(x,y) f(y) dy - \int_{\partial D} G_N(x,y) \psi(y) dS_y + Const. \tag{7}$$

Хотя определение функции Грина задачи Неймана и введено в математической литературе, признано, что ее нахождение требует довольно сложных построений [1, с. 7 - 8; 2, с. 244 – 247; 3, с. 286- 288; 4].

Под функцией Грина задачи Неймана (5) понимают [5, с. 279] функцию, имеющую представление

$$G_N(x,y) = \frac{1}{\omega_n}[\varepsilon(x-y) + g(x,y)], \tag{8}$$

где $g(x,y)$ - гармоническая в области D функция. При этом должно выполняться краевое условие

$$\frac{\partial}{\partial n_y} G_N(x,y) = -\frac{1}{\omega_n} \text{ при всех } y \in \partial D. \tag{9}$$

Если такая функция Грина $G_N(x,y)$ существует, то из (6) и (9) легко следует, что функция (7) удовлетворяет всем условиям задачи (5). В случае произвольной области D вопрос существования функции Грина задачи Неймана сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $g(x,y)$.

Существуют различные способы построения функции Грина задачи Дирихле (1). Для многих видов областей D она построена в явном виде. А для задачи Неймана (5) в многомерных областях построение функции Грина является открытой задачей. Здесь имеются лишь примеры для простейших областей – полупространства, четверти пространства и т.п. Для таких областей задача Неймана является внешней краевой задачей и поэтому будет корректной без выполнения условий разрешимости вида (6).

Для единичного шара из R^n функция Грина задачи Неймана построена в явном виде только для случаев $n=2$ и $n=3$:

$$G_N(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln|x-y|+\ln\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|\right], n=2\ ;$$

$$G_N(x,y)=\frac{1}{4\pi}\left[|x-y|^{-1}+\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{-1}+\ln\frac{2}{1-(x,y)+\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|}\right], n=3\ , \qquad (10)$$

где $(x,y)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ - скалярное произведение векторов x и y .

Отметим, что в последнее время возобновился интерес к построению в явном виде функций Грина классических задач. В [6] с помощью гармонических функций Грина задач Дирихле, Неймана и Робина построены функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана и Робина в двумерном круге. В [7 – 10] построена в явном виде функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре.

Задачу Робена для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x)\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}u(x)=f(x)\ ,\ x\in D\ ;\ \frac{\partial u}{\partial n}+au=\psi\ ,\ x\in\partial D \qquad (11)$$

можно считать обобщением задачи Неймана, так как при $a=0$ они совпадают. Однако, в отличие от задачи Неймана, задача Робена в «большинстве» случаев является корректной. Задача Робена является некорректной, когда a является целым отрицательным числом. В остальных случаях решение задачи существует и единственно.

В случаях, когда решение задачи Робена единственно, определение функции Грина задачи Робена может быть дано аналогично определению функции Грина задачи Дирихле.

Под функцией Грина задачи Робена (11) будем понимать функцию, имеющую представление

$$G_R(x,y)=\frac{1}{\omega_n}[\mathcal{E}(x-y)+g(x,y)]\ , \qquad (12)$$

где $g(x,y)$ - гармоническая в области D функция. При этом должно выполняться краевое условие

$$\frac{\partial}{\partial n_y}G_R(x,y)+aG_R(x,y)=0 \text{ при всех } y\in\partial D\ .(13)$$

В докладе нами дается интегральное представление функций Грина задачи Неймана и задачи Робена (только в случаях, когда задача корректна: $a\neq m<0$) для единичного шара произвольной размерности. Также рассмотрены случаи, когда функция Грина может быть представлена в явном виде (в терминах элементарных функций).

Для построения нам необходимо будет следующее представление фундаментального решения в виде сходящегося ряда по системе однородных гармонических полиномов.

Лемма 1. *Для фундаментального решения (4) оператора Лапласа имеют место представления*

$$\mathcal{E}(x-y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+n-2)}\frac{|x|^k}{|y|^{k+n-2}}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right) \text{ *при* } |x|<|y|, \qquad (14)$$

$$\varepsilon(x-y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+n-2)}\frac{|y|^k}{|x|^{k+n-2}}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right) \text{ при } |x|>|y|, \qquad (15)$$

где $H_k^{(i)}(\cdot)$ *- полная система однородных гармонических полиномов степени* k *, а* h_k *– количество этих полиномов.*

Число h_k определяется по формуле (см. [11, с. 229, §11.2. формула (2)])

$$h_k=\frac{[(2k+n-2)(k+n-3)!]}{[k!\,(n-2)!]}$$

Основные результаты работы.

Введем в рассмотрение функцию ($n\geq 3$) :

$$\varepsilon_1(x,y)=\int_0^1\left[(n-2)\varepsilon\left(sx|y|-\frac{y}{|y|}\right)-1\right]\frac{ds}{s}\equiv\int_0^1\left[\left|sx|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{2-n}-1\right]\frac{ds}{s}. \qquad (16)$$

Теорема 1. *Для функции Грина* $G_N(x,y)$ *задачи Неймана (5) при* $n\geq 3$ *имеет место представление*

$$G_N(x,y)=\frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon(x-y)+\varepsilon\left(x|y|-\frac{y}{|y|}\right)+\varepsilon_1(x,y)\right]+Const, \qquad (14)$$

где функция $\varepsilon_1(x,y)$ *задается выражением (13).*

Отдельно рассмотрены случаи, когда функция $\varepsilon_1(x,y)$ явно выражается в элементарных функциях. Тем самым указаны случаи, когда функцию Грина задачи Неймана удается выписать в элементарных функциях.

В частности, при $n=4$ функция $\varepsilon_1(x,y)$ имеет вид:

$$\varepsilon_1(x,y)=-\ln\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|+\frac{(x,y)}{\sqrt{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}}\,arctg\frac{\sqrt{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}}{1-(x,y)}.$$

Это представление позволяет получить в явном виде функцию Грина задачи Неймана для единичного шара размерности 4. Уже этот результат является новым. Таже рассмотрены и другие случаи, когда функция Грина задачи Неймана может быть получена в явном виде.

Для функции Грина задачи Робена в единичном круге (двумерном единичном шаре) получено интегральное представление.

Теорема 2. *Пусть* $a>0$ *или* $a<0$ *и* a *– не целое , тогда функция Грина задачи Робена (11) имеет интегральное представление*

1) Если $a>0$ *, то*

$$G_R(x,y)=\frac{1}{\pi}\left[-\ln|x-y|+\frac{1}{a}-\ln\sqrt{1-2r\rho\cos\gamma+r^2\rho^2}+\;+\int_0^1 s^{a-1}\frac{sr\rho\cos\gamma-(sr\rho)^2}{1-2sr\rho\cos\gamma-(sr\rho)^2}ds\right];$$

2) Если $a<0$ *и* a *– не целое, то*

$$G_R(x,y)=\frac{1}{\pi}\left[-\ln|x-y|+\frac{1}{a}-\ln\sqrt{1-2r\rho\cos\gamma+r^2\rho^2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(r\rho)^k}{k+a}\cos k\gamma++\int_0^1 s^{a-1}\left(\frac{sr\rho\cos\gamma-(sr\rho)^2}{1-2sr\rho\cos\gamma-(sr\rho)^2}-\sum_{k=1}^{m}(sr\rho)^k\cos k\gamma\right)ds\right].$$

Здесь $\gamma=\theta-\varphi$ *– угол между векторами* x *и* y *.*

Также рассмотрены случаи, когда функция Грина задачи Робена может быть представлена явно и выражается в элементарных функциях. Для вычислений используются формулы из [11, 12].

Литература:

1. Bouligand G., Giraud G., Delens P. Le problem de la derive oblique en theorie de potential. P.: Hermann edit., 1935. 78 p.
2. Kellog O.D. Foundations of potential theory. N.Y.: Frederick Ungar publ. Comp., 1970. 384 p.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966. - 443 с.
4. Бицадзе А.В. // Дифференциальные уравнения. - 1986. - Т.22. - № 5. - С. 823-828.
5. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высш. школа, 1970. - 712 с.
6. Begehr H. // Le matematiche. 2006. Vol. LXI. Fasc. II. - p. 395-405.
7. Kalmenov T. Sh., Koshanov B. D., Nemchenko M.Y. // Complex variables and elliptic equation. 2008. Vol. 53. - № 2. - P. 35-41.
8. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. // Доклады РАН. - 2008. - Т.421. -№3. - С. 305-307.
9. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. // Сиб. мат. журнал. - 2008. - Т.49. - № 3. - С. 305-307.
10. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. // Дифференциальные уравнения. - 2012. - Т.48. - № 3. - С. 435-438.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции // Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Сер.: «Спр. матем. библ.». - М.: Наука, 1966. - Т. 2. - 296 с.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.

Резюме

Рассматриваются вопросы построения функций Грина классических краевых задач (Неймана и Робена). Получено представление функций Грина в интегральной форме. Обсуждаются случаи, когда функция Грина может быть представлена в терминах элементарных функций. В отдельных случаях выписан ее явный вид.

Ключевые слова: Уравнение Пуассона, уравнение Лапласа, задача Неймана, задача Робена, функция Грина.

Түйіндеме

Классикалық (Нейман және Робен) шеттік есептердің Грин функциясын құру мәселелері қарастырылады. Грин функциясының көрінісі интегралдық түрде алынған. Грин функциясы элементар функциялар арқылы өрнектелетін жағдайлары көрсетілген. Дербес жағдайларда оның айқын түрлері келтірілген.

Кілт сөздер: Пуассон теңдеуі, Лаплас теңдеуі, Нейман есебі, Робен есебі, Грин функциясы.

Summary

We consider problems of constructing of Green's function of classical boundary value problems (Neumann and Robin). Representation of the Green's function in the integral form has been obtained. The are discussed cases when the Green's function may be represented in terms of elementary functions. In some cases its explicit form has been written out.

Key words: Poisson's equation, Laplace equation, Neumann's problem, Robin's problem, Green's function.

УДК 510.53

ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ТРАНСЛЯЦИИ АБСТРАКТНЫХ ТИПОВ ДАННЫХ

Д.А.ТУСУПОВ, доктор физико-математических наук, профессор
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана,
Республика Казахстан

Решение проблемы реализации абстрактных типов данных без привлечения логических и алгебраических методов оказалось не эффективным.

Привлечение методов вычислимых алгебраических структур к проблемам описания спецификаций и реализации абстрактных типов данных является более перспективным и целесообразным, чем попытки построения программ прямого перевода одного абстрактного типа данных в другой. Одним из важных направлений теории конструктивных моделей является изучение вопросов трансляций (определимости) структуры одной сигнатуры в структуру другой сигнатуры и продолжения конструктивизации исходной структуры до конструктивизации структуры другой сигнатуры. Основополагающей работой в этой области является статья А.И. Мальцева [1], где дается ответ на вопрос А. Мостовского об интерпретируемости группы с выделенными константами в стандартную модель арифметики. Одним из способов трансляции является метод относительно элементарной определимости, разработанный Ю.Л. Ершовым [2] для решения вопросов разрешимости элементарных теорий.

В математике теория типов обсуждается, начиная с классических работ Б. Рассела, посвященных основаниям математики. В программировании типы появились в первых же языках «высокого уровня» как средство организации данных и повышения эффективности программ.

С распространенной точки зрения тип данных определяется двумя свойствами:

- описанием (спецификацией) поведения объектов рассматриваемого типа;
- структурным описанием, которое определяет представление объектов этого типа.

С другой точки зрения - под типом объекта понимается само множество объектов, существенные свойства объектов (т.е. представление) объектов этого множества и набора операций, обеспечивающих доступ к объектам и позволяющих использовать эти свойства.

С увеличением сложности программ появляется необходимость определять новые типы данных. Введение типов объектов, соответствующих решаемой задачи, позволяет абстрагироваться от второстепенных деталей и решать задачу на том уровне абстракции, который соответствует природе задачи, а рассмотрение деталей отложить до перехода к другому более низкому уровню абстракции. Это один из аспектов связи между типами и абстракцией.

Абстракция данных включает в себя группу связанных друг с другом функций или операций, которые действуют над классом каких-то объектов, причем с ограничениями, что позволяет наблюдать поведение этих объектов только с помощью применения этих операций.

Содержание понятий типа, абстракции и, в частности так называемого *абстрактного типа данных*, оказалось многообразным и стало объектом интенсивного изучения как в теоретическом, так и практическом плане. Все более осознается и подчеркивается роль абстракции, важность языковых средств абстракции и механизма типов в процессе разработки программ и в обеспечении таких свойств программ, как верифицируемость, надежность, модифицируемость и т. п.

При создании программы, важно установить, что она правильно реализует некоторое понятие, существующее в чьем-то сознании. Неформальный метод проверки правильности программ сводится обычно к тестированию.

В формальных методах между понятием и программами вводится спецификация. Её цель - обеспечить математическое описание понятия, а правильность программ сводится к доказательству её эквивалентности данной спецификации.

Формальные спецификации, т.е. описанные некоторым формальным языком, например, языком узкого исчисления предикатов, очень полезны в связи с идеей сделать программу общедоступной. Кроме того, формальные методы спецификации могут изучаться математически, так, что для них можно точно формулировать разные представляющие интерес вопросы и получать ответы, например, вопрос об эквивалентности спецификаций.

Все формальные методы спецификации должны передавать информацию о смысле абстракции данных, и эта информация выражается математически.

Каждый метод спецификации абстракций данных определяет нечто похожее на математическую дисциплину.

Предметная область этой дисциплины - множество, на котором она основана, - это класс объектов, принадлежащих определяемой абстракции данных.

Операции и предикаты этой абстракции определяются как отображения и подмножества этой области соответственно.

Теория такой дисциплины состоит из теорем и лемм, выводимых из ее спецификаций.

Например, такую дисциплину можно получить из спецификации подобно тому, как теорию чисел можно построить из аксиоматической системы Пеано для натурального ряда.

Информацию, содержащуюся в спецификации абстракции данных, можно разделить на семантическую и синтаксическую части.

Информация о действительном смысле или поведения этой абстракции описывается в семантической части; это описание составляется с использованием словаря терминов или символов (язык), определяемого синтаксической частью.

Синтаксической частью спецификации должны быть определены символы и имена, которые служат для идентификации определяемой абстракции и ее области или класса объектов.

Семантическая часть спецификации использует определенные этой моделью в синтаксической части имена, символы, чтобы выразить смысл абстракции данных. При этом используются два подхода: либо дается абстрактная модель, соответствующего класса объектов, и операции определяются в терминах этой модели, либо этот класс объектов определяется неявно, через описания операций и предикатов.

В интересующем нас первом подходе поведение фактически определяется заданием абстрактной реализации в терминах другой абстракции данных или математической дисциплины, свойства которой хорошо понятны. Абстракция данных, используемая в качестве модели, также содержит ряд своих операций и отношений, которые используются для получения новых операций и отношений. Проблема реализации - соответствие новых операций и отношений старым.

Проблема нахождения адекватного понятия реализации абстрактных типов данных при алгебраическом подходе является довольно сложной [3]. При алгебраическом подходе, предложенной группой ADJ [3], спецификация $Spec =< S, \Sigma, \mathrm{E} >$ абстрактного типа данных состоит из сортов S, операций Σ и равенств E. Сорта обозначают области данных, операции определяют средства доступа к данным и манипулирование ими, равенства определяют эффект применения операций.

Семантика спецификации определяется соответствующей фактор-алгеброй термов T_{spes}. В теории универсальных алгебр спецификация — это эквациональное представление алгебры T_{spes}. Данные соответствуют элементам этой алгебры, а операции абстрактного типа данных — операциям алгебры.

Пусть даны два абстрактных типа данных АТД 0 и АТД 1 (со спецификациями $Spes0$ и $Spes1$). Возникает естественный вопрос о том, как описать тот факт, что операции АТД 0 моделируются операциями АТД 1 или в терминологии программистов «АТД 1 *реализует* АТД 0».

Существуют неформальные принципиальные требования к реализациям:

- *Синтаксический уровень.* Реализация абстрактного типа данных АТД 0 абстрактным типом данных АТД 1 должна быть на синтаксическом уровне с помощью соответствующей спецификации как синтаксический объект, в котором сорта и операции $Spes0$ синтезируются в каком-то смысле с помощью сортов и операций $Spes1$.

- *Семантический уровень.* На этом уровне должна быть *конструкция,* переводящая АТД 1 в АТД 0, которая позволяет представить данные и операции из АТД 0 и моделировать производные операции АТД 0 данными и операциями, синтезированными с помощью АТД 1.

Специфика использования алгебр в программировании состоит в том, что операции и объекты должны быть *вычислимыми.* Вычислимые алгебры отождествляются с *конструктивными алгебрами* в смысле Мальцева и Рабина, основанного на понятии *нумерации.*

Ю.Л. Ершов предложил один из вариантов понятия абстрактного типа данных и понятия *реализации* одного типа данных в другую с помощью понятия определимости. Пусть σ - (многосортная) сигнатура. *Данные сигнатуры* σ - это любая алгебраическая система (структур) сигнатуры σ. Для того, чтобы выделить абстрактный тип данных (сигнатуры σ), важно определить некоторый класс K данных (сигнатуры σ) (например, с помощью выделения некоторой теории). Возможными теориями являются эквациональная (алгебраический подход), теория первого порядка (*модельный подход),* теория, описываемая некоторой программной логикой. В качестве абстрактных типов данных будем рассматривать алгебраические структуры сигнатуры σ.

Специфика использования в программировании требует, чтобы объекты, операции и отношения структуры были вычислимыми. Тогда в качестве точной *семантики* для *модельного подхода* рассматривается конструктивная модель (вычислимая структура)

$$A = \langle \omega, P_1,..., P_n, f,..., f_k \rangle,$$

где $P_1,..., P_n, f,..., f$ - вычислимые предикаты и функции соответственно и ω - множество натуральных чисел.

Приведем результаты полученные С.С. Гончаровым и авторам в данной области исследования:

Определение. Пусть даны вычислимые структуры (АТД—абстрактные типы данных) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Будем говорить, что АТД $\mathcal{A}$ *реализуема (транслируема) в* АТД $\mathcal{B}$, если АТД $\mathcal{B}$ является вычислимым замыканием АТД $\mathcal{A}$ или АТД $\mathcal{A}$ является Δ_1^0-определимым в АТД $\mathcal{B}$.

Два класса структур $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ взаимно реализуемы, если для каждой структуры $\mathcal{A}$ из $\mathcal{K}$ существует структура $\mathcal{B}$ из $\mathcal{L}$ такая, что $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ взаимно реализуемы, и обратно, для каждой структуры $\mathcal{B}$ из $\mathcal{L}$ существует структура $\mathcal{A}$ из $\mathcal{K}$ такая, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ взаимно реализуемы.

Теорема m. Пусть даны сигнатура σ_0, состоящая из счетного бесконечного числа предикатных символов, местность которых ограниченна в совокупности; сигнатура σ_1 с конечным числом предикатных символов; сигнатура σ_2 с одним n-местным предикатом; сигнатура σ_3 ориентированного графа.

Для любой счетной структуры $\mathcal{A}$ сигнатуры σ_m (где $m = 0,1,2,3$) существует симметрический, иррефлексивный граф $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ взаимно реализуемые.

Литература:

1. Мальцев А.И. Избранные труды. Математическая логика и общая теория алгебраических систем. - М.: Наука, 1976. - Т.2. - 388 с.
2. Ершов Ю.Л. Определимость и вычислимость. - Новосибирск: Научная книга, 1996. - 286 с.
3. Агафонов В.Н. Типы и абстракция данных в языках программирования (Обзор) // Сборник статей "Данные в языках программирования" / под ред. В.Н. Агафонова. - М.: Мир, 1982. - 327 с.

Резюме

В данной статье рассматривается логико-алгебраический подход к трансляции абстрактных типов данных. Изучается проблема трансляций (определимости) структуры одной сигнатуры в структуру другой сигнатуры, продолжения конструктивизации исходной структуры до конструктивизации структуры другой сигнатуры.

Ключевые слова: абстрактные типы данных, вычислимые структуры, методы трансляций, формальные спецификации.

Түйіндеме

Бұл мақалада деректердің абстрактілі типін трансляциялаудағы логикалық-алгебралық тәсілі қарастырылады. Бір сигнатуралы құрылымдардан басқа сигнатуралы құрылымдарға трансляциялау (анықталғыштық), бастапқы құрылымның басқа сигнатуралы құрылымға конструктивизациясын жалғастыру мәселесі зерттеледі.

Кілт сөздер: деректердің абстрактілі типі, есептелгіш құрылымдар, трансляциялау әдістері, формальды спецификациялар.

Summary

This article deals with the logic-algebraic approach to the translation of abstract data types. The problem of translations (definability) of structure of one signature to structure of other signature is investigated.

Key words: abstract data types, computational structures, methods of translations, formal specifications.

УДК 517.968

НЕТРИВИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ, доктор физико-математических наук, профессор,
М.М. АМАНГАЛИЕВА, М.Т. КОСМАКОВА, М.И. РАМАЗАНОВ
Институт математики и математического моделирования, г. Алматы,
Республика Казахстан

Для однородного с особым ядром интегрального уравнения Вольтерра второго рода и его сопряженного установлено существование нетривиального решения в весовых лебеговых классах.

Введение. В приложениях часто возникает необходимость решения краевых задач теплопроводности в вырождающихся областях. Это приводит к исследованию особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода [1], когда норма интегрального оператора равна единице.

1. Постановка задачи. Найти нетривиальные решения однородного интегрального уравнения

$$L\varphi = (I-K)\varphi \equiv \varphi(t) - \int_0^t K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = 0, \quad t>0\,, \tag{1}$$

и его сопряженного однородного уравнения

$$L^*\psi = (I-K^*)\psi \equiv \psi(t) - \int_t^\infty K(\tau,t)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0, \quad t>0, \tag{2}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\right). \tag{3}$$

Ядра (3) интегральных уравнений (1) и (2) обладают следующими свойствами: $K(t,\tau)\ge 0, \quad K(\tau,t)\ge 0$ и непрерывны; $\lim\limits_{t\to t_0}\int_{t_0}^t K(t,\tau)\,d\tau = 0, \quad t_0 \ge \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{t\to +0}\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau = 1$;

$\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^\infty K(\tau,t)\,d\tau = 1$. Последние два условия показывают особенность ядер уравнений (1) и (2).

Интегральное уравнение (1) соответствует следующей однородной граничной задаче в области $G = \{(x,t): \quad 0<x<t, \quad t>0\}$:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad u(x,t)_{x=0}, \quad u(x,t)_{x=t} = 0\,, \tag{4}$$

если искать ее решение в виде тепловых потенциалов [2, с.480]:

$$u(x,t)=\int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu(\tau)d\tau+\int_0^t \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau\,,$$

где функции $\nu(t)$, $\varphi(t)$ являются неизвестными. Относительно неизвестной функции $\varphi(t)$ будем иметь интегральное уравнение (1), а функция $\nu(t)$ явно выражается через $\varphi(t)$. Интегральное уравнение (2) соответствует задаче, сопряженной к граничной задаче (4).

2. Преобразованные интегральные уравнения. Если ввести обозначения:

$$k(t,\tau)=K(t,\tau)\exp\left\{\frac{t-\tau}{4a^2}\right\},\quad \tilde{\varphi}(t)=\varphi(t)\exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\},\quad \tilde{\psi}(t)=\psi(t)\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\},\tag{5}$$

то уравнения (1) и (2) эквивалентны соответственно интегральным уравнениям:

$$\tilde{\varphi}(t)-\int_0^t k(t,\tau)\,\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau=0,\quad t>0\,,\tag{6}$$

$$\tilde{\psi}(t)-\int_t^\infty k(\tau,t)\,\tilde{\psi}(\tau)\,d\tau=0,\quad t>0\,.\tag{7}$$

Выделяя характеристическую часть $k_h(t,\tau)$ ядра интегрального оператора из (6):

$$k(t,\tau)=k_h(t,\tau)+k_w(t,\tau)\,,$$

получим

$$\tilde{\varphi}(t)-\int_0^t k_h(t,\tau)\,\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau=f(t),\quad t>0\,,\tag{8}$$

где

$$k_h(t,\tau)=\frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\},\tag{9}$$

$$k_w(t,\tau)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2}}\left(1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right),\tag{10}$$

$$f(t)=\int_0^t k_w(t,\tau)\tilde{\varphi}(\tau)d\tau\,.\tag{11}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Неоднородное интегральное уравнение (8) является характеристическим для уравнения (6) (временно считаем функцию $f(t)$ известной).

Доказательство леммы 1 следует из соотношений:

$$\lim_{t\to+0}\int_0^t k_h(t,\tau)d\tau=1,\quad \lim_{t\to+0}\int_0^t k_w(t,\tau)d\tau=0\,.$$

Лемма 2. Уравнение (8) эквивалентно интегральному уравнению:

$$\tilde{\varphi}(t)=f(t)+\int_0^t r(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau+\frac{C_1}{\sqrt{t}},\quad t>0\,,\tag{12}$$

где

$$r(t,\tau)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\sum_{n=1}^\infty n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\},\quad t>\tau,\quad C_1=const>0\,.\tag{13}$$

Для доказательства леммы 2, используя замены:

$$t = y^{-1}, \quad \tau = x^{-1}, \quad \tilde{\varphi}_1(y) = y^{-1/2}\tilde{\varphi}(y^{-1}), \quad f_1(y) = y^{-1/2} f(y^{-1}), \tag{14}$$

сведем уравнение (8) к интегральному уравнению с разностным ядром:

$$\tilde{\varphi}_1(y) - \int_y^{\infty} R(x-y)\tilde{\varphi}_1(x)dx = f_1(y), \tag{15}$$

где

$$R(\theta) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{a^2\theta}\right\}.$$

Из результатов работы [3] следует, во-первых, что уравнение (15) при $f_1(y) \equiv 0$ имеет только единственное решение $\tilde{\varphi}_1(y) = C_1$ и, во-вторых, что решение неоднородного уравнения (15) имеет представление:

$$\tilde{\varphi}_1(y) = f_1(y) + \int_y^{\infty} r_-(y-x) f_1(x)dx + C_1, \tag{16}$$

где

$$r_-(-\theta) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \exp\left\{-\frac{n^2}{a^2\theta}\right\}, \quad \theta > 0.$$

Произведя обратные к (14) замены, получим утверждение леммы 2 (12) – (13).

3. Сведение уравнения (6) к уравнению Абеля и решение интегрального уравнения (1). Подставляя в (12) функцию $f(t)$, определяемую соотношением (11), учитывая равенство (13) и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_0^t [k_w(t,\tau) + J(t,\tau)]\, \tilde{\varphi}(\tau)\, d\tau + \frac{C_1}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \tag{17}$$

где

$$J(t,\tau) = \int_\tau^t r(t,\tau_1)\, k_w(\tau_1,\tau)\, d\tau_1,$$

и произведя нужные вычисления в последнем выражении, имеем

$$J(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17), окончательно будем иметь (где, ради простоты, принято $C_1 = 1$):

$$\tilde{\varphi}(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tilde{\varphi}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t > 0. \tag{19}$$

Уравнение (19) представляет собой неоднородное интегральное уравнение Абеля второго рода. Применяя теорию дробного дифференцирования и интегрирования [4, с.38–39, 41–43, 84–86], находим решение уравнения (19):

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\}\left[1 + erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)\right], \tag{20}$$

которое также будет решением уравнения (6).

Наконец, учитывая формулы (5), из (20) получаем справедливость теоремы.

Теорема 1. Однородное интегральное уравнение (1) имеет единственное нетривиальное решение:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[1+erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)\right],\quad t>0\,. \tag{21}$$

Более того, решение (21) принадлежит лебегову весовому классу:

$$\sqrt{t}\exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{4a^2}\right\}\left|\varphi(t)-\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right|\in L_\infty(0,\infty),\quad \varepsilon>0\,, \tag{22}$$

имеет особенность в точке $t=0$, и $Ker\{L\}=1$.

4. Решение интегрального уравнения (2). Для этой цели решим уравнение (7). С помощью замен

$$t=y^{-1},\quad \tau=x^{-1},\quad \tilde{\psi}_1(y)=y^{-3/2}\tilde{\psi}(y^{-1})\,, \tag{23}$$

уравнение (7) к виду:

$$y\cdot\tilde{\psi}_1(y)-\int_o^y S_1(y-x)\tilde{\psi}_1(x)dx-y\cdot\int_o^y S_2(y-x)\tilde{\psi}_1(x)dx=0\,, \tag{24}$$

где

$$S_1(z)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi\cdot z}}\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{a^2z}\right\}\right),\quad S_2(z)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}\cdot z^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2z}\right\}. \tag{25}$$

Применяя к уравнению (24) преобразование Лапласа [5, с.216 формула 22.1, с.248 формула 23.96], [6, с.385 формула 9.191], получаем дифференциальное уравнение в образах Лапласа:

$$-\frac{d\tilde{\Psi}_1(p)}{dp}-\frac{1}{2a\sqrt{p}}\left(1-\exp\left\{-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right\}\right)\tilde{\Psi}_1(p)+\frac{d}{dp}\left(\exp\left\{-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right\}\tilde{\Psi}_1(p)\right)=0\,.$$

Последнее равенство приводится к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\tilde{\Psi}_1(p)}{dp}+\frac{1}{2a\sqrt{p}}\cdot coth\frac{\sqrt{p}}{a}\,\tilde{\Psi}_1(p)=0\,, \tag{26}$$

решением которого является функция:

$$\tilde{\Psi}_1(p)=\frac{C}{sh\dfrac{\sqrt{p}}{a}}=C\cdot cosech\frac{\sqrt{p}}{a},\quad C=const.$$

Согласно [7, с.37 формула 1.232.3] эта функция может быть записана в виде ряда:

$$\tilde{\Psi}_1(p)=2C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(2n+1)\sqrt{p}}{a}\right\}. \tag{27}$$

К функции (27) применим обратное преобразование [5, с.253 формула 23.121]. В результате будем иметь:

$$\tilde{\psi}_1(y)=2C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(2n+1)^2}{4a^2y}\right\}. \tag{28}$$

Используя обратные к (23) замены, получаем решение уравнения (7):

$$\tilde{\psi}(t)=\frac{C}{a\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\exp\left\{-\frac{(2n+1)^2}{4a^2}t\right\},\quad t>0\,. \tag{29}$$

Из (29) и (5) непосредственно следует искомое решение интегрального уравнения (2):

$$\psi(t) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp\left\{ -\frac{n^2+n}{a^2} t \right\}, \quad t > 0. \tag{30}$$

Таким образом, установлены следующие теоремы.

Теорема 2. Однородное сопряженное интегральное уравнение (2) имеет единственное нетривиальное решение $\psi(t)$, определяемое соотношением (30). Более того, это решение принадлежит лебегову весовому классу:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{ \frac{\varepsilon t}{4a^2} \right\} \left| \psi(t) - \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right| \in L_1(0,\infty), \quad \varepsilon > 0. \tag{31}$$

Решение (30) не имеет особенности в точке $t = 0$, и $\dim\{Coker[L]\} = \dim\{Ker[L^*]\} = 1$.

Покажем, что решение (30) не имеет особенности в точке $t = 0$. Действительно, из (30) имеем

$$0 < \psi(t) \le C \left[\int_0^{\infty} x \exp\left\{ -\frac{x^2 t}{4a^2} \right\} dx - \int_2^{\infty} x \exp\left\{ -\frac{x^2 t}{4a^2} \right\} dx \right] \exp\left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} =$$

$$= C \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t} \cdot \left[\exp\left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} - \exp\left\{ -\frac{3t}{4a^2} \right\} \right].$$

Отсюда, непосредственно получаем: $\lim\limits_{t \to +0} \psi(t) \le C \frac{2}{a\sqrt{\pi}}$.

Теорема 3. Индекс интегрального оператора L (1) равен нулю:

$$index\{L\} = \dim\{Ker[L]\} - \dim\{Coker[L]\} = 0.$$

Заключение. Установлены весовые лебеговы классы (22) и (31), в которых соответственно интегральные уравнения (1) и (2) имеют единственное нетривиальное решение. Отметим, что сужение этих классов позволяет нам найти семейство классов единственности для уравнений (1) и (2).

Литература:

1. Ким Е.И. Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений с линейными интегралами // Докл.АН СССР. – 1957. – 113. – С.24–27.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1972. – 735 с.
3. Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии нагрузки к временной оси в нуле или на бесконечности // Дифференциальные уравнения. – 2011. – 47, №2. – С.231–243.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
6. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования. Операционное исчисление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. – 524 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 982 с.

Резюме

В статье для однородного с особым ядром интегрального уравнения Вольтерра второго рода и его сопряженного устанавливается существование нетривиального решения в весовых лебеговых классах.

Ключевые слова: Интегральное уравнение Вольтерра, особое ядро, нетривиальное решение, весовое пространство Лебега.

Түйіндеме

Бір текті ерекше ядролы екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуі және оның түйіндес теңдеуі үшін салмақталған Лебег кластарында тривиалдық емес шешімінің бар екендігі дәлелденген.

Кілт сөздер: Вольтерра интегралдық теңдеуі, ерекше ядро, тривиальдық емес шешім, салмақталған Лебег кеңістігі.

Summary

In Lebesgue weight space the existence of the non-trivial solution is stated for the homogeneous Volterra’s integral equation with special kernel and its conjugate equation.

Key words: Volterra’s integral equation, special kernel, non-trivial solution, Lebesgue weight space.

УДК 510.67

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

В.В. ВЕРБОВСКИЙ, доктор физико-математических наук, доцент
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

1 Введение в слабую о-минимальность

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данном разделе мы рассматриваем <-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах.

Пусть$\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$будет линейно упорядоченной структурой. Подмножество A линейно упорядоченной структуры $\mathcal{M}$ называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.*Выпуклымкомпонентом множества* A назовем максимальное выпуклое подмножество множества A. Выпуклым замыкание множества A является наименьшее выпуклое множество, содержащее множествоA. Будем обозначать его A^c.

Слабо о-минимальной структурой [1] называется линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа выпуклых множеств в $\mathcal{M}$. Вспомним, что такая структура $\mathcal{M}$ называется*о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа интервалов и точек вM. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности.

Для двух подмножеств A и B множества M будем писать $A < B$, если $a < b$ при любых$a \in A$ и $b \in B$. будем говорить, что элемент a лежит между двумя множствами B и C, если либо $B < a < C$, либо $C < a < B$. Пара подмножеств(C, D)линейно упорядоченной структуры $\mathcal{M}$

называется*сечением*, если $C \cup D = M$ и $C < D$. Скажем, что сечение (C, D) определимо, если множествоC формульно.

Если дано подмножество I линейно упорядоченной структуры $\mathcal{M}$, то будем говорить, что *левая граница* множества I формульна, если множество $(-\infty, \inf I)$ формульно. Аналогично, *правая граница* множества I формульна, если $(\sup I, +\infty)$ формульно.

По сечению (C, D) можно построить частичный тип $s \in S_{\varphi}(M)$, где $\varphi(x; y, z) \stackrel{\text{def}}{=} y < x < z$, при помощи закона: $c < x < d \in s$ тогда и только тогда, когда $c \in C$ и $d \in D$. Легко понять, что и любой <-тип определяет сечение. Поэтому будем называть такие <-типы сечениями.Если $p \in S_1(M)$, то будет писать (C_p, D_p) для единственного сечения, которое совместно p, то есть для <-части типа p.

Будем предполагать, что элементарная теория T структуры $\mathcal{M}$ слабо о-минимальна.Пусть $\mathcal{N}$ будет достаточно большой насыщенной моделью.

Определение 1.1 [27] Неизолированный 1-тип p над множеством $A \subset N$ называется *иррациональным*, если ни одна из границ множества$p(N)$не является формульной, в противном случае этот тип называется *квазирациональным*. Более того, квазирациональный тип p называется *квазирациональным вправо*, если правая граница множества$p(N)$формульна, в противном случае он называется*квазирациональным влево*.

Сечение называется *иррациональным*, если оно неопределимо, в противном случае оно называется *квазирациональным*. Сечение(C, D)называется *рациональным*, если $\sup C$ лежит в модели. Заметим что, если граница множества $p(N)$ формульна над N, где $p \in S_1(A)$, то эта граница формульна также и над A. Если $p \in S_1(M)$ является иррациональным, то $\sup(C_p)$ не лежит в модели $\mathcal{M}$. Заметим, что 1-тип над моделью определим тогда и только тогда, когда соответствующее сечение определимо.

Определение 1.2 [2] Пусть A и $B \subset N$, а $r \in S_1(A)$. Тогда*окрестность множества* Bв типе r определим следующим образом:

$$V_r(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \in N: \gamma \in H(N) \text{ для некоторой } L(A \cup B) - \text{формулы } H(x),$$
$$\text{такой что } \gamma_1 < H(N) < \gamma_2 \text{ для некоторых } \gamma_1, \gamma_2 \in r(N)$$
$$V_A(B) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{V_r(B): r \in S_1(A)\}$$
$$V_r(\bar{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} V_r(\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}), \text{где } \bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rangle$$

Ниже будет доказано, что 1-формула$H(x)$, определенная с параметрами из множества B, ответвляется над множеством A тогда и только тогда, когда $H(N) \subseteq V_A(B)$.

Лемма 1.3[2] *Пусть A и B— малые множества, а $p \in S_1(A)$. Если δ_1, $\delta_2 \in p(N)$, причем оба либо больше чем$V_p(B) \neq \emptyset$, либо меньше, то $tp(\delta_1/A \cup B) = tp(\delta_2/A \cup B)$. Данное утверждение можно переформулировать иначе.*

Пусть$\delta \in p(N)$*и* $q(x) = tp(\delta/A \cup B)$.

Если$\delta > V_p(B)$, то $q(N) = (\sup V_p(B), \sup p(N))$.

Если$\delta < V_p(B)$, то $q(N) = (\inf p(N), \inf V_p(B))$.

Заметим, что если p— иррациональный тип над M, то$tp(\gamma/M \cup \alpha)$ являетсяконаследником типа p, каким бы ни был $\gamma \in p(N) \backslash V_p(\alpha)$. Таким образом, существует два конаследника, первый меньше $V_p(\alpha)$, а второй — больше.

Другое простое наблюдение заключается в том, что для любого типа $p \in S_1(A)$ и любых двух множеств B и C имеет место равенство: $V_p(B) = V_p(B \cup A)$ и $V_p(B) \subseteq V_p(B \cup C)$.

Следующие леммы очевидны.

Лемма 1.4 *Пусть $p \in S_1(A)$, а B и C такие множества, что $p \perp^w C$, то есть для типа p существует единственное расширение q до полного типанад$A \cup C$. Тогда $V_p(B) \subseteq V_p(B \cup C) = V_q(B)$.*

Лемма 1.5 *Пусть* $p \in S_1(A)$, *а* B *и* C *такие множества, что*$V_p(B) \cap V_p(C) = \emptyset$. *Пусть* $a \in p(N) \backslash V_p(C)$ *будет таким, что* $a < V_p(C)$ *тогда и только тогда, когда* $V_p(B) < V_p(C)$. *Пусть* $q = tp(a/A \cup C)$. *Тогда* $V_p(B) \subseteq V_q(B)$.

Факт 1.6 [2] *Пусть* $p \in S_1(A)$. *Тогда*$E(x,y) \overset{\text{def}}{=} x \in V_p(y)$*является отношением эквивалентностина множестве* $p(N)$ *(не обязательно формульным).*

Ниже будет доказано, что$E(x,y) \overset{\text{def}}{=} x \in V_A(y)$является отношением эквивалентности на множестве $\cup\{p(N): p \in S_1(A)$неалгебраический$\}$ для малого множества A.

Лемма 1.7 *Пусть* $p \in S_1(A)$. *Пусть* B *и* C *будут такими, что* $supV_p(B) = infV_p(C)$. *Тогда* $(-\infty, supV_p(B))$ *формульно над*$A \cup B$, *так же как и над* $A \cup C$.

*Доказательство.*Предположим противное, что $(-\infty, \text{sup}V_p(B))$ не является формульным над $A \cup B$. Тогда $\text{sup}\varphi(N) < supV_p(B)$, какой бы ни была формула $\varphi(x)$ с параметрами из $A \cup B$, удовлетворяющая условию $\varphi(N) \subseteq V_p(B)$. Рассмотрим семейство формул: $\{\text{sup}\varphi(N) < x < infV_p(C): \varphi(N) \subseteq V_p(B)$и $\varphi(x)$— $(A \cup B)$ – формула $\}$.

Это семейство локально совместно, следовательно, реализовано в модели $\mathcal{N}$ некоторым элементом γ. Таким образом, $V_p(B) < \gamma < V_p(C)$, что дает противоречие.

Также можно доказать, что $(-\infty, \text{sup}V_p(B))$ формульно над$A \cup C$.

Лемма 1.8 *Пусть* $p \in S_1(A)$. *Если* $\alpha \in p(N) \backslash V_p(B)$, *то* $V_p(\alpha) \cap V_p(B) = \emptyset$. *Более того, существует элемент между*$V_p(\alpha)$ *и* $V_p(B)$.

*Доказательство.*Предположим противное, что $\beta \in V_p(\alpha) \cap V_p(B)$. В силу факта 1.6 $\alpha \in V_p(\beta)$. Пусть $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,\bar{b})$ будут такими формулами с параметрами из A, где $\bar{b} \in B$, что $\alpha \in \varphi(N\beta) \subseteq V_p(\beta)$ и $\beta \in \psi(N,\bar{b}) \subseteq V_p(B)$. Определим формулу $\theta(x)$ как $\exists y(\psi(y,\bar{b}) \land \varphi(x,y))$. Очевидно, что $\alpha \in \theta(N)$ и, в силу компактности, $\theta(N) \subseteq V_p(B)$. Но это нелепо.

Теперь для упрощения записи предположим, что $V_p(\alpha) < V_p(B)$. Опять предположим противное, что $\text{sup}V_p(\alpha) = \text{inf}V_p(B)$. По лемме 1.1.7 выпуклое множество $(-\infty, \text{sup}V_p(\alpha))$формульно при помощи некоторой формулы $\varphi(x,\alpha)$ с параметрами из A и при помощи некоторой формулы $\psi(x)$ с параметрамииз$A \cup B$. Пусть

$$\theta(x) \overset{\text{def}}{=} \psi(x) \land \forall y(\psi(y) \land x \le y \to \varphi(N,y) = \psi(N))$$

Тогда$\theta(N)$является формульным над $A \cup B$ множеством и содержит α. Действительно, $V_p(\alpha) = V_p(\beta)$ для любого $\beta \in V_p(\alpha)$ в силу факта 1.6. Значит, $(-\infty, \text{sup}V_p(\alpha))$ должно быть формульным и над$A \cup \{\beta\}$. Очевидно, что существует $\gamma < \alpha$, реализующий тип p, такой что $V_p(\gamma) < V_p(\alpha)$. Тогда $\gamma < \theta(N)$, и получаем, что $\alpha \in V_p(B)$, что нелепо.

Определение 1.9 Определим окрестность $V_p(B)$ множества B в -типе p над A индукцией по n. Пусть $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)p$, тип $q = tp(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}/A)$, и $p_n(x_n; \bar{\alpha}_{n-1}) = tp(\alpha_n/A \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\})$. Тогда

$$V_p(B) \overset{\text{def}}{=} \{(\bar{\beta}_{n-1}, \beta_n): \bar{\beta}_{n-1} \vDash q \text{ и } \beta_n \in V_{p_n(x_n;\bar{\beta}_{n-1})}(B)\} \cup$$
$$\{(\bar{\beta}_{n-1}, \beta_n): \bar{\beta}_{n-1} \in V_q(B) \text{ и } \beta_n \vDash p_n(x_n; \bar{\beta}_{n-1})\}$$
$$V_A^n(B) \overset{\text{def}}{=} \cup \{V_p(B): p \in S_n(A)\}$$

Пусть$p \in S_n(A)$и $q \in S_k(A)$. Вспомним, что типы p и q*слабо ортогональны*, если их объединение $p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ определяет полный тип в$S_{n+k}(A)$. Будем обозначать слабую ортогональность символом $p \perp^w q$. В противоположном случае, будем говорить, что эти типы*не слабо ортогональны* и писать $p \not\perp^w q$. Скажем, что кортеж $\bar{\alpha}$*слабо ортогонален* типу $q \in S(A)$ и обозначим это при помощи $\bar{\alpha} \perp^w q$, если $tp(\bar{\alpha}/A) \perp^w q$.

Предположим, что $p \not\perp^w q$ для некоторых типов p и $q \in S_1(A)$. Тогда по определению существуют элементы $\alpha \in p(N)$ и β_1, $\beta_2 \in q(N)$ и некоторая -формула $H(x,y)$, такая что

$NH(\beta_1, \alpha) \wedge \neg H(\beta_2, \alpha)$. Для определенности предположим, что $\beta_1 < \beta_2$. Кроме того, мы можем предположить, что $H(N, \alpha)$ определяет множество вида $(-\infty, \sup H(N, \alpha))$. Действительно, можем рассмотреть формулу $H'(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists z(x < z \wedge H(z, y))$в качестве $H(x, y)$. Кроме того, можем рассматривать H как фукнцию из $p(N)$в множество сечений в N. Так как множество всех сечений линейно упорядоченно, то можем говорить о монотонности формулы H.

Определение 1.10 Формула $H(x, y)$*возрастает* поуна множестве B, если для любых$b_1 < b_2 \in B$ имеет место неравенство $\sup H(N, b_1) \leq \sup H(N, b_2)$.

Формула $H(x, y)$*убывает*поуна множестве B, если для любых $b_1 < b_2 \in B$ имеет место неравенство $\sup H(N, b_2) \leq \sup H(N, b_1)$. Формула $H(x, y)$*монотонна* наB, если она либо возрастает, либо убывает на B.

Заметим, что в этом определении монотонность не является строгой.

Теорема 1.11 [2] *Пусть типы p и $q \in S_1(A)$ не будут слабо ортогональными. Тогда существует A-формула$H(x, y)$, такая что*

1. Для любого $\alpha \in p(N)$ множество $H(N, \alpha)$ вида $(-\infty, \sup H(N, \alpha))$, причем и $H(x, \alpha)$, и $\neg H(x, \alpha)$совместны с $q(x)$;

2. $H(x, y)$ монотонна по y на$p(N)$;

3. Если $H(x, y)$ возрастает по y на $p(N)$, то для любого $\beta \in q(N)$ множество$H(\beta, N)$ является множеством вида $(-\infty, \sup H(\beta, N))$, таким что и $H(\beta, y)$, и $\neg H(\beta, y)$ совместны с $p(y)$, и $H(x, y)$ возрастает по x на $q(N)$;

4. Если $H(x, y)$ убывает по y на $p(N)$, то для любого $\beta \in q(N)$ множество$\neg H(\beta, N)$ является множеством вида $(-\infty, \sup H(\beta, N))$, таким что и $H(\beta, y)$, и $\neg H(\beta, y)$ совместны с $p(y)$, и $\neg H(x, y)$ убывает по x на $q(N)$;

5. Если H_1 и H_2 такие формулы, то H_1возрастаетесли и только если возрастает H_2.

Следствие 1.12 [5] *Пусть p и $q \in S_1(A)$ не являются слабо ортогональными, $H(x, y)$—A-определимая формула, удовлетворяющая заключениям теоремы 1.11. Пусть*

$$E_p(y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} H(x, y) \text{ постоянна на } [y_1, y_2] \cup [y_2, y_1] \text{ по } y$$

$$E_q(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} H(x, y) \text{ постоянна на } [x_1, x_2] \cup [x_2, x_1] \text{ по } x$$

Тогда H образует биекцию τ между определимыми сечениями в $p(N)/E_p$ и $q(N)/E_q$, такую что для любого $(A \cup \bar{\beta})$-определимого сечения $\langle C, D \rangle$ в $p(N)/E_p$ сечение $\langle \tau(C), \tau(D) \rangle$ также является $(A \cup \bar{\beta})$-определимым.

Более того, если H возрастает, то τ сохраняет порядок, то есть для любых сечений $\langle C_1, D_1 \rangle$ и $\langle C_2, D_2 \rangle$ в$p(N)/E_p$имеет место $C_1 \subset C_2$ тогда и только тогда, когда$\tau(C_1) \subset \tau(C_2)$.

Если H убывает, то τ инвертирует порядок.

Определение 1.13 [2] Два типа p и $q \in S_1(A)$ называются*почти ортогональными*, если для некоторой ($\equiv$ любой) реализации a типа p окрестность$V_q(a)$пуста. Будем обозначать это свойство символом $p \perp^a q$.

Заметим, что если два типа слабо ортогональны, то они почти ортогональны, в то время как обратное в общем случае не верно.

Следствие 1.14 [2] *Пусть p и $q \in S_1(A)$ не будут слабо ортогональны. Пусть $H(x, y)$—некоторая определимая надA формула, удовлетворяющая заключениям теоремы 1.11. Тогда*

1. Если H возрастающая, то правая (левая) граница множества $p(N)$ определима тогда и только тогда, когда правая (левая) граница множества $q(N)$ определима;

2. Если H убывающая, то левая (правая) граница множества$p(N)$определима тогда и только тогда, когда правая (левая) граница множества $q(N)$ определима;

3. Таким образом, p определим тогда и только тогда, когда q определим;

4. $\not\perp^w$— отношение эквивалентности на $S_1(A)$.

5. $\not\perp^a$— отношение эквивалентности на $S_1(A)$.

Следствие 1.15 [3] *Пусть* p *и* $q \in S_1(A)$ *не являются слабо ортогональными. Пусть малые множества* B *и* C *будут такими, что каждая из окрестностей*$V_p(B)$, $V_p(C)$, $V_q(B)$*и* $V_q(C)$ *непуста. Тогда следующее верно: существует* $\alpha \in p(N)$ *между* $V_p(B)$ *и* $V_p(C)$ *тогда и только тогда, когда существует*$\beta \in q(N)$ *между* $V_q(B)$ *и* $V_q(C)$.

Лемма 1.16 *Пусть множество* A *малое. Тогда* $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x \in V_A^1(y)$ *является отношением эквивалентности на* $\bigcup\{p(N): p \in S_1(A)$*неалгебраический*$\}$ *(не обязательно формульным).*

*Доказательство.*Пусть $a \in V_A^1(b)$, $p = tp(a/A)$ и$q = tp(b/A)$. Если $p = q$, то лемма следует из факта 1.6. Поэтому предположим, что $p \neq q$. Поскольку$V_p(b)$содержит элементa и, следовательно, не является пустым, типы p и q не являются почти ортогональными. Значит, они не являются и слабо ортогональными. По теореме 1.11 существует монотонная формула$H(x,y)$, такая что $\mathcal{N} \vDash H(a,b)$. Пусть $E_q(y_1,y_2)$ будет отношением эквивалентности, которое гласит, что $\sup H(N,y_1) = \sup H(N,y_2)$. Так как H монотонна, E_q-классы выпуклы. Заметим, что$E(N,b) \subseteq V_q(b)$.

Пусть $\varphi(x,y)$— формула, определимая над A, такая что $a \in \varphi(N,b) \subseteq V_p(b)$. Не умаляя общности, можно предположить, что $\varphi(N,b)$ выпукло и что $H(x,y)$ возрастающая. Пусть формула $\psi(x,y)$ будет такой, что $\psi(a,N)$ является выпуклым компонентом множества $\varphi(a,N)$, содержащим элемент b. Поскольку число выпуклых компонент любого формульногоподмножества конечно, такая формула ψ, действительно, существует.

Пусть b_1 и b_2 реализуют тип q таким образом, что $b_1 < V_q(b) < b_2$. В силу факта 1.6 имеет место $V_q(b_1) < V_q(b) < V_q(b_2)$.Тогда из следствия 1.12 получаем, что $V_p(b_1) < V_p(b) < V_p(b_2)$. Таким образом, $\varphi(N,b_1) < \varphi(N,b) < \varphi(N,b_2)$.Последнее неравенство влечет, что $b_1 < \psi(a,N) < b_2$, то есть имеет место$b \in V_q(a) \subseteq V_A^1(a)$.

Лемма 1.17 *Пусть* p *и* $q \in S_1(A)$ *не являются слабо ортогональными. Пусть* B*— малое множество, такое что для некоторых* $\alpha p(x)$ *и* $\beta q(x)$ *существуют*γ_1 *и* γ_2*, реализующие тип* $p(x)$*, и* γ_3 *и* γ_4*, реализующие тип* $q(x)$*, удовлеторяют условиям:*

1.$\gamma_1 < V_p(\alpha) < \gamma_2$;

2.$(\gamma_1,\gamma_2) \subset p_1(N)$, где $p_1(x) = tp(\alpha/A \cup B)$;

3.$\gamma_3 < V_q(\beta) < \gamma_4$;

4.$(\gamma_3,\gamma_4) \subset q_1(N)$, где $q_1(x) = tp(\beta/A \cup B)$.

Тогда монотонные формулы $H(x,y)$ и $H_1(x,y)$ из теоремы 1.11, действующие между$p(N)$ и $q(N)$ и между $p_1(N)$ и $q_1(N)$, соответственно, имеют один и тот же тип монотонности, то есть либо обе возрастают, либо обе убывают.

*Доказательство.*Следует из пункта (5) теоремы 1.11 и того факта, что $(\gamma_1,\gamma_2) \subset p_1(N)$. Действительно, тогда формула H удовлетворяет заключению теоремы 1.11 и для типов p_1 и q_1.

2. Приятные расширения типов

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые факты, касающиеся полезным способам расширения типов и построения неразличимых последовательностей. Следующие определения и факты достаточно хороши, чтобы дать представление, что представляет из себя ответвляемость в слабо о-минимальных теориях.

Определение 2.1 *Пусть* $n \in \omega$, $\eta \in^n 2$, $p(\bar{x}) \in S_n(A)$*, а* $A \subseteq B \subset N$*. Определим индукцией по* n *расширение типа* $p(\bar{x})$ *до типа из*$S_n(B)$*, которое зависит от* η *и которое обозначим* $p(\bar{x})_B^\eta$.

Пусть $n = 1$. Предположим, что p алгебраический. Тогда α реализует тип$p(\bar{x})_B^\eta$тогда и только тогда, когда α реализует тип $p(\bar{x})$ и либо $\alpha < V_p(B)$, либо $\alpha > V_p(B)$, в зависимости от того, будет ли $\eta(0) = 0$ или $\eta(0) = 1$,соответственно. Если тип p алгебраический, тогда αтогда и только тогда реализует тип $p(\bar{x})_B^\eta$, когда α реализует $p(\bar{x})$.

Пусть $n = m + 1$. Будем говорить, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})$ реализует тип$p(\bar{x})_B^\eta$, если и только если при условии, что $q(\overline{x'})$ является сужением типа $p(\bar{x})$ на первые m переменных, то имеем, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})$ реализует $p(\bar{x})$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ реализует $q(\overline{x'})_B^{\eta,m}$, и α_{m+1} реализует $r(x)_B^{\eta(m+1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, где $r(x) = tp(\alpha_{m+1}/A(\alpha_1, \dots, \alpha_m))$.

Доказательства лемм 2.2 и 2.3 очевидны.

Лемма 2.2 *Пусть T— слабо о-минимальная теория. Пусть тип$p(\bar{x}) \in S_n(A)$и $\eta \in^n 2$. Для $i < \omega$ положим, что $\bar{a}_n$* реализует $p(\bar{x})_{\cup\{\bar{a}_i: i<n\}}^\eta$. *Тогда $\langle \bar{a}_i : i < \omega \rangle$неразличима над A.*

Лемма 2.3 *Пусть $\bar{a}_0 \vDash p(\bar{x}) \in S_n(A)$ и $\bar{a}_1 \vDash p_{\bar{a}}^\tau$ для некоторого $\tau \in^n 2$. Пусть $q(\bar{x}, \bar{y}) = tp(\bar{a}_0, \bar{a}_1/A)$. Если $\bar{a}_2\bar{a}_3 \vDash q_{\bar{a}_0\bar{a}_1}^{\tau\tau}$, то $\bar{a}_2 \vDash p_{\bar{a}_0\bar{a}_1}^\tau$ и $\bar{a}_3 \vDash p_{\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2}^\tau$.*

Пусть $p \in S_n(A)$, $q \in S_1(A)$, а B— малое подмножество модели N. В о-минимальном случае А. Долич доказал в [6], что существует $\tau \in^n 2$, такая что $V_q(B) \cap V_q(\bar{a}) = \emptyset$ для некоторой ($\equiv$ любой) реализации $\bar{a}$ типа p_B^τ. Этот факт может быть легко передоказан для слабо о-минимального случая. Но докажем более сильное утверждение (лемма 2.6), которое позволит доказать также, что ответвляемость совпадает с делимостью.

Лемма 2.4 *Пусть $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in N$ реализует некоторый неалгебраический n-тип p над множеством A. Тогда существует $\tau \in^n 2$, такая что для некоторого ($\equiv$ любого) $\bar{b} \vDash p(\bar{x})_{\bar{a}}^\tau$ пересечение $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(\bar{b}) = \emptyset$ для каждого$i \le n$, где$p_i(x_i; a_1, \dots, a_{i-1}) = tp(a_i/A \cup \{a_j : j < i\})$.*

*Доказательство.*В ходе доказательства я буду использовать следующие обозначения: если $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, то $\bar{a}_k = (a_1, \dots, a_k)$для$k \le n$.

Сперва докажем, что существует $b_1 \vDash p_1$, такой что $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(b_1) = \emptyset$ для каждого $i \le n$.

Пусть некоторая реализация b_1 типа p_1 будет больше, чем $V_{p_1}(\bar{a})$. В силу леммы 1.3 все реализации b_1, типа p_1, которые больше $V_{p_1}(\bar{a})$, имеют одинаковый тип над$A \cup \bar{a}_n$. Обозначим $q_{1,i} \overset{\text{def}}{=} tp(b_1/A \cup \bar{a}_i)$. По лемме 1.4 имеет место $V_{p_1}(b_1) \subseteq V_{q_{1,1}}(b_1) \subseteq \dots \subseteq V_{q_{1,n}}(b_1)$.

Заметим, что если $V_{q_{1,i}}(\bar{a}) \ne \emptyset$, то $\sup V_{p_1}(\bar{a}) = \sup V_{q_{1,i}}(\bar{a})$ для всех $i \le n$, и, следовательно, $V_{q_{1,i}}(\bar{a}) \subseteq V_{p_1}(\bar{a})$. Таким образом, если $V_{q_{1,i}}(\bar{a}) \cap V_{q_{1,i}}(b_1) \ne \emptyset$, то $V_{q_{1,i}}(b_1) \subseteq V_{q_{1,i}}(\bar{a})$, и получается, что $V_{p_1}(b_1) \subseteq V_{p_1}(\bar{a})$. Последнее обозначает, что $b_1 \in V_{p_1}(\bar{a})$. Но такая нелепость недопустима.

Теперь предположим, что $V_{p_i}(b_1) \ne \emptyset$ (в противном случае $V_{p_i}(b_1) \cap V_{p_i}(\bar{a}) = \emptyset$). Тогда$p_i \perp^a q_{1,i-1}$. Уже доказано, что $V_{q_{1,i-1}}(\bar{a}) \cap V_{q_{1,i-1}}(b_1) = \emptyset$. Следовательно, $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(b_1) = \emptyset$.

Заметим, что $q_{1,i-1} \perp^w p_i$ тогда и только тогда, когда $\sup V_{p_1}(\bar{a}_{i-1}) = \sup V_{p_1}(\bar{a}_i)$; данное утверждение выполняется для каждого i.

В качестве следствия выбора элемента b_1 получаем, что для каждого $i \ge 1$ тип $p_i(x_i)$ имеет единственное расширение $p_{i,1} \in S_1(A \cup \bar{a}_{i-1} \cup \{b_1\})$, которое совместно с$V_{p_i}(\bar{a})$.

Утверждение 2.5 *Для каждого $i \ge 1$ имеет место $V_{p_i}(\bar{a}) \subseteq V_{p_{i,1}}(\bar{a})$. Более того, для $i = 1$ выполняется неравенство $V_{p_{1,1}}(\bar{a}) < V_{p_1}(b_1)$.*

*Доказательство.*Из леммы 1.4 следует, что $V_{p_i}(\bar{a}) \subseteq V_{p_{i,1}}(\bar{a})$ для каждого $i > 1$. Подобные аргументы применимы для доказательства случая $i = 1$ и для доказательства неравенства.

Теперь найдем $b_2 \vDash p_2(x_2; b_1)$, такой что $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(\bar{b}_2) = \emptyset$ для каждого i.

Утверждение 1.2.5 *Для каждого $i \ge 1$ имеет место $V_{p_i}(\bar{a}) \subseteq V_{p_{i,1}}(\bar{a})$. Более того, для $i = 1$ выполняется неравенство $V_{p_{1,1}}(\bar{a}) < V_{p_1}(b_1)$.*

Доказательство. Из леммы 1.4 следует, что $V_{p_i}(\bar{a}) \subseteq V_{p_{i,1}}(\bar{a})$ для каждого $i > 1$. Подобные аргументы применимы для доказательства случая $i = 1$ и для доказательства неравенства.

Теперь найдем $b_2 \vDash p_2(x_2; b_1)$, что $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(\bar{b}_2) = \emptyset$ для каждого i.

Пусть $r_2(x_2) = p_2(x_2; b_1)$ и $r_{2,1}(x_2) = tp(b_2/Ab_1a_1)$, где b_2 будет описан позже. Если $p_{1,1} \perp^w r_2$, то существует монотонная формула$H(x,y)$из $r_2(N)$ в $p_{1,1}(N)$. Из-за монотонности H существует такая реализация b_2 типаr_2, что $\sup F(N, b_2) > V_{p_{1,1}}(\bar{a})$ для любой выпуклой Ab_1-определимой $F(x, b_2)$, такой что $\inf p_{1,1}(N) < supF(N, b_2) < supp_{1,1}(N)$.

Тогда $\sup V_{p_1}(\bar{a}) \leq \sup V_{p_{1,1}}(\bar{a}) < infV_{p_1}(b_1, b_2)$ и $V_{p_1}(\bar{a}) \cap V_{p_1}(\bar{b}_2) = \emptyset$.

Если $V_{r_2}(\bar{a}) \neq \emptyset$, то продолжим двигать элемент b_2 вдоль выбранного направления (возрастания или убывания в зависимости от H) пока, наконец, не будет иметь место равенство $V_{r_2}(\bar{a}) \cap V_{r_2}(b_2) = \emptyset$. Для простоты обозначений я буду предполагать, что формула H возрастающая, из чего будет следовать, что $b_2 > V_{r_2}(\bar{a})$, а τ будет равной $\langle 1,1, \ldots, 1\rangle$.

Теперь докажем, что $V_{p_2}(\bar{a}) \cap V_{p_2}(\bar{b}_2) = \emptyset$. Вспомним, что имеет место $V_{p_2}(\bar{a}) \subseteq V_{p_{2,1}}(\bar{a})$ и что $V_{r_2}(\bar{a}) \subseteq V_{r_{2,1}}(\bar{a})$. Если равенство не выполняется, то $V_{p_{2,1}}(\bar{a}) \cap V_{p_{2,1}}(\bar{b}_2) \neq \emptyset$, то есть типы $r_{2,1}$ и $p_{2,1}$ не слабоортоганальны и $V_{r_{2,1}}(\bar{a}) \cap V_{r_{2,1}}(b_2) \neq \emptyset$ в силу леммы 1.15. Очевидно, что $\sup V_{r_2}(\bar{a}) = \sup V_{r_{2,1}}(\bar{a})$. Тогда $V_{r_2}(\bar{a}) \cap V_{r_2}(b_2) \neq \emptyset$, что дает противоречие.

Аналогично можно доказать, что $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(\bar{b}_2) = \emptyset$ для $i > 2$.

Теперь пусть $p_{1,1} \perp^w r_2$. Тогда $\inf V_{p_1}(b_1) = \inf V_{p_1}(\bar{b}_2)$ для любой реализацииb_2 типа r_2. Таким образом, любая реализация $b_2 \in r_2(N) \backslash V_{r_2}(\bar{a})$ удовлетворяет нашим требованиям в силу тех же самых причин. Подобным образом можно доказать, что $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(\bar{b}_2) = \emptyset$ для $i > 2$. Для удовства будем в этих случаях всегда выбирать$b_i > V_{r_i}(\bar{a})$, для того чтобы τ равнялся $\langle 1,1, \ldots, 1\rangle$.

Индукционный шаг. Предположим, что $\bar{b}_m$ уже выбран так, что

1.$V_{p_{i,m-1}}(\bar{a}) \subseteq V_{p_{i,m}}(\bar{a})$ для каждого i;

2.$V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(\bar{b}_m) = \emptyset$ для каждого i;

3.для каждого $i > m$ тип p_i имеет только одно такое расширение $p_{i,m}$ из $S_1(A\bar{a}_{i-1}\bar{b}_m)$, которое совместно с$V_{p_i}(\bar{a})$;

4.для каждого $i > m$ тип r_i имеет только одно такое расширение $r_{i,m}$ из $S_1(A\bar{b}_{i-1}\bar{a}_m)$, которое совместно с$V_{r_i}(\bar{b}_m)$;

5.для каждого $i \leq m$ верно $\sup(V_{p_{i,m}}(\bar{a})) < inf(V_{p_i}(\bar{b}_m))$;

6.для каждого $i \leq m$ верно $\sup(V_{r_{i,m}}(\bar{a})) < inf(V_{r_i}(\bar{b}_m))$.

Найдем $b_{m+1}p_{m+1}(x_{m+1}; b_m)$, такой что имеют место условия (1)–(6) для $m+1$. Пусть $r_{m+1}(x_{m+1}) = p_{m+1}(x_{m+1}, b_m)$.

Пусть i— минимальное число, такое что $p_{i+1,m} \perp^w r_{m+1,i}$. Здесь $r_{m+1,i}$— единственное расширение типа r_{m+1} до полного типа над$A\bar{a}_i\bar{b}_m$. Тогда существует монотонная формула $H(x,y)$ из $r_{m+1,i}(N)$ в $p_{i+1,m}(N)$. В силу монотонности формулы H существует такая реализация b_{m+1} типа $r_{m+1,i}$, что $\sup F(N, b_{m+1}) > V_{p_{i+1,m}}(\bar{a})$ для любой выпуклой формулы $F(x, b_{m+1})$, такой что $\operatorname{Inf} p_{i+1,m}(N) < supF(N, b_{m+1}) < supp_{i+1,m}(N)$

Тогда $\sup V_{p_{i+1}}(\bar{a}) \leq \sup V_{p_{i+1,m}}(\bar{a}) < infV_{p_{i+1}}(\bar{b}_{m+1})$. Из этого следует, что $V_{p_{i+1}}(\bar{a}) \cap V_{p_{i+1}}(\bar{b}_{m+1}) = \emptyset$.

Если $V_{r_{m+1,i}}(\bar{a}) \neq \emptyset$, то продолжим двигать элемент b_{m+1} вдоль выбранного направления (в зависимости от возрастания или убывания формулы H), пока не будет иметь место равенство $V_{r_{m+1,i}}(\bar{a}) \cap V_{r_{m+1,i}}(b_2) = \emptyset$.

Теперь докажем, что $V_{p_{m+1}}(\bar{a}) \cap V_{p_{m+1}}(\bar{b}_{m+1}) = \emptyset$. Вспомним, что $V_{p_{m+1}}(\bar{a}) \subseteq V_{p_{m+1,m}}(\bar{a})$. Если равенство не выполняется, то типы $r_{m+1,m}$ и $p_{m+1,m}$ не являются почти ортогональными, значит по лемме 1.15 имеет место $V_{r_{m+1,m}}(\bar{a}) \cap V_{r_{m+1,m}}(b_{m+1}) \neq \emptyset$.

Аналогично можно доказать, что $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(\bar{b}_{m+1}) = \emptyset$ для $i > m+1$.

Пусть $j < i$. Тогда $r_{m+1,j-1} \perp^{w} p_{j,m}$. Из этого следует, что имеет место $V_{p_{j,m}}(\bar{b}_{m+1}) = V_{p_{j,m}}(\bar{b}_m)$ и что верно $V_{p_j}(\bar{a}) \cap V_{p_j}(\bar{b}_{m+1}) = \emptyset$.

Пусть $j \in (i, m+1)$. Если $V_{p_{j,m}}(\bar{b}_{m+1}) = V_{p_{j,m}}(\bar{b}_m)$, то, очевидно, что верно$V_{p_j}(\bar{a}) \cap V_{p_j}(\bar{b}_{m+1}) = \emptyset$. Предположим, что $V_{p_{j,m}}(\bar{b}_{m+1}) \neq V_{p_{j,m}}(\bar{b}_m)$. Тогда $p_{j,m} \perp^{w} r_{m+1,j-1}$. Поскольку $\sup V_{r_{m+1,j-1}}(\bar{a}) = \sup V_{r_{m+1,i}}(\bar{a})$, так как верно$V_{r_{m+1,j-1}}(\bar{a}) \cap V_{r_{m+1,j-1}}(\bar{b}_{m+1}) = \emptyset$, тогда $V_{p_{j,m}}(\bar{a}) \cap V_{p_{j,m}}(\bar{b}_{m+1}) = \emptyset$ и $V_{p_j}(\bar{a}) \cap V_{p_j}(\bar{b}_{m+1}) = \emptyset$.

Таким образом, (2) доказано. Остальное следует из выбора элемента b_{m+1}.

Лемма 2.6 *Пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in N$ реализует некоторый неалгебраическийn-тип p над множеством A. Тогда существует $\tau \in^n 2$, такая что для некоторого (≡ любого) $\bar{b} \models p(\bar{x})^{\tau}_{\bar{a}}$ и для любого типа $q \in S_1(A)$ имеет место$V_q(\bar{a}) \cap V_q(\bar{b}) = \emptyset$. Значит, $V_A(\bar{a}) \cap V_A(\bar{b}) = \emptyset$.*

*Доказательство.*По лемме 2.4 существует $\tau \in^n 2$, такая что для некоторого (≡ любого) $\bar{b} \models p(\bar{x})^{\tau}_{\bar{a}}$ имеет место $V_{p_i}(\bar{a}) \cap V_{p_i}(\bar{b}) = \emptyset$ для каждого $i \leq n$, где $p_i(x_i; a_1, \ldots, a_{i-1}) = tp(a_i/A \cup \{a_j : j < i\})$.

Пусть$\bar{c} \models p(\bar{x})^{\tau}_{\bar{a}}$и $\bar{b} \models p(\bar{x})^{\tau}_{\bar{c}}$.

Пусть $q \in S_1(A)$. Если$V_q(\bar{a}) = \emptyset$, то, очевидно, что $V_q(\bar{a}) \cap V_q(\bar{b}) = \emptyset$. Поэтому предположим, что $V_q(\bar{a}) \neq \emptyset$. Пусть i будет максимальным числом, таким что тип q имеет единственное расширение до полного типа r над $A \cup \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$. Тогда по лемме 1.4 $V_q(\bar{a}) \subseteq V_r(\bar{a})$, так же как и$V_q(\bar{b}) \subseteq V_r(\bar{b})$.

Рассмотрим тип $p_i = tp(a_i/A \cup \bar{a}_{i-1})$. В силу выбора числа i, типы r и p_i не являются слабо ортогональными. В силу следствия 1.15 имеем, что для любых множеств B и C следующее верно: существует элемент между $V_{p_i}(B)$ и $V_{p_i}(C)$ тогда и только тогда, когда существует элемент между $V_q(B)$ и $V_q(C)$. В силу выбора $\bar{b}$ и $\bar{c}$ получаем, что либо $V_{p_i}(\bar{a}) < V_{p_i}(\bar{c})$ и$V_{p_i}(\bar{c}) < V_{p_i}(\bar{b})$, либо $V_{p_i}(\bar{a}) > V_{p_i}(\bar{c})$ и$V_{p_i}(\bar{c}) > V_{p_i}(\bar{b})$. Следовательно, $V_q(\bar{a}) \cap V_q(\bar{b}) = \emptyset$.Поскольку тип q произволен, получаем, что $V^1_A(\bar{a}) \cap V^1_A(\bar{b}) = \emptyset$.

Следующие две леммы имеют похожие доказательства.

Лемма 2.7 *Пусть $\bar{a}_0$ реализует некоторый неалгебраический -тип p над малым множеством A. Тогда существует $\tau \in^n 2$, такая что для любого k и любой последовательности$\bar{a}_i \models p(x)^{\tau}_{\langle \bar{a}_j : j<i \rangle}$ для $i < k$ имеет место следующее. Пусть $\bar{b} = \langle \bar{a}_i : i < k \rangle$. Тогда$\tau\tau \ldots \tau \in^{nk} 2$ удовлетворяет заключению леммы 2.4 и, следовательно, леммы 1.2.6.*

Доказательство. Вспомним, что в доказательстве леммы 2.4 выбор значения$\tau(m)$зависел от типа монотонности соответствующей формулы $H(x, y)$, при условии, конечно, что такая формула существует. Если Hвозрастающая, то $\tau(m) = 1$, в противном случае $\tau(m) = 0$. Если такая формула H не существует, то выбор значения$\tau(m)$произволен.

Предположим, что для $m = k(n-1) + i$ не существует формулы H, но такая формула существует для $m = kn + i$. Тогда мы можем выбрать $\tau(i)$ в соответствии с типом монотонности новой формулы H. Леммы 1.17 обеспечивает корректность выбора $\tau(i)$.

Лемма 2.8 *Пусть $\bar{a}$ реализует некоторый неалгебраический -тип p над малым множеством A, $\bar{a}_i = \langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ и $p_i(x) = tp(a_i/A \cup \bar{a}_{i-1})$. Тогда существует $\tau \in^n 2$, такая что для любого малого множества B, такого что либо $sup(V_{p_i}(\bar{a})) < inf(V_{p_i})(B)$, либо $inf(V_{p_i}(\bar{a})) > sup(V_{p_i})(B)$ для каждого $i \leq n$ верно, что τ удовлетворяет заключению леммы 1.2.4 и, следовательно, леммы 2.6 уже для типа $q(x) = tp(\bar{a}/A \cup B)$.*

Литература:

1.Macpherson D., Marker D., SteinhornCh.Weakly o-minimalstructuresandrealclosedfields // TransactionsofTheAmericanMathematicalSociety. - 2000. -Vol. 352. - P. 5435–5483.

2. Baizhanov B.S. One-typesinweakly o-minimaltheories // Proceedingsof Informaticsand Control Problems Institute. - Almaty, 1996. - P. 77–90.

3. Baizhanov B.S. Orthogonalityofone-typesinweakly o-minimaltheories // Algebraand Model Theory II / ed. A.G. Pinusand K.N. Ponomaryov. — Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 1999. - P. 3–28.

4. Baizhanov B.S. Expansionof a modelof a weakly o-minimaltheoryby a familyofunarypredicates // TheJournalofSymbolicLogic. — 2001. — Vol. 66, N. 3. — P. 1382–1414.

5. Verbovskiy V. Onexpansionof a weakly o-minimaltheory // Алгебра и теория моделей 5. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. - С. 237–264.

6. DolichA.Forking and independence in o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. - 2004. - Vol. 69. - P. 215–240.

Резюме

Линейно упорядоченная структура называется слабо о-минимальной, если любое ее формульное подмножество есть конечное объединение выпуклых множеств. В данной работе мы изучаем неортогональность типов в слабо о-минимальной теории.Вводим понятие окрестности *n*-типа, которое применимо к описанию неортогональности. Полученные результаты могут быть применимы к описанию ответвляемости формул и типов в слабо о-минимальных теориях.

Ключевые слова: линейно упорядоченная структура, слабо о-минимальная структура, неортогональность типов, формулы.

Түйіндеме

Сызықтық реттелген құрылым әлсіз о-минималды деп аталады, егер оның кез келген формула асты көптік тармағы дөңес көптіктің ақырғы бірлестігі болса. Бұл жұмыста біз әлсіз о-минималды теориядағы түрлердің бейортогоналдығын зерделейміз. Бейортогоналдылықты суреттеуге қолдану үшін n-түрдің төңірегі түсінігін ендіреміз. Алынған нәтижелер тармақталатын формулаларды және әлсіз о-минималды теориялардың түрлерін суреттеуге қолданылуы мүмкін.

Кілт сөздер: сызықтық реттелген құрылым, әлсіз о-минималды құрылым, түрлердің бейортогоналдылығы, формулалар.

Summary

Linearly ordered structure is called o-minimal if her any definable subset is on ultimate integration of convex set. In this work we consider the nonorthogonality of types in low o-minimal theory. We bring in the concept of n-type ambit, that is applicable to the nonorthogonality discreaption. Given results may be applicable to description of types and formulas ramification in low o-minimal theories.

Key words: linearly ordered structure, weakly o-minimal structure, types of non-orthogonality, formulas.

УДК 517.9

УПРОЩЁННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА[1]

А. Ш. АКЫШ, доктор физико-математических наук
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

Введение. Основные нерешенные проблемы теории уравнений Навье-Стокса (УНС) однородной жидкости приведены в [1]-[3] и др.

В [3] Ch. Fefferman ставит две задачи для уравнений Навье-Стокса:

1-ая задача Коши и 2-ая задача с периодическими по пространственным переменным краевыми условиями, и он считает «физически осмысленными только те решения, которые являются бесконечно гладкими функциями».

А в [2] О. А. Ладыженская сформулировала так:

Проблема 1. «Дают ли уравнения Навье-Стокса вместе с начальным и краевыми условиями детерминистическое описание динамики несжимаемой жидкости или не дают?

При решении проблемы 1 выбор фазового пространства и класса обобщенных решений надо предоставлять исследователю, не предписать ему заранее бесконечную гладкость или какую-либо гладкость решений. Требовать же надо одно? чтобы в выделенном классе обобщенных решений имела место теорема единственности. Целесообразно начинать исследование любой начально-краевой задачи (а также задачи Коши) с нахождения классов единственности».

Задача данной работы исследования проблемы 1 и, в итоге доказать единственности и существования решении уравнений Навье-Стокса соответственно из класса функций

$\mathbf{C}\big(0,T;\mathbf{C}(\Omega)\cap \mathbf{W}_2^1(\Omega)\big)$ и $\mathbf{C}\big(0,T;\mathbf{C}(\Omega)\cap \mathbf{W}_{2,0}^{2,1}(\Omega)\big)$.

В ряде работ автора [7]–[9] и др. приведены результаты поисковых исследований с целью обоснование принципа максимума для УНС. Для этого из системы УНС выведено нелинейное уравнение параболического типа для плотности кинетической энергии и выявлено важное свойство этого уравнения – принцип максимума. С помощью последнего показана справедливость принципа максимума и для УНС, что с математической точки зрения является ключевым. Однако доказательства последнего утверждения были осуществлены с помощью сложно-трудоемкой техники. В работе [11] эти трудности преодолены путем непосредственного исследования исходной системы УНС на вопрос о справедливости принципа максимума (упрощённый вариант доказательство принципа максимума для системы УНС). На основе чего в выбранном пространстве доказано единственность слабых и существование сильных решений задач для УНС в целом по времени $t\in[0,\mathrm{T}],\ \forall\mathrm{T}<\infty$.

Здесь итоговые результаты подытожены и доведены до математической строгости.

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для УНС [1] относительно вектора скорости $\mathbf{U}=(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3)$ и давления P в области $\mathrm{Q}=(0,\mathrm{T}]\times\Omega$:

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}-\mu\Delta\mathbf{U}+(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}+\nabla\mathrm{P}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \tag{1a}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{U}=0, \tag{1b}$$

$$\mathbf{U}(0,\mathbf{x})=\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \tag{1c}$$

$$\mathbf{U}(t,\mathbf{x})\big|_{\partial\Omega}=0,\qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega, \tag{1d}$$

---

[1] Работа выполнена при поддержке Казахстанского фонда фундаментальных исследований, проект №0112РК00832.

где $\mathbf{x} \in \Omega \subset R_3$; $\Omega -$ выпуклая область, заполненная однородной жидкостью, а $\partial\Omega -$ граница области Ω, $t \in [0,T]$, $T < \infty$; $0 < \mu -$ динамический коэффициент вязкости; Δ, $\nabla -$ операторы Лапласа и Гамильтона соответственно. Пусть $\overset{0}{\mathbf{J}}(\Omega) -$ пространство соленоидальных векторов, а $\mathbf{G}(\Omega)$ состоит из $\nabla\eta$, где η есть однозначная в Ω функция. Известно [1], [4], ортогональное разложение, $\mathbf{L}_2(Q) = \mathbf{G}(Q) \oplus \overset{0}{\mathbf{J}}(Q)$, причем элементы $\overset{0}{\mathbf{J}}(Q)$ при $\forall t$ принадлежат $\overset{0}{\mathbf{J}}(\Omega)$; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi} -$ вектор функции соответственно внешних сил и начальных данных удовлетворяющие следующим требованиям:

i) $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\overline{Q}) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(Q)$; **ii)** $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(\Omega)$.

Принцип максимума. Векторное уравнение (1a) перепишем в виде системы скалярных уравнений:

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} - \mu\Delta U_\alpha + (\mathbf{U}, \nabla U_\alpha) + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = f_\alpha, \qquad \alpha = \overline{1,3}, \tag{2}$$

где $(\cdot\,,\cdot) -$ скалярное произведение векторов.

Теорема 1. *Пусть* $\overline{\Omega}$ *замкнутая ограниченная область в* R_3 *с границей* $\partial\Omega$*, и* $Q = [0,T] \times \overline{\Omega}$ *- цилиндрическая область в пространстве переменных* $t, \mathbf{x}$*. Предположим, что функции* $\mathbf{U} \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q) \wedge P \in C^1(Q)$ *и удовлетворяют уравнениям (1a), (1b). Тогда, если при некотором* α *функция* $f_\alpha(t,\mathbf{x}) \le 0$ $(f_\alpha(t,\mathbf{x}) \ge 0)$ *в* Q*, то функция* U_α *принимает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в цилиндре* Q *на нижнем основании* $\{0\} \times \overline{\Omega}$ *или на его боковой поверхности* $[0,T] \times \partial\Omega$*, т. е.*

$$U_\alpha(t,x) \le \max\{ \sup_{t=0 \wedge x \in \overline{\Omega}} U_\alpha(t,x), \sup_{t \in [0,T] \wedge x \in \partial\Omega} U_\alpha(t,x) \}, \quad (t,x) \in \overline{Q}, \tag{3a}$$

$$\Big(U_\alpha(t,x) \ge \min\{ \inf_{t=0 \wedge x \in \overline{\Omega}} U_\alpha(t,x), \inf_{t \in [0,T] \wedge x \in \partial\Omega} U_\alpha(t,x) \}, \quad (t,x) \in \overline{Q}\Big), \ \alpha = \overline{1,3}. \tag{3b}$$

Для доказательства теоремы 1 нам нужны некоторые вспомогательные утверждения[2].

Введем обозначение

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{U} - \mathbf{f}(t,\mathbf{x}),$$

и применим операцию div к векторному уравнению (1a). Тогда, с учетом (1b), получаем задачу Неймана для уравнения Пуассона, связывающее давление P с вектором скорости $\mathbf{U}$:

$$-\Delta P = \operatorname{div}\mathbf{I}, \quad \left.\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T], \qquad \text{где } \mathbf{I} = (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} \tag{4}$$

так как $\mathbf{Rn}|_{\partial\Omega} = 0$ и $\mathbf{In}|_{\partial\Omega} = 0$ соответственно в силу $\mathbf{R} \in \overset{0}{\mathbf{J}}(\Omega)$ и (1d), где $\mathbf{n}$ есть единичный вектор внешней нормали в точке $\mathbf{x}$ границы $\partial\Omega$.

По условию теоремы 1 функция $div\mathbf{I}$ непрерывна в ограниченной области Ω при $\forall t \in [0,T]$, тем самым

$$div\mathbf{I} \in L_p(\Omega), \ p \ge 1 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{5}$$

[2] Эти утверждения будут доказываться в допущениях теоремы 1.

Кроме того $\int\limits_{\Omega} div\mathbf{I}d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{In}d\mathbf{x} = 0$, т. е. выполнено необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Неймана (4).

Решение задачи (4) представим в виде объемного потенциала

$$\mathrm{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{\operatorname{div}\mathbf{I}(\xi)}{r(\mathbf{x},\xi)}d\xi, \quad \forall \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}].\cdot \tag{6}$$

Следуя [5], отметим одно известное свойство объемного потенциала (6).

Лемма 1*. Если для плотности* $div\mathbf{I}$ *имеет место (5), то функция* $\mathrm{P}(\mathbf{x})$*, определяемая формулой (6), гармонична в каждой из областей, дополнительных к* Ω*.*

Доказательство. Ясно, что внутри области Ω существует конечное или счетное множество областей $\Omega_{\mathrm{j}},\ \mathrm{j} = 1, 2, \cdots,$ дополнительных к Ω. Пусть $\Omega_{\mathbf{j}}$ – одна из этих областей. Возьмем произвольную внутреннюю по отношению к $\Omega_{\mathbf{j}}$ подобласть Ω_{j}^{1} и пусть $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{j}}^{1}$. Тогда в интеграле (6) расстояние r ограничено снизу положительным числом δ равным наименьшему расстоянию между точками границ областей $\Omega_{\mathbf{j}}$ и Ω_{j}^{1}. Откуда следует, на основании известной теоремы о свойствах интеграла типа потенциала, что $\mathrm{P}(\mathbf{x}) \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega_{\mathrm{j}}^{1})$; так как Ω_{j}^{1} произвольная внутренняя подобласть $\Omega_{\mathbf{j}}$, то $\mathrm{P}(\mathbf{x}) \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega_{\mathrm{j}})$ и, в частности,

$$\Delta\mathrm{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{I})\ \Delta_{\mathbf{x}}\{\frac{1}{r(\mathbf{x},\xi)}\}d\xi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{j}}, \tag{7}$$

т. е. функция P гармонична в области $\Omega_{\mathbf{j}}$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Для этого воспользуемся известным приемом [6, стр. 510]. Предположим от противного, т. е. функция $\mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $\mathrm{M}_0(\mathrm{t}^0,\mathbf{x}^0)$ внутри области $\overline{\mathrm{Q}} = [0,\mathrm{T}] \times \overline{\Omega}$.

$$\mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{M}_0) > \max\{\sup_{\mathrm{t}=0 \wedge \mathrm{x} \in \overline{\Omega}} \mathrm{U}_{\alpha}(t,\mathbf{x}), \sup_{\mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}] \wedge \mathrm{x} \in \partial\Omega} \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x})\} = C \geq 0 \tag{8}$$

Обозначим $m = \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{M}_0) - \mathrm{C} > 0$ и введем функцию

$$\mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x}) = \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \frac{m}{2}(1 - \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}).$$

Отсюда при всех $(\mathrm{t},\mathbf{x})$ из $\partial\Omega \times [0,\mathrm{T}]$ или $\{0\} \times \overline{\Omega}$ имеем

$$\mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{t}^0,\mathbf{x}^0) \geq \mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \frac{m}{2}.$$

То есть функция $\mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x})$ также принимает свое максимальное значение в некоторой точке $M_1(\mathrm{t}^1,\mathrm{x}^1) \in Q$, причем $\mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{M}_1) \geq \mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{M}_0) \geq \mathrm{m}$. И пусть вместе с ним в момент времени t^1 функция $\mathrm{P}(\mathrm{t},\mathbf{x})$ в какой-нибудь другой точке $\mathbf{x}^e \in \Omega$ достигает своего экстремального значения.

Теперь построим внутреннюю область Ω_e, дополнительной к Ω так, чтобы точки $\mathrm{M}_1(\mathrm{t}^1,\mathbf{x}^1) \in \Omega_e$ и $\mathrm{M}(\mathrm{t}^1,\mathbf{x}^e) \in \Omega_e$. Тогда, используя утверждения леммы 1, получим $\nabla\mathrm{P}\big|_{\Omega_e} = 0.$

Теперь выпишем все необходимые условия максимума функции H_α в точке M_1:

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial t} \ge 0;\ \ \Delta \mathrm{H}_\alpha \le 0;\ \nabla \mathrm{H}_\alpha = 0;\ \ \nabla \mathrm{P} = 0. \tag{9}$$

Из уравнения (2) с учетом условий (9) найдем для точки M_1 цепь неравенств

$$\mathrm{LH}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathrm{H}_\alpha}{\partial t} - \mu \Delta \mathrm{H}_\alpha + (\mathbf{H}, \nabla \mathrm{H}_\alpha) + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{M}_1) - \mathrm{f}_\alpha + \frac{m}{2\mathrm{T}} \ge \frac{m}{2\mathrm{T}} > 0.$$

Это означает, что неравенство (8) неверно. Следовательно, справедливо (3а). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1, следуя [6], нетрудно получить доказательство следующего утверждения:

Следствие. *Если вектор-функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют условиям* ***i)*** *и* ***ii),*** *то для решений* $\mathbf{U}(\mathrm{t}, \mathbf{x})$ *задачи (1) справедлива оценка*

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(Q)} \le \|\mathbf{\Phi}\|_{\mathbf{C}(Q)} + \mathrm{T}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}(Q)} = \mathrm{A}_1,\ \forall \mathrm{T} < \infty, \tag{10}$$

где $\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\overline{Q})} = \max\limits_{1\le\alpha\le3} \sup\limits_{\overline{Q}} |U_\alpha(\mathrm{t}, \mathbf{x})|$.

Слабые обобщенные решения. Умножим уравнение (1а) на произвольную вектор-функцию $\mathbf{Z}(\mathrm{t}, \mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathbf{W}_2^1(\mathrm{Q}) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q})$, равную нулю при $(\mathrm{t} = \mathrm{T}) \wedge (\mathbf{x} \in \partial\Omega)$. Произведение проинтегрируем по области Q и с помощью интегрирования по частям из первых двух и четвертого слагаемых производные перенесем с $\mathbf{U}$ на $\mathbf{Z}$. В результате получим

$$\int\limits_{\mathrm{Q}} \Big(-\mathbf{U}\,\mathbf{Z}_{\mathrm{t}} + \mu \sum_{\mathrm{k}=1}^{3} \nabla \mathrm{U}_{\mathrm{k}} \nabla \mathrm{Z}_{\mathrm{k}} + (\mathbf{U}, \nabla)\,\mathbf{U}\,\mathbf{Z}\Big)\, \mathbf{dx}\, \mathrm{dt} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{\Phi}\,\mathbf{Z}(0, \mathbf{x})\, \mathbf{dx} + \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathbf{f}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{dx}\mathrm{dt}. \tag{11}$$

Снова уравнения (1а) умножим на градиент произвольной однозначной функции $\eta \in \mathbf{L}_2(0, \mathrm{T}; \mathrm{W}_2^1(\Omega))$. А затем проинтегрируем по области Q, используя из [4] ортогональности подпространств $\mathbf{G}(\mathrm{Q})$, $\overset{0}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q})$ в итоге находим тождество

$$\int\limits_{\mathrm{Q}} \nabla \mathrm{P}\, \nabla \eta\, \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{dt} = -\int\limits_{\mathrm{Q}} (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U}\, \nabla \eta\ \mathbf{dx}\, \mathrm{dt}. \tag{12}$$

Определение[3]1. *Назовем слабым обобщенным решением начально-краевой задачи Навье-Стокса (1) вектор - функцию* $\mathbf{U}$ *и функцию* P *из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{C}(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathbf{L}_\infty(0, \mathrm{T}; \mathbf{L}_2(\Omega)) \cap \mathbf{L}_2(0, \mathrm{T}; \mathbf{W}_{2,0}^{1}(\Omega)) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q});$$

$$\mathrm{P} \in \mathrm{L}_2(0, \mathrm{T}; \mathrm{W}_2^1(\Omega)) \wedge \Big(\int\limits_{\Omega} \mathrm{P}(\mathrm{t}, \mathbf{x})\, \mathbf{dx} = 0, \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]\Big) \tag{13}$$

и удовлетворяющие тождествам (11), (12) *при любых*

$$\mathbf{Z}(\mathrm{t}, \mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathbf{W}_2^1(\mathrm{Q}) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q}) \wedge \Big(\mathbf{Z}\big|_{(t=\mathrm{T}) \wedge (\mathbf{x} \in \partial\Omega)} = 0\Big);\ \ \eta(\mathrm{t}, \mathrm{x}) \in \mathrm{L}_2\big(0, \mathrm{T}; \mathrm{W}_2^1(\Omega)\big).$$

Для справедливости этого определения все интегралы, входящие в (11), (12) должны быть конечны для любых $\mathbf{Z}, \eta$ из указанных классов.

Лемма 2 *[7-9]. Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям* ***i), ii)****, то для слабых обобщенных решений задачи (1) справедливы оценки:*

$$\|\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L}_\infty((0,T];\mathbf{L}_2(\Omega))} \le 2\,\|\mathbf{\Phi}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + 4\mathrm{T}^2\, \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_\infty((0,T];\ \mathbf{L}_2(\Omega))} = \mathrm{A}, \tag{14}$$

[3] Здесь, благодаря принципу максимума, слабые решения рассматриваются в более узком классе функций, чем в [1].

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{0}^{t}\|\nabla U_k(\tau)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}d\tau \le \frac{1}{\mu}\|\mathbf{\Phi}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \frac{2T^2}{\mu}\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_\infty(0,T;\ \mathbf{L}_2(\Omega))} = A_2, \tag{15}$$

$$\|\nabla P\|^2_{\mathbf{L_2}(Q)} \le \|(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L_2}(Q)} \le 9A_1^2\, A_2 \equiv A_3. \tag{16}$$

Неравенства аналогичные (14), (15) известны давно, например, из [1; стр.184]. Для доказательства (16) используем следующую цепочку

$$\|(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} =$$

$$= \int_Q ((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U})^2\,\mathbf{dx}dt \le 3\int_Q |\mathbf{U}|^2\sum_{k=1}^{3}|\nabla U_k|^2\,\mathbf{dx}dt \le 9\max_k\|U_k\|^2_{L_\infty(Q)}\sum_{k=1}^{3}\int_0^T\|\nabla U_k\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}dt. \tag{17}$$

Здесь были последовательно использованы неравенства Коши-Буняковского для векторного произведения и Гельдера при $p=\infty \wedge q=1$. Из (12) и (17) на основании оценок (10), (15), следует (16). Лемма 3 доказана.

Из принципа максимума и полученных априорных оценок следует единственность решения задачи (1):

Теорема 2 *[7–9]. Если входные данные* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют соответственно требованиям* ***i), ii)****, тогда задача (1) имеет слабое единственное обобщенное решение* $\mathbf{U}$ и P *удовлетворяющие тождествам (11), (12) при любых* $\mathbf{Z}$ *и* η *из определения 1.*

Доказательство. Пусть пара функций $\{\mathbf{U},P\}$ и $\{\mathbf{U}^*,P^*\}$ – два решения задачи (1). Положим $\mathbf{V}=\mathbf{U}-\mathbf{U}^*$, $R=P-P^*$, тогда обычным приемом из задачи (1) переходим к тождеству

$$\int_{Q_t}\Big(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\mathbf{V} - \mu\Delta\mathbf{V}\mathbf{V} + (\mathbf{V},\nabla)\mathbf{U}\mathbf{V} + (\mathbf{U}^*,\nabla)\mathbf{V}\mathbf{V} + \nabla R\mathbf{V}\Big)\mathbf{dx}d\tau = 0, \quad \forall t\in(0,T]. \tag{18}$$

В силу ортогональности [1], [4] подпространств $\overset{0}{\mathbf{J}}(Q)$ и $\mathbf{G}(Q)$ четвертый и пятый члены (18) исчезают. Все остальные члены преобразуем с помощью интегрирования по частям, тогда из (18) найдем

$$0.5\|\mathbf{V}(t)\|^2_{\mathbf{L_2}(\Omega)} + \mu\sum_{k=1}^{3}\int_0^t\|\nabla V_k(\tau)\|^2_{\mathbf{L_2}(\Omega)}d\tau = -\int_{Q_t}\sum_{k,\beta=1}^{3}V_\beta\frac{\partial V_k}{\partial x_\beta}U_k\mathbf{dx}d\tau. \tag{19}$$

Интеграл в правой части оценим последовательно по неравенству Гельдера при $p=\infty\wedge q=1$ и Юнга $p=2$ в результате получим неравенство

$$\int_{Q_t}\sum_{k,\beta=1}^{3}V_k\frac{\partial V_k}{\partial x_\beta}U_k\mathbf{dx}d\tau \le A_1\varepsilon/2\sum_{k=1}^{3}\int_0^t\|\nabla V_k(\tau)\|^2_{\mathbf{L_2}(\Omega)}d\tau + A_4\int_0^t\|V(\tau)\|^2_{\mathbf{L_2}(\Omega)}d\tau, \quad A_4=\frac{3A_1}{2\varepsilon}.$$

Принимая во внимание оценки (10), (15) и, воспользовавшись последним неравенством при $\varepsilon=2\mu/A_1$ из (19), найдем

$$\frac{d}{dt}\big(\exp(-A_4 t)\|\mathbf{V}(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\big) \le 0, \quad \forall t\in(0,T].$$

Отсюда заключим, что $\mathbf{V}\equiv 0,\ \forall t\in(0,T]$, т. е., что решения $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$ совпадают.

Теперь с помощью функционального уравнения (12), учитывая только что доказанной единственности $\mathbf{U}$, получим интегральное соотношение для ∇R

$$\int_Q \nabla R\nabla\eta\,\mathbf{dx}dt = 0,\ \forall t\in[0,T].$$

Отсюда, благодаря $\forall\nabla\eta$, получаем $\nabla R \equiv 0$, т. е. градиент давления P из определения 1 находится единственным образом через вектор-функцию $\mathbf{U}$. Теорема 2 доказана.

Сильные решения.

Определение 2. *Если в области* Q *решение начально-краевой задачи Навье-Стокса (1) имеет всевозможные обобщенные производные того же порядка, что и сами уравнения, то это обобщенное решение называется сильным.*

Теорема 3*[7–9]. Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям* **i), ii)** *и граница области* $\partial\Omega \in C^2$*, тогда у задачи (1) существует сильное единственное обобщенное решение* $\mathbf{U}$ *и* P *из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{W}^{2,1}_{2,0}(Q) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}_\infty(Q);\ P \in L_2(0,T; W^2_2(\Omega)) \wedge (\int_\Omega P dx = 0,\ \forall t \in [0,T]),$$

удовлетворяющие уравнениям (1а) и почти всюду в Q *и для них имеют место оценки:*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} \le \mu \sum_{k=1}^{3} \| \nabla \Phi_k \|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + 5A_3 + 2T \| f \|^2_{\mathbf{L}_\infty(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega))} \equiv A_5, \tag{20}$$

$$\| \Delta \mathbf{U} \|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} \le A_5 / \mu^2 \equiv A_6, \tag{21}$$

$$\| \nabla U_k \|^2_{\mathbf{L}_\infty(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega))} \le A_5 / \mu \equiv A_7,\ k = \overline{1,3}; \tag{22}$$

$$\| \nabla P \|^2_{\mathbf{L}_\infty(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega))} \le 3A_1^2\, A_7 \equiv A_{10}. \tag{23}$$

$$\| \mathbf{U} \|_{\mathbf{L}_2(0,T;\mathbf{W}^2_2(\Omega))} \le A_8 \| \Delta \mathbf{U} \|_{\mathbf{L}_2(Q)}, \qquad A_8 - const, \tag{24}$$

$$\| P \|_{L_2(0,T;W^2_2(\Omega))} \le A_p \| \Delta P \|_{\mathbf{L}_2(Q)} \le A_c \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{L}_2(0,T;\mathbf{W}^2_2(\Omega))},\ A_p, A_c - const. \tag{25}$$

Для доказательства неравенства (20) из уравнения (1а) найдем тождество

$$\int_{Q_t} \big(\mathbf{U}_t - \mu\Delta\mathbf{U}\big)^2 \mathbf{dx}\, d\tau = \int_{Q_t} \big(\mathbf{f} - (\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U} - \nabla P\big)^2\ \mathbf{dx}\, d\tau\,.$$

И будем возводить в квадрат подынтегральные выражения. После этого парное произведение в левой части преобразуем с помощью интегрирования по частям, а в правой части таковые усилим по неравенству Юнга при $\varepsilon{=}1 \wedge p{=}2$. Затем переходим к неравенству

$$\int_{Q_t} \mathbf{U}^2_t\, \mathbf{dx}\, d\tau + \mu^2 \int_{Q_t} (\Delta\mathbf{U})^2 \mathbf{dx}\, d\tau + \mu \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega |\nabla U_k|^2 \mathbf{dx} \le$$

$$\le \mu \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega \| \nabla \Phi_k \|^2 \mathbf{dx} + 2 \int_{Q_t} \mathbf{f}^2\, \mathbf{dx} d\tau + 5 \int_{Q_t} ((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U})^2\, \mathbf{dx}\, d\tau.$$

Из последнего неравенства с учетом (16) получаем оценки (20)-(22) для сильных обобщенных решений задачи (1). Причем (22) является лучшей оценкой, чем (15).

Уравнения (1а) умножим на ∇P и результат проинтегрируем по области Ω. Откуда получим неравенство

$$\int_\Omega |\nabla P|^2 \mathbf{dx} \le \int_\Omega |\mathbf{U}|^2 \sum_{k=1}^{3} |\nabla U_k|^2 \mathbf{dx}\,.$$

Правую часть, оценив по неравенству Гельдера при $p = 1 \wedge q = \infty$, имеем

$$\int_\Omega |\nabla P|^2 \mathbf{dx} \le 3 \|\mathbf{U}(t)\|^2_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} |\nabla U_k|^2 \mathbf{dx},\ \forall t \in [0,T].$$

Отсюда, используя (22) приходим к (23).

Теперь покажем, что $\Delta P \in L_2(Q)$. Так как граница области $\partial\Omega \in C^2$ найдем оценку (24), используя неравенства из [1, стр.26], справедливого для любой функции $U(x) \in W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^2(\Omega)$:

$$\| U \|_{W_2^2(\Omega)} \le A_8 \| \Delta U \|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,T], \; A_8 - const.$$

Оценку для ΔP находим из соотношения

$$\Delta P = \sum_{\alpha,k=1}^{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_k},$$

найденного из векторного уравнения (1a) с применением операцию div с учетом (1b).

Возведя обе части последнего соотношения в квадрат, проинтегрируем по области Q. Затем, произведя оценку в правой части, получаем неравенство

$$\int_Q (\Delta P)^2 \,\mathbf{dx}dt \le 9 \sum_{k,\alpha=1}^{3} \int_Q \left| \frac{\partial U_k}{\partial x_\alpha} \right|^4 \mathbf{dx}\,dt, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{26}$$

Из теорем вложения Соболева имеем, что $W_2^2(\Omega) \subset W_{6-\varepsilon}^1(\Omega), \; \forall \varepsilon > 0$. Отсюда, при $\varepsilon = 2$, следует неравенство

$$\| U_k \|_{W_4^1(\Omega)} \le A_9 \| U_k \|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,T],$$

где A_9 – некоторая постоянная. На основании последнего неравенства и (21), (24) из (26) найдем оценку (25). Вектор-функция $\mathbf{U}$ и функция давление P подчинённые оценкам (20)-(25), удовлетворяют уравнениям (1a) почти всюду в области Q. Теорема 3 доказана.

Замечание. Теорема 2 о единственности слабых обобщенных решений задачи (1) справедлива для их сильных и классических решений.

Литература:

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – Москва: Наука, 1970. - 288 с.
2. Ладыженская О. А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование гладкость //УМН. – 2003. - 58:2(350). - С. 45-78.
3. Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation //http: //claymath.org /Millenium Prize Problems/Navier-Stokes Equations. Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000, P.1-5.
4. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики //Известия АН СССР, сер., математическая. - 1954. - №18. – С.3–50.
5. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. –Москва: «Высшая школа». - 1977. - 431 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1976. - 520 с.
7. Akysh A. Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation \\ http://www.ksu.kz /Вестник КарГУ им. академика Е. А. Букетова. - 2012. - №2 (66). –С. 4–16.
8. Akysh A. Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation \\ USA, 2012. arXiv.org: 1204.2668v [math-ph]. 16 page.
9. Акыш А. Ш. О принципе максимума для уравнений Навье-Стокса //Вестник Ошского государственного университета. - 2013. - №1. - С.32-37.
10. Акыш А. Ш. Об экстремальных свойствах решения уравнений Навье-Стокса //Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений.

Междунар. конф. посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 18-24 августа 2013 г.) / Тез. докладов. – 2013. - С.76.

11. Акыш А. Ш. Об экстремальных свойствах решения уравнений Навье-Стокса //Известия НАН РК, сер.,физико-математическая. - 2013. - №4. – С.75-80.

Резюме

В работе показана справедливость принципа максимума для уравнений Навье-Стокса (УНС). На основе чего в выбранном пространстве доказаны единственность слабых и существование сильных решений задачи для УНС в целом по времени $t \in [0, T], \forall T < \infty$.

Ключевые слова: Системы нелинейных уравнений Навье–Стокса, принцип максимума для уравнений Навье–Стокса, единственность слабых решений уравнений Навье–Стокса, существование сильных решений уравнений Навье–Стокса.

Түйіндеме

Жұмыста үш өлшемді бейсызықты Навье-Стокс теңдеулері (НСТ) үшін максимум принципінің орындалатындығы көрсетілген. Осының негізінде таңдалынған кеңістікте НСТ-ға қойылған есептің барлық уақыт $t \in [0, T], \forall T < \infty$ аралығында әлсіз шешуінің жалқылығы мен қоса әлді шешуінің болатындығы дәлелденген.

Кілт сөздер: бейсызықты Навье–Стокс теңдеулерінің жүйесі, Навье–Стокс теңдеулері үшін максимум қағидасы, Навье–Стокс теңдеулерінің әлсіз шешуінің жалқылығы, Навье–Стокс теңдеулерінің әлді шешуінің болатындығы.

Summary

In the work the validity of principle of maximum for the Navier-Stokes equations (NSE) is shown. On what basis in the chosen space are proved uniqueness of weak generalized solutions and existence of strong solutions of a problem for NSE as a whole on time $t \in [0, T], \forall T < \infty$.

Key words: nonlinear Navier-Stokes equations system, the principle of maximum for Navier-Stokes equations, uniqueness of weak generalized solutions of Navier-Stokes equations, existence of strong solutions of Navier-Stokes equations.

УДК 517.5

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Р.ОЙНАРОВ, доктор физико-математических наук, профессор,
А.М.АБЫЛАЕВА, М.М.МУРАТБЕКОВ
Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, г.Астана, Республика Казахстан

1.Введение. Пусть $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и v, w-весовые функции т.е. неотрицательные, измеримые на $I = (0, +\infty)$ функции такие, что $v \in L_1^{loc}(I)$, $w \in L_1(0, t)$, $\forall t > 0$. Положим $W(x) = \int\limits_0^x w(s) ds, \ x > 0$.

Рассмотрим вопрос об ограниченности из $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$ интегрального оператора

$$Kf(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{W(s)} \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} w(s)ds, \qquad x \in I, \tag{1}$$

где $L_{p,w}$ - пространство всех измеримых на I функции таких, что

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^\infty |f(s)|^p w(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2}$$

При $W(x) = x$ и $w(s) = 1$ критерий ограниченности из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ оператора (1) вытекает из результатов работы [1].

Для любого линейного оператора $K : L_{p,w} \to L_{q,v}$ положим $\|K\| = \|K\|_{L_{p,w} \to L_{q,v}}$.

Функция $W(\cdot)$ не убывает и непрерывна на I, причем $W(0) = 0$. Используя эти свойства функции W, для любого $k \in Z$ определим $x_k = \sup\{x: \ W(x) \le 2^k, x \in I\}$. Очевидно, что $0 < x_k < x_{k+1}, \ \forall k \in Z$ и если $x_k < +\infty$, то $W(x_k) = 2^k, \ 2^k \le W(x) \le 2^{k+1}$ при $x_k \le x \le x_{k+1}$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} w(s)ds = 2^{k-1}, \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(s)ds \le 2^k$. Положим $I = \bigcup_k [x_k, x_{k+1})$. Эти факты ниже используется без напоминания.

Если $x_{k_0} < \infty$ и $x_{k_0+1} = +\infty$ для некоторого $k_0 \in Z$, то $x_{k_0+i} = +\infty, \ \forall i \ge 1$. В этом случае, считая, что $[x_{k_0+i}, x_{k_0+i+1}) = \varnothing$, $\forall i \ge 1$ и интегралы от x_{k_0+i} до x_{k_0+i+1}, $\forall i \ge 1$ равны нулю.

Функция $\ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ обладает следующими свойствами:

$$\frac{W(s)}{W(x)-W(s)} > \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} > \frac{W(s)}{W(x)}, \qquad W(x) > W(s) > 0. \tag{3}$$

Функция $\ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ убывает по $W(x)$ и возрастает по $W(s)$ при $W(x) > W(s) > 0$, а из неравенство (3) следует, что и функции $W(x) \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$, $\frac{1}{W(s)} \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ убывает по $W(x)$ и возрастает по $W(s)$ при $W(x) > W(s) > 0$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial W(x)} \left(W(x) \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right) = \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} - \frac{W(s)}{W(x)-W(s)} < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial W(s)} \left(\frac{1}{W(s)} \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right) = \frac{1}{W^2(s)} \left(\frac{W(s)}{W(x)-W(s)} - \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right) > 0,$$

при $W(x) > W(s) > 0$.

Далее, неопределенности вида $0 \cdot \infty$. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ полагаются равными нулю. Соотношение вида $A << B$ означает $A \le \beta B$, где положительная постоянная β, быть может, зависит от параметров p и q, а соотношение $A \approx B$ интерпретируется, как $A << B << A$. Множество всех целых чисел обозначается Z.

2.Вспомогательные утверждения. Для доказательства основных утверждении нам необходимы некоторые факты. Наряду с оператором (1) рассмотрим оператор

$$Hf(x)=\frac{1}{W(x)}\int_0^x f(s)w(s)ds,\ \ x>0. \tag{4}$$

Теорема А. *Пусть* $1<p\le q<\infty$. *Оператор* H *ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,\upsilon}$ *тогда и только тогда, когда*

$$A=\sup_{x>0}W^{1/p'}(x)\left(\int_x^\infty W^{-q}(s)v(s)ds\right)^{1/q}<\infty, \tag{5}$$

при этом $\|H\|\approx A$.

Теорема В. *Пусть* $0<q<p<\infty,\ p>1$. *Оператор* H *ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,\upsilon}$ *тогда и только тогда, когда*

$$B=\left(\int_0^\infty W^{\frac{p(q-1)}{p-q}}(x)\left(\int_x^\infty \frac{v(s)}{W^q(s)}ds\right)^{\frac{p}{p-q}}w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}<\infty, \tag{6}$$

при этом $\|H\|\approx B$.

3. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1<p\le q<\infty$. *Оператор* K *ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,\upsilon}$ *тогда и только тогда, когда*

$$A=\sup_{x>0}W^{1/p'}(x)\left(\int_x^\infty \frac{v(s)}{W^q(s)}ds\right)^{1/q}<\infty,$$

при этом $\|K\|\approx A$.

Доказательство: *Необходимость.* Пусть оператор K ограничен из $L_{p,w}$ в $L_{q,\upsilon}$. Легко видеть, что для $f\ge 0$

$$Kf(x)=\int_0^x \frac{f(s)}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}w(s)ds\ge\int_0^x\frac{f(s)}{W(s)}\frac{W(s)}{W(x)}w(s)ds=\frac{1}{W(x)}\int_0^x f(s)w(s)ds=Hf(x). \tag{7}$$

Следовательно, $\|K\|\ge\|H\|$. На основании Теоремы А $A<\infty$ и $\|H\|\approx A$. Отсюда

$$A<<\|K\|<\infty. \tag{8}$$

Достаточночть. Пусть $A<\infty$. Так как $\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}\ge 0$ при $W(x)>W(s)>0$, то достаточно установить неравенство вида $\|Kf\|_{q,v}\le C\|f\|_{p,w}$ для $f\ge 0$. Пусть $f\in L_{p,w}$, тогда имеем

$$\|Kf\|_{q,\upsilon}^q=\int_0^\infty v(x)\left(\int_0^x\frac{f(s)}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}w(s)ds\right)^q dx=$$

$$=\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}}v(x)\left[\left(\int_0^{x_{k-1}}+\int_{x_{k-1}}^x\right)\frac{f(s)}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}w(s)ds\right]^q dx<<$$

$$<<\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_0^{x_{k-1}}\frac{f(s)}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}w(s)ds\right)^q dx+$$

$$+\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_{x_{k-1}}^{x}\frac{f(s)}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}w(s)ds\right)^q dx=J_1+J_2 \tag{9}$$

Оценим J_1 и J_2 по отдельности, используя монотонность функции $W(x)\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$, $\frac{1}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ при $W(x)>W(s)>0$, получим

$$J_1=\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_0^{x_{k-1}}\frac{f(s)}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}w(s)ds\right)^q dx\le$$

$$\le\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_0^{x_{k-1}}\frac{f(s)}{W(x_{k-1})}\ln\frac{W(x_k)}{W(x_k)-W(x_{k-1})}w(s)ds\right)^q dx=$$

$$=(\ln 2)^q\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\frac{1}{2^{(k-1)q}}\left(\int_0^{x_{k-1}}f(s)w(s)ds\right)^q dx<<$$

$$<<\int_0^{\infty}\frac{v(x)}{W^q(x)}\left(\int_0^{x}f(s)w(s)ds\right)^q dx=\|Hf\|_{q,\upsilon}^q \tag{10}$$

На основании Теоремы А из (10) следует, что

$$J_1<<A^q\|f\|_{p,w}^q. \tag{11}$$

Применяя неравенство Гельдера при $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, имеем

$$J_2=\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_{x_{k-1}}^{x}\frac{f(s)}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}w(s)ds\right)^q dx\le$$

$$\le\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_{x_{k-1}}^{x}|f(x)|^p\,w(s)ds\right)^{q/p}\left(\int_{x_{k-1}}^{x}\frac{w(s)}{W^{p'}}\ln^{p'}\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}ds\right)^{q/p'}dx\le$$

$$\le\sum_{k\in Z}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_0^{x}\frac{w(s)}{W^{p'}(s)}\ln^{p'}\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}ds\right)^{q/p'}dx\left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}|f(s)|^p\,w(s)ds\right)^{q/p}=$$

$$=\beta^{q/p'}\sum_{k\in Z}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}|f(s)|^p\,w(s)ds\right)^{q/p}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{v(x)}{W^{q-\frac{q}{p'}}(x)}dx<<$$

$$<<\sum_{k\in Z}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}|f(s)|^p\,w(s)ds\right)^{q/p}2^{\frac{qk}{p'}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{v(x)}{W^q(x)}dx\le$$

$$\le\sum_{k\in Z}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}|f(s)|^p\,w(s)ds\right)^{q/p}(W(x_k))^{\frac{q}{p'}}\int_{x_k}^{\infty}W^{-q}(x)v(x)dx\le$$

применяя неравенство Иенсена, получим

$$\le A^q\left(\sum_{k\in Z}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}+\int_{x_k}^{x_{k+1}}\right)|\,f(s)\,|^p\; w(s)ds\right)^{q/p} << A^q\|f\|_{p,w}^q\,, \tag{12}$$

где $\beta=\int_0^1\frac{1}{t^{p'}}\ln^{p'}\frac{1}{1-t}dt$.

Из (9), (11) и (12) имеем

$$\|K\|^q << (A^q+A^q)\|f\|^q << A^q\|f\|^q\,.$$

Тем самым справедливо оценка $\|K\| << A$, что вместе с (8), дает $\|K\| \approx A$. Теорема доказано.

Теорема 2. Пусть $0<q<p<\infty$, $1<p<\infty$. Оператор K ограничен из $L_{p,w}$ в $L_{q,\upsilon}$ тогда и только тогда, когда

$$B=\left(\int_0^\infty W^{\frac{p(q-1)}{p-q}}(x)\left(\int_x^\infty\frac{v(s)}{W^q(s)}ds\right)^{\frac{p}{p-q}}w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}<\infty,$$

при этом $\|K\|\approx B$.

Доказательство: *Необходимость.* Справедливость необходимой части, как в теореме 1, вытекает из (7) и из теоремы В, имеем $\|K\|\ge\|H\|$, тогда $\|H\|\approx B$. Отсюда

$$B << \|K\| < \infty\,. \tag{13}$$

Достаточночть. Пусть $B<\infty$. Поступая как в теореме 1, получаем (11).

На основании теоремы В и из (12) следует, что

$$J_1 << B^q\|f\|_{p,w}^q\,. \tag{14}$$

Из оценки J_2 в теореме 1 имеем

$$J_2 << \sum_{k\in Z}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}|\,f(s)\,|^p\; w(s)ds\right)^{q/p} 2^{\frac{qk}{p'}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{v(x)}{W^q(x)}dx \le$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{p}{q}$ и $\frac{p}{p-q}$, получим

$$\le\left(\sum_k\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}|\,f(x)\,|^p\; w(s)ds\right)^{q/p}\left(\sum_k\left(2^k\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{v(x)}{W^q(x)}dx\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} =$$

$$=\left(\sum_k\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}|\,f(x)\,|^p\; w(s)ds\right)^{q/p}\left(\sum_k\left(W(x_k)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}2^k\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{v(x)}{W^q(x)}dx\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} =$$

$$=\left(\sum_k\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}|\,f(x)\,|^p\; w(s)ds\right)^{q/p}\left(\sum_k\left(W(x_k)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}w(s)ds\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}W^{-q}(x)v(x)dx\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} <$$

$$< \left(\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} | f(x)|^p \; w(s)ds \right)^{q/p} \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(W(s)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\int_s^\infty W^{-q}(x)v(x)dx \right)^{\frac{p}{p-q}} w(s)ds \right)^{\frac{p-q}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} | f(x)|^p \; w(s)ds \right)^{q/p} \left(\int_0^\infty \left(W(s)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\int_s^\infty W^{-q}(x)v(x)dx \right)^{\frac{p}{p-q}} w(s)ds \right)^{\frac{p-q}{p}} =$$

$$\le B^q \left(\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} | f(x)|^p \; w(s)ds \right)^{q/p} \le B^q \|f\|_{p,w}^q . \qquad (15)$$

Из (9), (14) и (15) следует

$$\|Kf\|_{q,v}^q << B^q \|f\|_{p.w}^q$$

Следовательно $\|K\| << B$, что вместе с (13), дает $\|K\| \approx B$. Теорема доказана.

Литература:

1. Абылаева А.М., Омирбек М. Весовая оценка для интегрального оператора с логарифмической особенностью. // Известия, серия физико-математическая. – Алматы: НАН РК, 2005. - №1. –С.38-48.

Резюме

В работе рассматриваются весовые оценки оператора дробного интегрирования с логарифмическим ядром. Основным результатом работы является получение критерия выполнения весовых оценок при достаточно слабых условиях на ядра интегральных операторов. Кроме того, установлен критерий ограниченности некоторых классов интегральных операторов в весовых пространствах Лебега. Интегральные операторы рассматриваются из одного Лебегово пространства в другое весовое Лебеговое пространство когда параметры имеют виды $1 < p \le q < \infty$ *и* $0 < q < p < \infty$, $1 < p < \infty$.

Ключевые слова: логарифмическое ядро, весовые функции, ограниченность интегрального оператора, неравенство Гелдера, неравенство Иенсена.

Түйіндеме

Жұмыста логарифмдік ядросы бар бөлшекті интегралдау операторының салмақты бағалау мәселесі қарастырылған. Жұмыстың негізгі нәтижесі интегралдық операторларының ядросына айтарлықтай әлсіз шарттарда салмақты бағалау орындау критериясын алуы болып табылады. Сонымен қатар Лебегтің салмақты кеңістігіндегі интегралдық операторларының кейбір кластарының шенелімдігінің критерийі тағайындалды. Параметрлер $1 < p \le q < \infty$ *и* $0 < q < p < \infty$, $1 < p < \infty$ түрінде болған жағдайда бір Лебег кеңістіктен басқа салмақты Лебег кеңістігіне көшу интегралдық операторы қарастырылған.

Кілт сөздер: логарифмдік ядро, салмақты функциялар, интегралдық оператордың шенелімділігі, Гельдер теңсіздігі, Иенсен теңсіздігі.

Summary

We consider weighted estimates of fractional integration operator with logarithmic kernel. The main result is to obtain a criterion of the weighted score under rather weak conditions on the kernels of the integral operators. In addition, a criterion for certain limited classes of integral operators in weighted Lebesgue spaces. Integral operators are considered one of the Lebesgue space to another weighted Lebesgue space when options are kind $1< p \le q <\infty$ and $0< q < p <\infty$, $1< p <\infty$.

Key words: Logarithmic kernel, weighted functions, boundedness integral operators, Gelder inequality, Jensen's inequality.

УДК 517.43

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ РАНГА ДВА И ИХ ДЕФОРМАЦИИ, ЗАДАННЫЕ СОЛИТОННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А.Е. МИРОНОВ, доктор физико-математических наук,
В.Н. ДАВЛЕТШИНА
Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. Л. С. Соболева СО РАН, г.Новосибирск, Россия

И.М. Кричевером и С.П. Новиковым в [1], [2] введен замечательный класс точных решений солитонных уравнений - решений ранга $l>1$. Этот класс выделяется следующим условием: совместные собственные функции операторов, входящих в пару Лакса (Захарова-Шабата), и вспомогательных линейных операторов, коммутирующие с ними, образуют векторное расслоение ранга l над спектральной кривой.

В этой работе мы изучаем решения ранга два системы

$$V_t=\frac{1}{4}(6VV_x+6W_x+V_{xxx}),\ W_t=\frac{1}{2}(-3VW_x-W_{xxx}). \qquad (1)$$

Эта система эквивалентна условию коммутации самосопряженного оператора четвертого порядка и кососимметричного оператора третьего порядка:

$$[L_4,\partial_t-A]=0, \qquad (2)$$

где

$$L_4=(\partial_x^2+V(x,t))^2+W(x,t),$$

$$A=\partial_x^3+\frac{3}{2}V(x,t)\partial_x+\frac{3}{4}V_x(x,t).$$

При этом мы предполагаем, что при каждом t оператор L_4 входит в коммутативное кольцо дифференциальных операторов ранга 2, т.е. все операторы, коммутирующие с L_4, имеют четный порядок. По-другому это означает, что размерность пространства совместных собственных функций L_4 и коммутирующего с ним оператора L_{4g+2} при фиксированных общих собственных числах z,w равна двум:

$$dim_C\{\psi: L_4\psi=z\psi, L_{4g+2}\psi=w\psi\}=2.$$

Точка $P=(z,w)$ лежит на гиперэллиптической спектральной кривой Г заданной уравнением

$$w^2=F_{2g+1}(z)=z^{2g+1}+c_2z^{2g}+\dots+c_0. \qquad (3)$$

Решение ранга один системы (1) (т.е. когда L_4 коммутирует с оператором нечетного порядка) были найдены Дринфельдом и Соколовым [3]. Сложность построения решений ранга два заключается в том, что существует только классификация, полученная Кричевером [4], коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов высокого ранга, но в общем случае такие операторы не найдены. Кричевером и Новиковым [1] найдены операторы ранга два, отвечающие эллиптическим спектральным кривым (на ранг три этот результат обобщен Моховым [5]). В случае спектральных кривых рода больше один известны только примеры операторов ранга $l > 1$ [6]-[12].

В [13] изучались операторы ранга 2 L_4 и L_{4g+2} отвечающие гиперэллиптической спектральной кривой (3). Операторы $L_4 - z$, $L_{4g+2} - w$ $(P = (z, w) \in \Gamma)$ имеют общий правый делитель L_2

$$L_4 - z = \tilde{L}_2 L_2, \qquad L_{4g+2} - w = \tilde{L}_{4g} L_2$$

где

$$L_2 = \partial_x^2 - \chi_1(x, P)\partial_x - \chi_0(x, P).$$

Функции χ_0, χ_1 - рациональные функции на Γ, удовлетворяющие уравнениям Кричевера-Новикова.

При $g = 1$ операторы L_2 и L_4 найдены Кричевером и Новиковым [1]. При $g \geq 1$ справедлива теорема [13]

Теорема 1. (М.) Имеют место равенства:

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \qquad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q},$$

где Q - полином степени g по z

$$Q = z^g + \alpha_{g-1}(x, t)z^{g-1} + \cdots + \alpha_0(x, t),$$

$\alpha_i(x)$ - некоторые функции. Полином Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z) = 4(z - W)Q^2 - 4V(Q_x)^2 + (Q_{xx})^2 - 2Q_xQ_{xxx} + 2Q(2V_xQ_x + 4VQ_{xx} + Q_{xxxx}). \qquad (4)$$

Из теоремы 1 получено

Следствие 1. (М.) Функция Q удовлетворяет линейному уравнению

$$Q_{xxxxx} + 4VQ_{xxx} + 6V_xQ_{xx} + 2Q_x(2z - 2W + V_{xx}) - 2QW_x = 0.$$

Потенциалы V и W имеют вид

$$V = \left.\frac{Q_{xx}^2 - 2Q_xQ_{xxx} - 4F_g(z)}{4Q_x^2}\right|_{z=\gamma_j},$$

$$W = -2(\gamma_1 + \cdots + \gamma_g) - c_{2g}.$$

Основная цель этой работы - понять как меняется полином Q при условии, что V и W удовлетворяют (1).

Теорема 2. Предположим, что потенциалы V и W самосопряженного оператора

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x, t))^2 + W(x, t),$$

коммутирующего с оператором L_{4g+2} удовлетворяют системе (1), тогда полином Q определенный выше, удовлетворяет уравнению

$$Q_t = \frac{1}{2}(-3VQ_x - Q_{xxx}). \qquad (5)$$

Отметим, что уравнение (5) задает симметрию уравнения (4).

Замечание. Аналогично можно получить эволюционное уравнение на Q, если в (2) заменить оператор A на кососимметричный оператор порядка $2n + 1$. Например, при $n = 2,3$ выполнены следующие уравнения:

$$Q_{t_2}=\frac{1}{8}(-4QW_x+2V_xQ_{xx}+Q_x(8z-5V^2+2W-V_{xx})-2VQ_{xxx}), \tag{6}$$

$$Q_{t_3}=\frac{1}{32}(-14V^3Q_x-2V\big(-6(2QW_x+V_xQ_{xx})+Q_x(24z+18W+5V_{xx})\big)-$$
$$6V^2Q_{xxx}+2(6W_xQ_{xx}-(8z+6W+V_{xx})Q_{xxx}+Q_{xx}V_{xxx}+4QW_{xxx})-$$
$$Q_x(7V_x^2+10W_{xx}+V_{xxxx})). \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) также задают симметрию уравнения (4). При $g=1$ уравнение (5) сводится к уравнению Кричевера-Новикова, а уравнения (6) и (7) к уравнениям из иерархии Кричевера-Новикова:

$$W_{t_1}=\frac{48F_1(\gamma_1(x))-W_{xx}^2+2W_xW_{xxx}}{8W_x}, \tag{8}$$

$$W_{t_2}=\frac{1}{128W_x^3}(-1280F_1^2(\gamma_1(x))-16\left(4c_2+2W-F_{1xx}(\gamma_1(x))\right)W_x^4-$$
$$45W_x^4+100W_xW_{xx}^2W_{xxx}+160F_1(\gamma_1)(5W_{xx}^2-2W_xW_{xxx})+$$
$$20W_x^2\left(-W_{xxx}^2+2W_{xx}\big(4F_{1x}(\gamma_1(x))-W_{xxxx}\big)\right)+8W_x^3W_{xxxxx}), \tag{9}$$

$$W_{t_3}=\frac{1}{1024W_x^5}(28672F_1^3(\gamma_1(x))+64W_x^6W_{xx}-1575W_{xx}^6+4998W_x\times$$
$$W_{xx}^4W_{xxx}+8960)F_1^2(\gamma_1(x))(-7W_{xx}^2+2W_xW_{xxx})-28W_x^2W_{xx}^2\times$$
$$(139W_{xxx}^2+66W_{xx}W_{xxxx})+56W_x^3(-7W_{xxx}^3+34W_{xx}W_{xxx}W_{xxxx}+$$
$$9W_{xx}^2W_{xxxxx})16F_1(\gamma_1(x))(-1813W_{xx}^4+4W_x(24(2c_2-W)W_x^3+$$
$$595W_{xx}^2W_{xxx}-7W_x(11W_{xxx}^2+18W_{xx}W_{xxxx})+14W_x^2W_{xxxxx})+8W_x^4\times$$
$$\big(-(3W_{xxxx}^2+4W_{xxx}W_{xxxxx})+2W_{xx}(6(2c_2-W)W_{xx}-7W_{xxxxxx})\big)+$$
$$16W_x^5(4(-2c_2+W)W_{xxx}+W_{xxxxxxx}). \tag{10}$$

Было бы очень интересно записать уравнение (5) в более эффектном виде при $g\geq 2$.

Мы строим явные решения уравнений (8)-(10) с помощью $\wp$- функции Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$(\wp'(z))^2=4\wp^3(z)+g_2\wp^2(z)+g_1\wp(z)+g_0.$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Уравнение (8) имеет решение

$$W(x,t_1)=-40\wp^2(at_1+x)-\frac{20}{21}(8a+7g_2)\wp(at_1+x)+b,$$
$$V(x,t_1)=-10\wp(at_1+x)-\frac{2a}{21}-\frac{5g_2}{6}.$$

Аналогично уравнения (9) и (10) имеют следующие решения

$$W(x,t_2)=24\wp^2(at_2+x)+4g_2\wp(at_2+x)+\frac{4a}{5}+\frac{456g_0}{5g_2}-\frac{2g_2^2}{45},$$
$$V(x,t_2)=-8\wp(at_2+x)-\frac{2g_2}{3}.$$

$$W(x,t_3)=-40\wp^2(at_3+x)+\mathrm{c}\wp(at_3+x)+d,$$

$$V(x,t_3)=-10\wp(at_3+x)+c,$$

где a,b,c,d —константы.

По-видимому, также как и уравнение Кричевера-Новикова, уравнение (5) должно играть важную роль при построении решений ранга два уравнения Кадомцева-Петвиашвили, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым.

Литература:

1. Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. // Успехи мат. наук. – 1980. - Т. 35. - В. 6.- С. 47-68.
2. Кричевер И. М., Новиков С. П. Двумеризованная цепочка Тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения. // Успехи мат. наук. - 2003.- Т. 58. - В. 3(351). - С. 51-58.
3. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Симметрии в уравнении Лакса. // БФАН СССР - 1982. - С. 3-22.
4. Кричевер И. М. Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов. // Функц. анализ и его прил. – 1978.- Т. 12. - В. 3.- С. 20-31.
5. Мохов О. И. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения. // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1989. - Т. 35. - В. 6. - С. 1291-1315.
6. Миронов А. Е. Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два. // Матем. сб. - 2004.- Т. 195. - В. 5. - С 103-114.
7. Миронов А. Е. О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2. // Сиб. электрон. матем. изв. - 2009. - № 6. - С. 533-536.
8. Миронов А.Е. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2. // Функц. анализ и его прил. - 2005.- Т. 39. - В. 3. - С. 91-94.
9. Мохов. О. И. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения. // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1989. – Т.53. - В.6. - С. 1291-1315.
10. Mokhov O. I. On commutative subalgebras of the Weyl algebra that are related to commuting operators of arbitrary rank and genus.- arxiv: 1201.5979.- (http://arxiv.org).
11. Давлетшина В. Н. О самосопряженных коммутирующих операторах ранга два. // Сиб. электрон. матем. изв. - 2013. - № 10. - С. 109-112.
12. Zuo D. Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2. / D. Zuo // SIGMA. - 2012. - № 8. - P. 044.
13. Mironov A. E. Self-adjoint commuting ordinary differential operators.- arxiv: 1107.3356.- (http://arxiv.org).
14. Latham G. A., Previato E. Darboux transformations for higher-rank Kadomtsev--Petviashvili and Krichever-Novikov equations. / G. A. Latham, E. Previato // Acta Appl. Math., 1995.- № 39. – P. 405-433.

Резюме

В этой работе изучаются уравнения коммутации самосопряженных дифференциальных операторов ранга 2 порядка 4 и 4g+2. При $g = 1$ эти уравнения деформации сводятся к уравнениям иерархии Кричевера-Новикова. Строятся явные решения таких уравнений.

Ключевые слова: коммутирющие дифференциальные операторы, солитонные уравнения, спектральная теория.

Түйіндеме

Жұмыста екі рангалы 4 және 4g+2 ретті өзара қабысқан дифференциялдық операторлардың коммутация теңдеулері зерделенеді. Бұл деформация теңдеулері $g = 1$ болған кезде Кричевер-Новиков бағыныштылық сатысы теңдеулеріне келіп тіреледі. Бұндай теңдеулердің нақты шешімдері тұрғызылады.

Кілт сөздер: коммутацияланатын дифференциял операторлар, солитондық теңдеулер, спектралды теория.

Summary

Commutativity equations for self-adjoint rank two differential operators of orders 4 and 4g+2 are studied in this article. When g = 1, these equations reduce to the equations of deformation hierarchy of Krichever-Novikov. We construct explicit solutions of such equations.
Key words: commuting differential operators, soliton equations, spectral theory.

УДК 510.67

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИ МИНИМАЛЬНЫХ ГРУПП

Б.Ш. КУЛПЕШОВ, доктор физико-математических наук, профессор
Международный университет информационных технологий, г.Алматы,
Республика Казахстан

Вспомним, что *циклическим порядком* называется трехместное отношение K, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

(co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \to K(y,z,x))$;

(co2) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \wedge K(y,x,z) \leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$;

(co3) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \to \forall t [K(x,y,t) \vee K(t,y,z)])$;

(co4) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \vee K(y,x,z))$.

Отношение $K_0(x,y,z)$ определим как $K(x,y,z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z$.

Подмножество A циклически упорядоченной структуры $N = \langle N, =, K, ... \rangle$ называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ либо любой элемент из $K(a, N, b)$ содержится в A, либо любой элемент из $K(b, N, a)$ содержится в A. Максимальное выпуклое подмножество некоторого множества A назовем *выпуклым компонентом* множества A.

Вспомним, что группа G, снабженная линейным порядком <, называется *линейно упорядоченной*, если для любых элементов a, b и c из неравенства $a < b$ следуют неравенства $ac < bc$ и $ca < cb$. Если же группа G снабжена циклическим порядком K, то она называется *циклически упорядоченной*, если для любых элементов a, b, c и d из предложения $K(a,b,c)$ следуют предложения $K(ad,bd,cd)$ и $K(da,db,dc)$.

Легко заметить, что линейно упорядоченная группа является циклически упорядоченной группой, если циклический порядок определен следующим образом:

$$K(x,y,z) := x \leq y \leq z \vee y \leq z \leq x \vee z \leq x \leq y$$

Естественными примерами циклически упорядоченных, но не линейно упорядоченных групп являются ненулевые подгруппы мультипликативной группы S^1 комплексных чисел, равных по модулю единице, при условии, что они содержат элементы конечного порядка. Действительно, умножение в данной группе является поворотом единичной окружности, а поворот не может изменить взаимное расположение трех элементов. Поскольку линейно упорядоченная группа является группой без кручения, рассматриваемые группы не могут быть линейно упорядочены.

Вспомним, что линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, ... \rangle$ является *слабо о-минимальной*, если любое параметрически определимое множество является объединением конечного числа выпуклых множеств. В [1] было установлено, что слабо о-минимальные упорядоченные группы являются абелевыми и делимыми.

Следующее понятие введено и первоначально исследовано в [2]. Циклически упорядоченная структура $M = \langle M, =, K, ... \rangle$ является *слабо циклически минимальной*, если любое параметрически определимое множество является объединением конечного числа выпуклых множеств. Вспомним, что такая структура $M = \langle M, =, K, ... \rangle$ является *циклически минимальной*, если любое параметрически определимое множество является объединением конечного числа интервалов и точек. Таким образом, слабая циклическая минимальность является обобщением циклической минимальности.

Под *(слабо) циклически минимальной группой* далее будем подразумевать (слабо) циклически минимальную циклически упорядоченную группу.

В работе [3] были исследованы циклически минимальные группы; в частности, показано, что они являются абелевыми и делимыми. В настоящей работе мы исследуем слабо циклически минимальные группы.

Лемма 1. Пусть G – циклически упорядоченная группа, H – бесконечная подгруппа группы G такая, что $H = \bigcup_{i=1}^{s} H_i$, H_i выпукло для каждого $i \le s$. Тогда для любых $i, j \le s$ $|H_i| = |H_j|$.

Доказательство Леммы 1. Очевидно, что для любого $g \in H$ $gH = H$, т.е. $H = \bigcup_{j=1}^{s} gH_j$. Не умаляя общности, предположим, что $1 \in H_1$ и существуют $y_1, y_2, \ldots, y_s \in G \setminus H$ такие, что $K_0(y_1, H_1, y_2, H_2, \ldots, y_s, H_s)$. Возьмем произвольный $g \in H$. Тогда имеем $K_0(gy_1, gH_1, gy_2, gH_2, \ldots, gy_s, gH_s)$. Следовательно, для любых $g \in H$ и $i \le s$ существует $j \le s$ такой, что $gH_i = H_j$, т.е. $|H_i| = |H_j|$ для любых $i, j \le s$. □

Лемма 2. Пусть G – циклически упорядоченная группа, H – бесконечная подгруппа группы G такая, что $H = \bigcup_{i=1}^{s} H_i$, H_i выпукло для каждого $i \le s$, $1 \in H_1$. Тогда H_1 – подгруппа группы H.

Доказательство Леммы 2. Возьмем произвольные $g, h \in H_1$. Поймем что $gh \in H_1$. Так как $1 \in H_1$, то $gH_1 \cap H_1 \neq \varnothing$ и $hH_1 \cap H_1 \neq \varnothing$, т.е. $gH_1 = H_1 = hH_1$, откуда $gh \in H_1$. Аналогично если $g \in H_1$, то $g^{-1}H_1 \cap H_1 \neq \varnothing$, откуда $g^{-1}H_1 = H_1$, т.е. $g^{-1} \in H_1$. □

Лемма 3. Пусть G – циклически упорядоченная группа, H – собственная бесконечная подгруппа группы G такая, что $H = \bigcup_{i=1}^{s} H_i$, H_i выпукло для всех $i \le s$, $1 \in H_1$. Тогда для каждого $i \le s$ H_i не имеет концевых точек в G.

Доказательство Леммы 3. Допустим противное: существует $j \le s$ такой, что H_j имеет концевую точку в G. Не умаляя общности, предположим что a – правая концевая точка множества H_j. Возьмем произвольные $b \in H_j$ и $c \in (b, a)$. Тогда имеем $K_0(b, c, a)$ и $c \in H_j$. Действуя на элементы b, c, a слева элементом b^{-1}, получаем $K_0(1, b^{-1}c, b^{-1}a)$, откуда $b^{-1}c \in H$, $b^{-1}a$ – правая концевая точка для H_1. Таким образом, можем считать, что H_1 имеет правую концевую точку. Обозначим ее через a. Возьмем произвольный $b \in G$ с условием $K_0(1, b, a)$, откуда $b \in H_1$, и следовательно в силу Леммы 2 $b^{-1} \in H_1$. Из условия $K_0(1, b, a)$ в силу Леммы 5.3 [2] имеет место $K_0(a^{-1}, b^{-1}, 1)$, т.е. a^{-1} – левая концевая точка для H_1. Таким образом, имеем две возможности для H_1: $H_1 = (a^{-1}, a)$ или $H_1 = [a^{-1}, a]$. Пусть вначале $H_1 = (a^{-1}, a)$. Возьмем произвольный $c \in (a^{-1}, 1)$, т.е. $K_0(a^{-1}, c, 1)$. Тогда $K_0(1, ca, a)$, откуда $ca \in H$. Так как $c \in H$, то получаем что $a \in H$, противореча нашему предположению. Пусть теперь $H_1 = [a^{-1}, a]$, т.е. $a, a^{-1} \in H$. Если $a^2 = 1$, то тогда $H = G$, противореча тому, что H – собственная подгруппа. Таким образом, $a^2 \neq 1$. Предположим вначале что $K_0(1, a, a^2)$. Возьмем произвольный $c \in (a, a^2)$, откуда $K_0(a, c, a^2)$. Тогда получаем $K_0(1, ca^{-1}, a)$. Следовательно, имеем $ca^{-1} \in H$, откуда $c \in H$. Таким образом, для любого $c \in (a, a^2)$ следует, что $c \in H$, противореча тому, что a – правая концевая точка для H_1. Пусть теперь $K_0(1, a^2, a)$. Возьмем произвольный элемент $c \in G$ с условием $K_0(1, a, c)$. Тогда имеем $K_0(a^2, a, c)$, откуда $K_0(a, 1, ca^{-1})$, т.е. $K_0(1, ca^{-1}, a)$. Следовательно, $ca^{-1} \in H$, откуда $c \in H$, опять противореча тому что a – правая концевая точка для H_1. □

Предложение 4. Любая слабо циклически минимальная группа является плотно упорядоченной.

Доказательство Предложения 4. Достаточно показать, что для любого неединичного $a \in G$ существует $c \in G$ такой, что $K_0(1, c, a)$. Допустим противное: $G \models \neg\exists x\, K_0(1, x, a)$. Если $a^m = 1$ для некоторого $m \in \omega$, то доказательство следует из Теоремы 5.1 [2]. Предположим, что a имеет бесконечный порядок. Так как $(1, a) = \varnothing$, то $K_0(1, a, a^2)$, и следовательно, $K_0(a^m, a^{m+1}, a^{m+2})$ для любого $m \in \omega$, т.е. $K_0(a^i, a^j, a^k)$ для всех неотрицательных целых чисел $i < j < k$. Причем для каждого $j \geq 0$ интервалы (a^j, a^{j+1}) являются пустыми. Так как $(1, a) = \varnothing$, то $(a^{-1}, 1) = \varnothing$, и следовательно, $(a^{-(j+1)}, a^{-j}) = \varnothing$ для любого $j > 0$ и $K_0(a^{-k}, a^{-j}, a^{-i})$ для любых неотрицательных целых $i < j < k$. Поймем, что существует $b \in G$ с условием $b^2 = a$. Допустим противное: не существует $b \in G$ с условием $b^2 = a$. Рассмотрим следующую формулу: $\phi(x) := \exists y[y^2 = x]$. Очевидно, что для любого четного m $a^m \in \phi(G)$. Поймем что для любого нечетного m $a^m \notin \phi(G)$ (тогда получим противоречие со слабой циклической минимальностью). Возьмем произвольное нечетное m и предположим что $a^m \in \phi(G)$, т.е. существует $b \in G$ с условием $b^2 = a^m$. Тогда $b^2 = a^{m-1}a$, откуда $a^{-(m-1)}b^2 = a$. В силу четности $m - 1$ $a = (a^{-\frac{m-1}{2}})^2 b^2$. Если b имеет конечный порядок, то b перестановочен с любым элементом группы G. Если b имеет бесконечный порядок, тогда $C(b) := \{g \in G: bg = gb\}$ – b-определимая бесконечная подгруппа. В силу слабой циклической минимальности $C(b)$ есть объединение конечного числа выпуклых множеств, т.е. $C(b) = \bigcup_{i=1}^{s} H_i$, где H_i выпукло для каждого $i \leq s$. В силу Леммы 1 $|H_i| = |H_j|$ для всех $i, j \leq s$, т.е. каждое H_i бесконечно. Так как $1 \in C(b)$, то существует $i \leq s$ такой, что $1 \leq H_i$. В силу Леммы 3 H_i не имеет границ в G, т.е. $(a^{-j}, a^{j}) \subseteq H_i$ для каждого $j > 0$. Следовательно, b перестановочен с a^{i} для любого целого j. Таким образом, $\left(a^{-\frac{m-1}{2}}\right)^2 b^2 = \left(a^{-\frac{m-1}{2}} b\right)^2$, противореча нашему предположению что $a \notin \phi(G)$. Следовательно, существует $b \in G$ с условием $b^2 = a$. Очевидно, что $K_0(1, a^{j}, b)$ и $K_0(b, a^{-j}, 1)$ для любого целого $j > 0$. Тогда имеем $K_0(b, ba^{j}, b^2)$, т.е. $K_0(b, ba^{j}, a)$ для любого целого $j > 0$. Ясно что $ba^{j} \neq 1$ (действительно, если $ba^{j} = 1$, то $b = a^{-j}$). Поэтому $K_0(b, ba^{j}, 1)$ для любого целого $j > 0$. Аналогично можно показать что $K_0(1, ba^{-j}, b)$ для любого целого $j > 0$. Пусть $\theta(x) := \exists y[K_0(b, y, 1) \wedge y^2 = x]$. Так как b перестановочен с a, то $\{(ba^j)^2 : j \geq 0\} = \{b^2 a^{2j} : j \geq 0\} = \{a^{2j+1} : j \geq 0\}$. Тогда в силу слабой циклической минимальности существуют $d \in (b, 1)$ и $m > 0$ такие, что $d^2 = a^{2m}$ (на самом деле таких d и m существует бесконечно много). Мы имеем $K_0(1, b, d)$, откуда $K_0(d, bd, d^2)$, т.е. $K_0(d, bd, a^{2m})$. С другой стороны, $K_0(1, b, d)$ влечет $K_0(b, b^2, bd)$, т.е. $K_0(b, a, bd)$, откуда $K_0(a, bd, b)$. Следовательно, $K_0(a, bd, a^{2m})$. Тогда существует j такой, что $0 < j < 2m$ и $bd = a^{j}$, откуда $d = b^{-1}a^{j}$. Тогда имеем $K_0(1, b, b^{-1}a^{j})$, откуда $K_0(a^{-j}, ba^{-j}, b^{-1})$, т.е. $K_0(ba^{-j}, b^{-1}, a^{-j})$. Тогда $K_0(ba^{-j}, b^{-1}, 1)$. Поймем что $b^{-1} \neq ba^{-k}$ для любого $k \geq 0$. Допустим противное: $b^{-1} = ba^{-k}$. Умножая последнее равенство на b, получаем: $1 = b^2 a^{-k} = a \cdot a^{-k} = a^{-(k-1)}$, т.е. $a^{k-1} = 1$, противоречие. Тогда $K_0(b, b^{-1}, 1)$, откуда $K_0(b^2, b \cdot b^{-1}, b)$, т.е. $K_0(a, 1, b)$, противоречие. □

Предложение 5. Существует слабо циклически минимальная группа, являющаяся неполной.

Доказательство Предложения 5. Рассмотрим группу по умножению $G' := \langle R', =, *, 1\rangle$, где $R' := R \setminus \{0\}$, R – множество действительных чисел. Нетрудно понять что G' – абелева и -1 – единственный неединичный элемент конечного порядка (все остальные неединичные элементы имеют бесконечный порядок). Упорядочим данную группу циклически. Пусть R_+ – множество положительных действительных чисел, т.е. $R_+ = \{a \in R \mid a > 0\}$, $R\_$ – множество отрицательных действительных чисел, т.е. $R\_ = \{a \in R \mid a < 0\}$. Пусть R_-^* – обратный порядок на множестве отрицательных действительных чисел. Тогда пусть $G := \langle c(R_+ + R_-^*), =, K, *, 1\rangle$. Утверждаем что G – циклически упорядоченная группа. Действительно в силу коммутативности G нам достаточно показать, что для любых $a, b, c \in G$ с условием $K_0(a, b, c)$ следует, что для любого $d \in G$ $K_0(ad, bd, cd)$.

Случай 1. $a, b, c \in R_+$. Тогда $K_0(a, b, c)$ влечет выполнение одного из следующих условий: $a < b < c$, $b < c < a$ или $c < a < b$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда если $d \in R_+$, то $ad, bd, cd \in R_+$ и $ad < bd < cd$, откуда $K_0(ad, bd, cd)$. Если $d \in R\_$, то $ad, bd, cd \in R\_$ и $ad > bd > cd$, откуда в силу обратного упорядочения $R\_$ $K_0(ad, bd, cd)$.

Случай 2. $a, b \in R+$, $c \in R\_$. Тогда $K_0(a, b, c)$ влечет $a < b$. Если $d \in R_+$, то $ad, bd \in R_+$, $ad < bd$ и $cd \in R\_$, откуда получаем $K_0(ad, bd, cd)$. Если же $d \in R\_$, то $ad, bd \in R\_$, $ad > bd$ и $cd \in R_+$, откуда опять в силу обратного упорядочения $R\_$ $K_0(ad, bd, cd)$.

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом, и, следовательно, мы доказали, что G циклически упорядоченная. Рассмотрим формулу $\theta(t) := \exists x[x^2 = 1]$. Очевидно, что $\theta(G) = R+$, т.е. $\theta(G)$ – выпуклое множество, не являющееся интервалом. Следовательно, G не является циклически минимальной. Группа G неполная, так как уравнение $x^{2n} = -1$ неразрешимо для любого $n \in N$. Нетрудно доказать что $Th(G)$ допускает частичную элиминацию кванторов относительно формулы $\theta(t)$ и атомарных формул. Тогда G является слабо циклически минимальной группой. □

Согласно Лемме 5.2 [1] любая определимая подгруппа слабо о-минимальной упорядоченной группы является выпуклой. Однако в циклическом случае существуют невыпуклые подгруппы. Например, в слабо циклически минимальной группе $G = \langle \{z \in C \mid |z| = 1\}, =, K, *, 1 \rangle$, где C – множество комплексных чисел, множество $H := \{1, -1\}$ является конечной невыпуклой $\varnothing$-определимой подгруппой. Также ранее было доказано, что циклически минимальная группа не содержит собственных бесконечных определимых подгрупп (Утверждение 5.1.1, [3]). Однако для слабо циклически минимальной группы данное утверждение также неверно в общем случае. Более того, мы можем доказать следующее утверждение:

Теорема 6. Для каждого натурального числа n существует слабо циклически минимальная группа, имеющая бесконечную $\varnothing$-определимую подгруппу с n выпуклыми компонентами.

Доказательство Теоремы 6. Рассмотрим все корни $2n$-той степени из единицы, т.е. комплексные числа w такие, что $w^{2n} = 1$. Из курса алгебры известно, что существует ровно $2n$ различных корней: $w_0, w_1, w_2, ..., w_{2n-1}$, причем

$$w_k = \cos\frac{\pi k}{n} + i\sin\frac{\pi k}{n},$$

где k пробегает целые числа от 0 до $2n-1$.

Рассмотрим $R_+ := \{a \in R \mid a > 0\}$, где R обозначает множество вещественных чисел. Пусть

$$G := \langle c(R_+ + w_1 * R_+ + w_2 * R_+ + ... + w_{2n-1} * R_+), =, K, *, 1 \rangle.$$

Мы утверждаем, что G является слабо циклически минимальной группой. Действительно, во-первых, множество G замкнуто относительно умножения, так как

$$w_k \cdot w_m = w_{k+m} (\mathrm{mod}\, 2n)$$

Это обеспечивается следующим свойством:

$$w_k w_m = \left(\cos\frac{\pi k}{n} + i\sin\frac{\pi k}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi m}{n} + i\sin\frac{\pi m}{n}\right) = \cos\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi m}{n} - \sin\frac{\pi k}{n} *$$

$$* \sin\frac{\pi m}{n} + i\left(\sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi m}{n} + \sin\frac{\pi m}{n}\cos\frac{\pi k}{n}\right) = \cos\frac{\pi(k+m)}{n} + i\sin\frac{\pi(k+m)}{n} = w_{k+m}.$$

Ассоциативность умножения следует из ассоциативности умножения комплексных чисел. В качестве единичного элемента выступает $1 \in R_+$. Существование обратного элемента обеспечивается следующими свойствами:

$$w_1^{-1} = w_{2n-1},\ w_2^{-1} = w_{2n-2},\ ...,\ w_{2n-1}^{-1} = w_1$$

Если $a_1, a_2, a_3 \in R_+$ и $K_0(a_1, a_2, a_3)$, то умножая на любой из корней w_k, мы получим $K_0(w_k a_1, w_k a_2, w_k a_3)$. Отсюда следует, что G – циклически упорядоченная группа.

Очевидно, что все корни из единицы являются $\varnothing$-определимыми. Действительно, рассмотрим следующую формулу:

$$\theta_1(x) := x \neq 1 \wedge x^{2n} = 1 \wedge \forall y[K_0(1, y, x) \rightarrow y^{2n} \neq 1]$$

Нетрудно понять, что $\theta_1(G) = \{w_1\}$. Далее рассмотрим следующую формулу:

$$\theta_2(x) := x \neq 1 \wedge \neg\theta_1(x) \wedge x^{2n} = 1 \wedge \forall y[K_0(1, y, x) \wedge y^{2n} = 1 \rightarrow \theta_1(y)]$$

Мы видим, что $\theta_2(G)=\{w_2\}$. Аналогичным образом можем определить остальные корни из единицы.

Рассмотрим теперь следующую формулу:

$\phi(x):=\exists y[K_0(w_{2n-1},y,w_1)\wedge y=x^n]$

Пусть $H=\phi(G)$. Поймем, что эта формула определяет бесконечную подгруппу, состоящую из n выпуклых компонент. Действительно, во-первых, для любого $a\in R_+$ $a^n\in R_+$, т.е. $R_+\subseteq\phi(G)$. Далее поймем, что для любого четного k с условием $0\le k\le 2n-1$ $w_k*R_+\subseteq\phi(G)$, а для любого нечетного k с условием $0\le k\le 2n-1$ мы имеем: $w_k*R_+\cap\phi(G)=\varnothing$. Действительно, если k четно, то для некоторого натурального числа m $k=2m$ и

$$w_k^n=w_{2m}^n=\left(\cos\frac{2\pi m}{n}+i\sin\frac{2\pi m}{n}\right)^n=\cos 2\pi m+i\sin 2\pi m=1$$

Тогда для любого $a\in w_k*R_+$ $a^n\in R_+$, т.е. $w_k*R_+\subseteq\phi(G)$.

Далее, если k нечетно, то для некоторого неотрицательного целого числа m $k=2m+1$ и

$$w_k^n=w_{2m+1}^n=\left(\cos\frac{\pi(2m+1)}{n}+i\sin\frac{\pi(2m+1)}{n}\right)^n=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

Откуда имеем, что для любого $a\in w_k*R_+$ $a^n\in(-1)*R_+$, т.е. $w_k*R_+\cap\phi(G)=\varnothing$.

Таким образом,

$H=R_+\cup w_2*R_+\cup w_4*R_+\cup\ldots\cup w_{2n-2}*R_+$,

т.е. H состоит из n выпуклых компонент.

Так как ранее было установлено, что $w_k\cdot w_m=w_{k+m}(\mathrm{mod}\,2n)$, то множество H замкнуто относительно умножения, и, следовательно, образует подгруппу.

Литература:

1. Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C., Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.
2. Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures, Mathematical Logic Quarterly, 51 (2005), pp. 377-399.
3. Macpherson H.D., Steinhorn C. On variants of o-minimality, Annals of Pure and Applied Logic, 79 (1996), pp. 165-209.

Резюме

В настоящей работе исследуются свойства слабо циклически минимальных групп. Основной результат работы – это доказательство существования для каждого натурального числа n слабо циклически минимальной группы, имеющей определимую подгруппу с n выпуклыми компонентами. Также устанавливается плотная упорядоченность слабо циклически минимальных групп. И, наконец, доказывается существование слабо циклически минимальных групп, не являющихся полными.

Ключевые слова: слабая циклическая минимальность, циклически упорядоченная группа, плотный порядок, определимая подгруппа.

Түйіндеме

Осы мақалада босаң циклдік минималдық группалардың қасиеттері зерттелінеді. Кез келген натуралды n санға n дөңес компоненттермен ішкі группасы бар босаң циклдік минималды группа болуын дәлелденуі осы мақаланың ең манызды нәтижесі. Соның ішінде босаң циклдік минималдық группалардың тығыздық реттелеуі анықталады. Ақырында, толықты емес босаң циклдік минималды группалардың болуын дәлелдейміз.

Кілт сөздер: босаң циклдік минималдық, циклдік реттелген группа, тығыз рет, формулдық ішкі группа.

Summary

The properties of weak circular minimality groups are studied in this work. The main result of the work is argument of existing for every natural number n for a weak circular minimality group when have a definable subgroup with n convex components. Also, dense ordering of weakly circularly minimal groups is proved. At last we prove the existence of weak circular minimal groups that are non-divisible.

Key words: weak circular minimality, circularly ordered group, dense order, definable subgroup.

УДК. 532, 51-72

О НЕКОТОРЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА, ПРОВОДИМЫХ НА КАФЕДРЕ МЕХАНИКИ КАЗНУ ИМ. АЛЬ ФАРАБИ

А.Ж. КАЛТАЕВ, доктор физико-математических наук
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы,
Республика Казахстан

1. Применение реверсивных скважин при добыче минерала методом подземного выщелачивания. Уран - основной источник атомной энергетики. Мировое потребление урана для нужд энергетики постоянно увеличивается и спрос на 2012 г. был около 69 тыс. тонн, тогда как, мировой запас урана на этот же год составлял 58 тыс. тонн по данным всемирной ядерной ассоциации.

Ресурсы Казахстана составляет 19% от разведанных запасов в мире, - которые составляет около 1,6 млн. тонн. Казахстан производит большую часть урана (19451 тонна U в 2011г и это 36% от мирового запаса по добычи), следом за ним Канада (17%) и Австралия (11%). Все урановые месторождения Казахстана добываются методом подземного выщелачивания.

Подземное выщелачивание (ПВ) является способом разработки рудных месторождений без поднятия руды на поверхность путем избирательного перевода ионов минералов в продуктивный раствор непосредственно в недрах. Данный метод осуществляется бурением скважин через рудные тела, подачей раствора и подъема минералосодержащих растворов на поверхность, извлечением из них минерала на сорбционных ионообменных установках, добавлением кислоты в маточные растворы и повторной закачкой их в недра.

Низкоконцентратное месторождение в основном добывается методом ПВ из-за рентабельности и относительной экологической совместимости для такого типа месторождений. Таким образом, метод ПВ применим для добычи урана, золота и меди.

Для выщелачивания урана используются растворы серной кислоты и карбоната. Выбор между ними зависит от структуры пласта, в частности, от содержания карбоната в руде и степени извлечения минерала. Кислотное выщелачивание применимо во всех типах урановой руды за исключением руды с высоким карбонатным содержанием. Если содержание карбоната в руде превышает 2%, то применяется карбонатное выщелачивание. Это объясняется образованием гипса, который препятствует диффузии раствора серной кислоты через пористой среды.

В урановых месторождениях, добываемых методом ПВ, урановое оруденение в основном состоит из настурана, урановой черни и коффинита. Настуран и урановая чернь хорошо извлекаются из руды, но коффинит наиболее устойчив к выщелачиванию.

Ввиду низкой концентрации урана в пласте изменение пористости и плотности побочного продукта за счет растворения урана реагентом пренебрегается.

1.1 Математическая и численная модель. Основными уравнениями описывающие процесс ПВ являются закон сохранения массы, закон Дарси и уравнения сохранения минерала в твердой фазе, реагента (серная кислота) и минерала в жидкой фазе.

Дифференциальное уравнение для напора решается итерационным методом "верхняя релаксация"; используя найденные значения гидродинамического напора, аппроксимацией закона Дарси определяются компоненты скорости фильтрации.Система уравнений растворения минерала, переноса жидкого раствора и растворенного минерала решаются совместно схемой «Кранка-Никольсона». Схема Кранка-Никольсона реализуется в трех этапах в трехмерном случае с использованием технику расщепления.

Уравнения решаются при соответствующих начальных и граничных условиях: в начальный момент известно распределение минерала в пласте, концентрации раствора и растворенного полезного компонента отсутствуют.

В данной работе рассматривает блок, состоящий из 4-х закачных и 2-х откачных скважин. Из-за симметрии рассматриваемой области достаточно моделировать только симметричную часть. В этом случае на границах задается условие Неймана.

Вычисление производится на разнесенной сетке. На разнесенной сетке компоненты скорости определяются в середине краях ячейки, а давление и концентрация определяются в центре ячейки.

1.2 Результаты вычисления. Предварительно проведенное моделирование показывает, что степень извлечения пласта также зависит от расположения скважин. При добыче минерала в пласте образуется застойная зона между откачными скважинами и за счет этого степень извлечения не достигает необходимого максимального значения. Для решения этой проблемы предлагается применить реверсивную скважину в застойной зоне. Но для оптимизации процесса необходимо знать время реверсирования скважин. По этой причине в данной работе рассматривались несколько вариантов. Результаты вычисления приведены на рисунках 1.1 и 1.2.

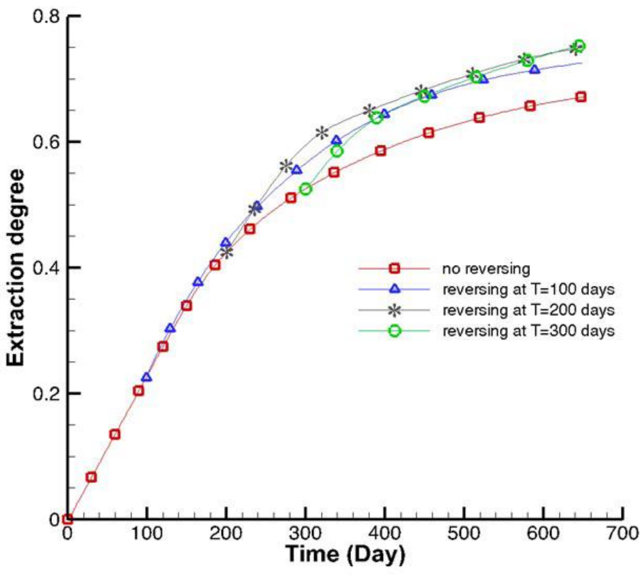


Рис.1.1 - Сравнение степеней извлечения

Зависимость степени извлечения от времени представлена на рисунке 1.1. Кривая с квадратиками относится к значению степени извлечения без реверсирования скважин. Результаты вычисления реверсирования скважин при разных временах также показаны на рисунке 1: кривая с треугольниками соответствует к значению степени извлечения при реверсировании скважин при T=100 суток; кривая со звездочками – при T=200 суток; кривая с кружочками при T=300 суток. Полученные кривые показывают что, применение реверсивную скважину в застойной зоне приводит к увеличению степени извлечения пласта и оптимальным из этих трех вариантах является реверсирование скважин при T=200 суток. В этом случае кривая степени извлечения становится выше чем в остальных случаях.

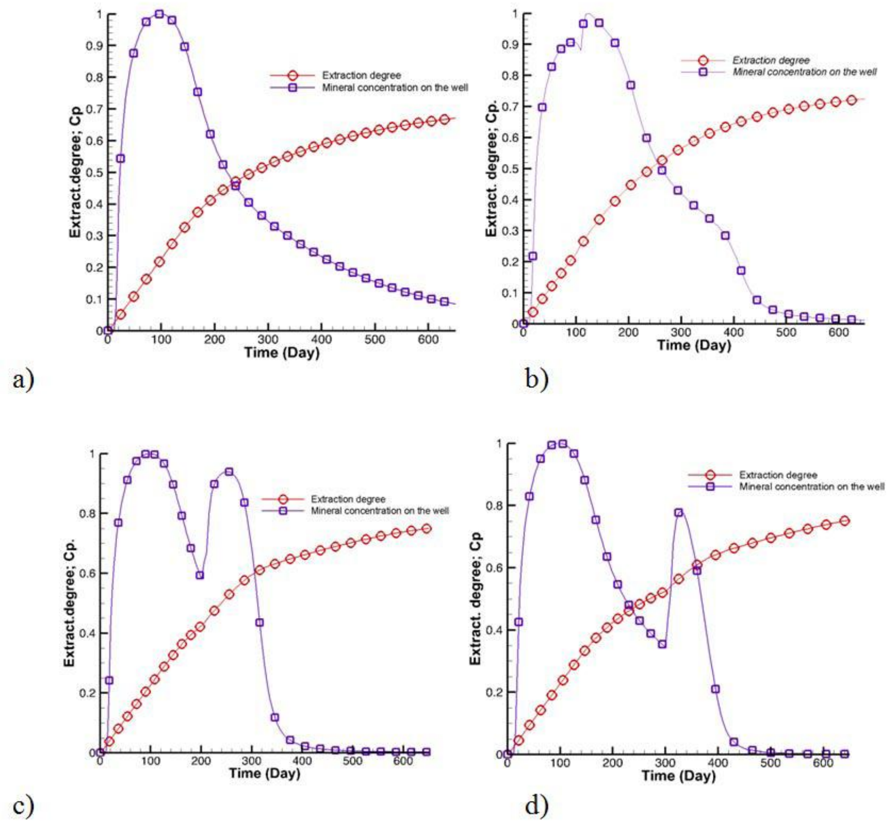


Рис.1.2- Зависимость степени извлечения пласта и концентрации минерала на откачной скважине от времени: a) без реверсирования скважин; b) реверсирование скважин при T=100 суток; c) реверсирование скважин при T=200 суток; d) реверсирование скважин при T=300 суток. Кривая с кружочками - степень извлечения пласта; кривая с квадратиками- концентрация минерала на откачной скважине.

Результаты исследования по данной теме опубликовалась в статьях [1]-[6].

2. Проблема подземного хранения водорода (ПХВ). На сегодняшний день одна из очень острых проблем современной мировой энергетики является накопление и аккумулирование полученной избыточного большого объема энергии. Одним из наиболее перспективных решений проблемы аккумулирования большого объема энергии считается так называемая водородная энергетика, в которой в качестве подходящих материалов для аккумуляции больших объемов энергии используется водород.

Таким образом, избыток энергии из ТЭС, ГЭС, АЭС можно использовать для получения водорода из воды. На сегодняшний день производство водорода и его распределение уже не представляют серьезных технических проблем. Однако, при производстве водорода в большом объеме возникает проблема необходимости хранения больших объемов водорода. Одним из самых эффективных и недорогих способов хранения большого объема водорода, является его закачка в геологические формации, такие как водоносные пласты, истощенные газовые месторождения или соляные каверны [7]. Несколько подземных хранилищ водорода имеется в Великобритании, в США, в России, в Германии, в Чехии и во Франции.

Весьма необычное поведение водорода при подземном хранении было обнаружено по данным наблюдений за составом смеси, добываемой из ПХВ (в ходе цикла "добыча", последующего за закачкой). Эти наблюдения выявили существование сильных осцилляций состава добываемого газа во времени и по пространстве. В частности на хранилище Lobodice (Чехия) было обнаружено снижение во времени концентрации закачиваемых газов H_2 и CO_2, но значительное увеличение концентрации CH_4.

Исходная закачанная смесь содержала 55% H_2, 20% CO_2+CO и 20% CH_4. После нескольких месяцев закачки, хранения и начала цикла извлечения добываемый газ содержал 37%

H_2, 12% $CO_2 + CO$ и 40% CH_4. Таким образом, речь идет не о долях процентов и случайных ошибках измерений, а об удвоении количество CH_4 в пласте и уменьшении в 2 раза количества $CO_2 + CO$. Характерный период изменения состава хранимого газа составил от 5 до 7 месяцев. Одновременно было обнаружено избыточное уменьшение давления в пласте на 15% по сравнению с расчетами материального баланса. Одной из возможных интерпретаций этого-утечка газа- была в итоге отвергнута.

В работах Smigai и Buzek сделана попытка объяснить причины изменения качественного состава закачиваемой смеси. В них предложено, что образование метана в пласте протекает по следующим реакциям:

$$CO_2 + 4H_2 = CH_4 + 2H_2O \text{ или } CO + 3H_2 = CH_4 + H_2O \qquad (2.1)$$

В ходе этих реакций наблюдается сокращение количества CO_2 и H_2 и одновременное увеличение количества CH_4. Изменение концентрации смеси можно объяснить влиянием метаногенных бактерий, которые участвуют в реакций (1) и являются ее катализатором. Присутствие метаногенных бактерий в пластовой воде ПХВ Lobodice было подтверждено измерениями.

Механизм воздействия бактерий представляет собой процесс метаболизма, при котором бактерии поглощают углерод из CO_2 и электроны H_2 в качестве энергии. В результате многостадийных процессов окисления CO_2 в теле бактерии происходит образование метана, который в итоге и "выдыхается".

Таким образом, процесс ПХВ представляет собой естественный химический реактор, поглощающий CO_2 и частично H_2 и удваивающий массу CH_4. Ясно, что данная проблема имеет промышленное значение, затрагивая как энергетику, так и экологию. Экономическая эффективность такого процесса можно оценить только после проведения физического и математического моделирования всех возможных вариантов поведения ПХВ. Разработка таких моделей является основной целью данной работы.

Первая попытка исследования образования метана при подземном хранении водорода проведена в работе [8], в которой бактерия рассматривалась как однородная среда в однофазной газовой среде без учета присутствия воды. В качестве модели рассмотрена модель Моно роста популяции, но в результате исследований были обнаружены лишь мелкие быстро затухающие флуктуации концентраций метана в пласте, которые не объяснили многообразия наблюдаемых явлений.

В работе [9,10] предложена система уравнений, описывающих транспорт газов в привязке к динамике популяции: уравнения могут быть сведены к нелинейной модели "реакция-диффузия" Тюринга, доказывающей существование периодических незатухающих во времени колебаний. Далее развивался модель Тюринга с учетом двухфазности среды. Получена двухфазная модель хранения водорода с биотической реакцией, связанной с динамической системой уравнений популяций в водоносном резервуаре.

2.2 Численные результаты: Рассматривается следующая тестовая двухмерная задача. В подземный водоносный пласт закачивается растворенный H_2. Таким образом даем не большое изменение, область движения прямоугольник, а изменение передается через малую окрестность начало координаты. На границе поддерживается условия непроницаемости. В начальном состоянии имеется непрерывно распределенная во всем пласте колония бактерий и постоянная начальная концентрация H_2. Пусть параметры $D_b = 0.001$, $D_{ch} = 0.0001$, $D_w^{(H_2)} = 0.01$, $q = 0.95$. На рисунке 2 представлены результаты численного расчета эволюции концентрации бактерий. Это означает, развивается достаточно регулярное кольцевые волны с избытком и недостатком бактерий в пространстве, которые чередующиеся между собой. Чередование колец означает, что в областях с высокой концентрацией бактерий реакция (2.1) протекает быстрее, в результате чего метаногенные бактерии выделяют метан.

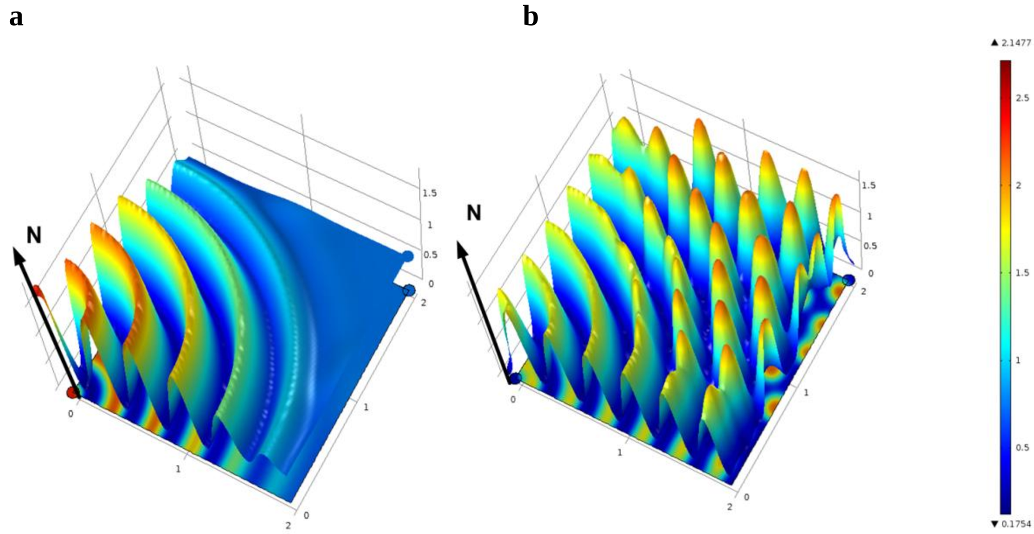


Рис.2.1 - Изменения количество бактерии при $t = (0;500)$

Результаты исследования по данной теме опубликовалась в статье [10].

3. Терморегулирование при хранении природного газа в адсорбированном состоянии при низких давлениях в емкости. Природный газ стал альтернативным источником экологической чистой энергии в транспортном секторе, поскольку при его сгорании образуется значительно меньшее количество вредных веществ по сравнению с другими видами топливами. При хранении природного газа в емкости из-за низкой объемной плотности его приходится сжимать до высокого давления (20-40 МПа), либо превращать в жидкость при низкой температуре (-162 °С). Но традиционные способы хранения, сжатый природный газ (большая металлоемкость сосудов со сжатым газом), и сжиженный природный газ (необходимость в дорогостоящей системе сжижения газа до -161°С) , требуют большие энергозатраты на эксплуатацию и являются небезопасными. Идея хранения природного газа в адсорбированном состоянии заключается в использовании комбинированного способа хранения природного газа - в связанном сорбентами состоянии, когда адсорбированный газ содержится в микропорах, а сжатый газ в мезо и макропорах сорбента – наполнителя емкости для хранения природного газа.

При экспериментальных исследованиях [11] выявлены влияние теплоты сорбции на скорость зарядки и разрядки емкости и необходимость учитывать, что любая конечная скорость адсорбции или десорбции связана с температурными изменениями в объеме сорбента. Следовательно, эффективное терморегулирование имеет важное значение для увеличение скорости разрядки/зарядки адсорбента.

Уравнение, описывающее движение закачиваемого газа в пористой среде, представляет собой пространственно осредненное уравнение Навье-Стокса с добавленным членом, описывающем сопротивления пористой среды (твердых сорбентов). В уравнений сохранения массы газа в порах учитывается приток газа из-за адсорбции газа в сорбенте. Адсорбционный процесс, происходящее из за сил межмолекулярного взаимодействия на границе раздела между твердым сорбентом и природным газом, описывается нестационарным приближенным уравнением кинетики сорбции. На основе математической модели сорбционной емкости была создана численная модель, где форма емкости цилиндрическая.

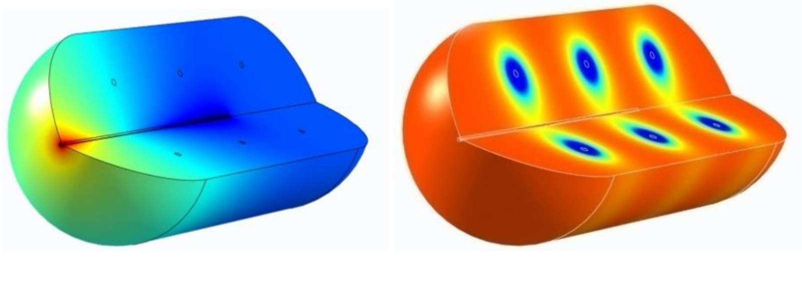


Рисунок 3.1. - Результаты численного исследования емкости. Трехмерный разрез цилиндра. а - распределение давления в емкости, б - распределение температуры в емкости

4. Численное изучение плоского свободного турбулентного сверхзвукового реагирующего сдвигового течения многокомпонентных газов. Для эффективной работы воздушно-реактивных двигателей, предназначенных для летательных аппаратов с большими числами Маха необходимо непрерывно поддерживать сверхзвуковое горение в камерах сгорания. Поток, через систему скачков уплотнения на входе в камеру сгорания замедляется до малых чисел Маха, при этом в камере сгорания поток должен оставаться сверхзвуковым. Для смешения топлива с окислителем при сверхзвуковых скоростях с малыми потерями на удар на входе удобно рассматривать сонаправленные потоки топлива и окислителя. Смешение поперек сдвигового течения между двумя параллельными потоками зависит от количества массы и импульса переносящейся через этот слой. Поэтому, степень смешения двух потоков может быть описана параметрами «роста» и «расширения» сдвигового течения. Известно, что сдвиговое течение между двумя сверхзвуковыми потоками растет медленнее по сравнению с дозвуковыми потоками, а механизм роста сдвиговых течений с образованием вихревых структур различного масштаба аналогичен неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Физический механизм роста слоя смешения и взаимодействия вихревых структур за крупномасштабными когерентными структурами на данный момент является изученным в полной мере. Также на сегодняшний день проблема плоского сдвигового течения однокомпонентного газа изучено многими авторами, тогда как проблема сдвигового течения между многокомпонентными газовыми смесями и интенсификации смешения между данными газами все еще требует полномерного изучения.

В данной работе рассматривается сдвиговое течение между многокомпонентными газами, а именно, воздух-водород. Воздух - верхний поток, водород - нижний поток. Данные газы разделены пластинкой конечной толщины, входные профили физических переменных заданы функцией гиперболического тангенса. На рисунке 1 представлена схема течения.

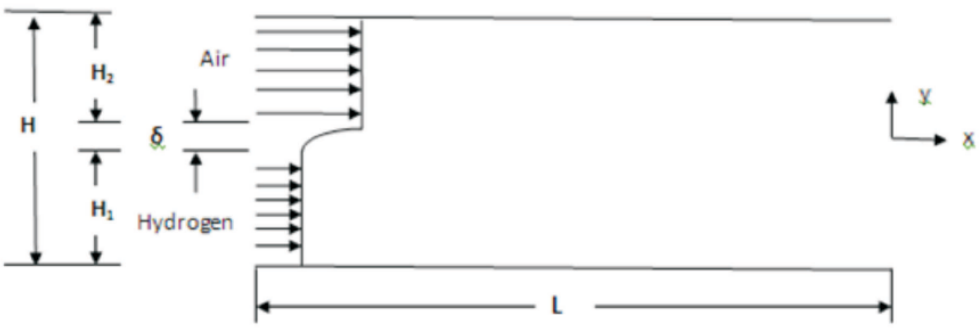


Рисунок 4.1 - Схема течения

Математическая модель основана на системе двумерных уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси в векторной форме с источником химических реакций горения. Система дифференциальных уравнений в частных производных представляется в безразмерной форме, в качестве параметров для обезразмеривания взяты параметры воздуха. Кинетическая модель горения водородно-воздушной смеси основана на модели Джачимовского с семью реакциями и с семью компонентами.

На входе задаются профили физических переменных с использованием функции гиперболического тангенса, на верхней и нижней границах задаются условия симметрии, на выходной границе поставлены граничные условия неотражения. В качестве начальных данных взяты условия на входе.

Алгоритм численного решения основан на существенно неосциллирующей конечно-разностной ENO схеме третьего порядка точности. Для получения пары закручивающихся вихрей на входе рассматриваются два граничных условия: с включением и без включения нестационарных граничных условий. Нестационарные граничные условия задаются с помощью амплитуды и частоты усиливающихся (энергосодержащих) волн. Частоты самых усиливающихся волн и их субгармоники определяются с использованием линейной теории устойчивости или из экспериментальных данных.

Для тестирования алгоритма решения предварительно была рассмотрена задача сдвигового течения однокомпонентных газов (воздух-воздух). Параметры задачи следующие: M_0=0.51;

T_0=285.07 K; p_0=56088.91 Pa; M_∞=1.80; T_∞=176.58 K; p_∞=54648.65 Pa (индекс ∞ - высокоскоростной поток, индекс 0 - низкоскоростной поток). Высота канала 8 см, длина 50 см. Толщина разделительной пластинки 0,3175 см, на кромке разделительной пластинки 0,05 см. Начальная толщина потери импульса 0,05 см. Физические и геометрические параметры взяты из эксперимента Самими и Эллиота (1989). Эксперимент был проведен в туннеле, данное вычисление было проведено в плоском канале для оценки поведения турбулентных характеристик. На рисунке 2 представлена картина сравнения изменения по длине динамику роста толщины потери импульса и толщины завихренности.

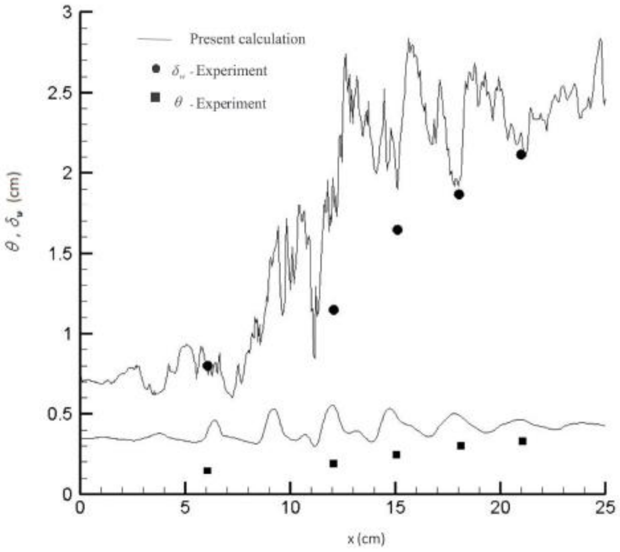


Рисунок 4.2 - Сравнения с экспериментальными данными динамики роста толщины потери импульса и толщины завихренности

Из рисунка 2 следует, что результаты вычислений с использованием ENO схемы хорошо согласуются с экспериментальными данными. Также было проведено сравнение с экспериментом по продольной средней скорости в пяти сечениях канала, где результаты показали, что для $x \geq 12$ см средний поток является автомодельным. Турбулентные характеристики включают в себя Рейнольдсовы напряжения и интенсивность турбулентности. Численный эксперимент показал, что турбулентные характеристики начинают расходиться с экспериментом на $x \geq 15$ см. Данный факт указывает на то, что турбулентная автомодельность достигается дальше, чем средние характеристики.

Из анализа результатов по горению водородно-воздушной смеси было выявлено, что максимальная концентрация образования компонент соответствует парам воды. Гидроксильный радикал, атомы водорода и кислорода имеют меньшие значения. Продукты горения образуются в зоне интенсивного выделения тепла, т.е. в слое смешения в области изолированных вихрей.

Результаты исследования по данной теме опубликовалась в статьях [12]-[13].

Заключение

В первом разделе исследовано зависимость степени извлечения минерала от реверсирования скважин. Разработанная модель использовалось для исследования процесса добычи урана методом подземного выщелачивания, однако, эта модель могут быть легко применена для изучения других редких минералов таких, как медь и золото, выщелачиваемые методом ПВ.

Во втором разделе была проведена попытка качественного анализа влияния метаногенных бактерий на динамику образования метана при подземном хранении водорода в водоносных пластах. Возникновение незатухающих осцилляций во времени, асимптотически стремящееся к периодическим, означает, что в системе происходит самоорганизация новых структур в виде метана. Поведение подземного хранилища водорода очень сложное и чувствительное к кинетическим параметрам. Полученная концептуальная физическая и математическая модель процесса могут быть использованы для управления ПХВ и следить за образованием метана в водоносном пласте.

В третьем разделе численно исследован процесс терморегулирования сорбента при хранении природного газа в адсорбированном состоянии при низких давлениях в емкости. В результате моделирования получены, что эффективное терморегулирование уменьшает температурные эффекты при зарядки и разрядки емкости. В динамических условиях, время зарядки уменьшается из за понижения температуры адсорбента, а во время разрядки уменьшается из за подачи тепла в адсорбент.

В четвертом разделе было проведено численное исследование плоского свободного сверхзвукового турбулентного реагирующего сдвигового течения предварительно не перемешанной водородно-воздушной смеси. Построенная математическая модель, численный алгоритм и программный код позволяют моделировать сложные процессы и регулировать интенсивность смешения и горения в сверхзвуковых камерах сгорания гиперзвуковых летательных аппаратов.

Литература:

1. Alibayeva K.A., Kuldzabekov A.B., Kaltayev A. The modeling of uranium extraction process by the in-situ leaching method. //“New Methods and Technologies in Petroleum Geology, Drilling and Reservoir Engineering”. - Краков, 2010. Drilling Oil and Gas. Quarterly. -Vol. 27, No. 1-2. - P.49-57
2. Alibayeva K.A., Kaltayev A. Calculation of reagent supply intensity for optimizing mineral extraction process by the in-situ leaching method. - Краков, 2011. Drilling Oil and Gas. Quarterly. -Vol. 28, No. 1-2. - P.49-55
3. Alibayeva K.A., Kuljabekov A.B., Tungatarova M.S., Kaltayev A. Study of usage efficiency of multistage filters on mineral leaching process. Drilling, oil, gas. - Quarterly of AHG University of Science and Technology. Krakow-2013. pp.19-35
4. Kuljabekov A.B., Inkarbekov M.K., Tungatarova M.S., Alibayeva K.A.,Kaltayev A. Numerical study of the production borehole with multi-stage filter setting. "Archives of mining sciences", Krakow-2013. Vol. 58 (2013), No 3, p. 691–704 (in print)
5. Zhumagulov B.T., Alibayeva K. A., Kaltayev A., Kuljabekov A. B. 3d Predicting model of mineral extracting process by the In-Situ Leaching method.//"Mathematical problems in engineering". Вестник НИА РК. №3. стр.8-15. Алматы-2013.
6. Кульджабеков А.Б., Алибаева К.А., Инкарбеков М.К., Калтаев А. Численное исследование гидродинамической эффективности технологии посадки многоярусных фильтров. // Вестник ВКГТУ им. Д. Серикбаева, Вычислительные технологии; часть 2. -2013. - С.45-52.
7. Bulatov G.G. Underground storage of hydrogen. Ph.D. Thesis, Moscow Gubkin Oil and Gas University, 1979 (in Russian).
8. Panfilov, M., Gravier, G., Fillacier, S.: Underground storage of H2 and H2–CO2–CH4 mixtures. In: Proc. ECMOR-X: 10th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 4–7 September 2006 Amsterdam, the Netherlands, Ed. EAGE, 2006, paper A003.
9. Panfilov M. Undeground storage of hydrogen: self-organisation and methane generation. Transport in Porous Media, 85, 2010: P 841 - 865.
10. A.Toleukhanov, M. Panfilov, I. Panfilova, A. Kaltayev: Bio-reactive two-phase transport and population dynamics in underground storage of hydrogen: natural self-organisation. In: Proc. ECMOR-XIII: 13th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 10–13 September 2012 Biarritz, France, Ed. EAGE, 2012, paper B09.
11. Chang, K.J. and Talu, O. Behaviour and performance of adsorptive natural gas storage cylinders during discharge, Applied Thermal Engineering, 16(5), pp.359-374, 1996.
12. Yerzhan Belyaev, Aidarkhan Kaltayev and Altynshash Naimanova. Supersonic Flow with Perpendicular Injection of a Hydrogen. Proceedings of 2010 2nd International Conference on Computer Engineering and Technology. Chengdu, China. April 16-18, 2010, V5-531.
13. Belyayev Ye., Naimanova A. Two-Dimensional Supersonic Flow with Perpendicular Injection of the Gas, Chapter 2 in Book “Advanced Methods in Practical Application in Fluid Mechanics”, March 2012, Rijeka, Croatia. http://www.intechopen.com/books/advanced-methods-for-practical-applications-in-fluid-mechanics/two-dimensional-supersonic-flow-with-perpendicular-injection-of-the-gas
14. Беляев Е. К. Численное исследование плоского свободного сдвигового течения с использованием ENO схемы. XXX Сибирский теплофизический семинар, X Международная

конференция молодых ученых Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики, тезисы докладов. Был награжден дипломом I степени за лучший доклад. 13-16 июня 2012 г. – 2012.

Резюме

В настоящей работе проведен обзор некоторых научно-исследовательских работ, проводимых на кафедре механики механико-математического факультета Казахского национального университета под руководством профессора А. Калтаева. В первом разделе проведено 3D исследование путей повышения степени извлечения руды при добыче минералов методом подземного выщелачивания на основе применения технологии реверсирования скважин. Во втором разделе приведены результаты численно-аналитического исследования возможных механизмов образования метана при подземном хранении водорода в водоносном пласте. В третьем разделе рассмотрен метод терморегулирования процесса сорбции и десорбции при хранении природного газа в емкости в адсорбированном состоянии. В четвертом разделе численно изучается эффективность горение водорода в до- и сверхзвуков слоях смешения.

Ключевые слова: моделирование, пористые среды, реагирующие течения, хранение газов.

Түйіндеме

Қарастырылып отырған жұмыста Қазақ Ұлттық университеті механика-математика факультетінің механика кафедрасында профессор А. Қалтаевтың жетекшілігімен жүргізіліп жатқан ғылыми-зерттеу жұмыстарына шолу жасалынды. Бірінші бөлімде минералды жер асты шаймалау әдісімен өндіру кезінде реверсивті скважиналар технологиясын қолдану тиімділігі зерттелді. Екінші бөлімде жер асты су қабатында сутегін сақтау кезінде метанның түзілуін сандық зерттеу қарастырылды. Үшінші бөлімде табиғи газда ыдысқа төмен қысымда адсорбцияланған күйде сақтау кезінде сорбентті термореттеу процесі сандық зерттелді. Төртінші бөлімде жазық еркін турбулентті дыбыс жылдамдығынан жоғары реакцияға түсетін көпкомпонетті газдардың жылжымалы ағыны қарастырылды.

Кілт сөздер: моделдеу, кеуекті орта, реакцияланатын ағындар, газдарды сақтау.

Summary

This paper presents the overview of current researches conducted under the direction of Kaltayev A., professor of the mechanics and mathematics department of Al-Farabi Kazakh National University. In the first section the usage of effectiveness of the technology of the reversing well at mineral mining by in-situ leaching method is investigated. In the second section the methane formation at the underground storage of hydrogen in the aquifer is studied numerically. In the third section the process of the thermal control of the sorbent at the storage of the natural gas in the adsorbed state at low pressure in the vessel is studied numerically. The numerical study of planar free turbulent supersonic reacting shear layer between multi-component gases is considered in the fourth section.

Key words: simulation, poros medium, recting flows, gas storage.

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СУБРАГМОНИЧЕСКИХ И УЛЬТРАГОРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН С НЕЛИНЕЙНЫМ МЕХАНИЗМОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

А.Н.ТЮРЕХОДЖАЕВ, доктор физико-математических наук, профессор,
М.Ж. СЕРГАЗИЕВ, кандидат физико-математических наук
Казахский национальный технический университет им. К.И.Сатпаева, г.Алматы,
Республика Казахстан

Проблема квазистатического и динамического деформирования механических систем при наличии нелинейного механизма диссипации энергии, каким является контактное сухое трение, представляет значительный интерес для теории и практики нелинейной механики. В общем случае системы с контактным сухим трением – это слоистые среды, в которых в процессе нагружения появляется частичное или полное проскальзывание между слоями.

В качестве примеров деформируемых систем, для которых фрикционный контакт играет важную роль, можно указать на взаимодействие бурильных колонн с грунтом в нефтепромысловом деле; различных подземных сооружений в строительном деле; оползание горных пород и снежных массивов; взаимодействие при соударении различных тел с мембранами и нитями; работу композитных материалов и др. Подобные ситуации возникают в сейсмогенных процессах, стабилизаторах ракет, электротехнике, авторегулировании и т.д. В таком классе задач сила сухого трения является распределенной. Достаточно широк круг задач о взаимодействии деформируемых тел, для которых область контакта локализована или сосредоточена. Примерами могут служить панели, соединенные внахлест в самолетостроении, ленточные и пластинчатые конвейеры на роликоопорах, система вал - втулка, шарнирные и другие соединения в робототехнике.

Динамика сухого трения, представляющего нелинейный механизм диссипации энергии, проявляющееся на границе шероховатых слоистых сред или при относительном перемещении одного тела по поверхности другого представляет достаточно сложную математическую проблему уже для кулонового закона трения, когда ветви трения являются прямыми со скачком при систематическом обращении в нуль скорости относительного перемещения тела. Упомянутые ветви трения в общем случае являются скорее некулоновыми, криволинейными и создают дальнейшие математические сложности.

Ряд результатов о влиянии сухого трения на распространение волн в различных системах получены в работах [1-21].

Рассмотрим распространение нелинейных волн в упругом стержне длины l, по боковой поверхности которого реализуется кулоново сухое трение. При приложении динамической нагрузки на торец в стержне возбуждаются прямые и обратные волны, и все его сечения в соответствии с динамикой волн приходят в колебательное движение с переменной скоростью. Поскольку трение зависит от модуля и направления скорости сечений процесс включения его в дифференциальное уравнение движения представляет существенное затруднение, поскольку скорость сама является априори неизвестной функцией.

Характеристиками нелинейного гиперболического уравнения область зависимости решения делится на большое количество подобластей, в ряде из которых трение имеет положительный знак, в других – отрицательный, в третьих – скорость обращается в нуль. Особенностью рассматриваемого класса задач является выполнение релаксационных колебаний, сопровождающиеся в определенные отрезки времени остановкой отдельных участков или всех сечений стержня. В дальнейшем такая картина многократно повторяется с остановками движения в ряде других подобластей зависимости решения, которые затем вновь включаются в движение, тогда как остановки движения происходит на других участках. Установлено, что подобные остановки выполняются в последующем в пределах каждой пары периодов колебаний стержня, вслед за которыми на время одного периода останавливается стержень целиком. Этот сложный разрывный закон влияния трения на движение, записанный в обобщенных функциях, следует включить в уравнении движения. В то же время, если знаковая функция $\chi\left(\frac{du}{dt}\Big/\left|\frac{du}{dt}\right|\right)$, зависящая в конечном счете от независимых координат x, t установлена, то нелинейное в силу присутствия этой функции уравнение становиться линейным и задача может быть решена с использованием какого либо стандартного линейного метода решения задач, например, метода интегрального преобразования Лапласа-Карсона.

Такого рода задачи сводятся к рассмотрению нелинейной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа, описывающей нелинейный волновой процесс, например, как указано выше, в стержне при наличии сухого трения по боковой поверхности:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \chi\left(\upsilon/|\upsilon|\ ,\partial\upsilon/\partial t\ /|\partial\upsilon/\partial t|\ \right)\cdot q\ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = E\frac{\partial\upsilon}{\partial x}$$

где σ - напряжение, υ - скорость, ρ - плотность материала среды, q - предельная сила трения на единицу длины стержня, отнесенная к площади поперечного сечения, причем $\alpha = (E/\rho)^{1/2}$, E – модуль упругости материала стержня. Величина χ представляет собою в случае относительного движения стержня и грунта знак разности скорости движения стержня и грунта. В случае отсутствия относительного движения χ может принимать любое значение, не превышающее по модулю единицы. Следует подчеркнуть: во всех случаях величина каппа χ должна быть определена в процессе решения задачи.

Получены аналитические результаты по нелинейным колебаниям при действии на одном из торцов стержня динамического возмущения в виде «прямоугольной гармонической нагрузки» для частоты нагрузки в два, три и n раз большей и меньшей частоты собственных колебаний системы.

И так, пусть имеем теперь стержень, конец которого $x=\ell$ заделан, а на конце $x=0$ приложено периодическое напряжение с частотой в три раза больше, частоты собственных колебаний системы (рисунок 1):

$$\sigma(0,t) = \sigma_0 \left\{ H(t) - 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H(t - \frac{2}{3}k\ell/a) \right\}, \tag{2}$$

где $H(z)$ - единичная функция Хевисайда.

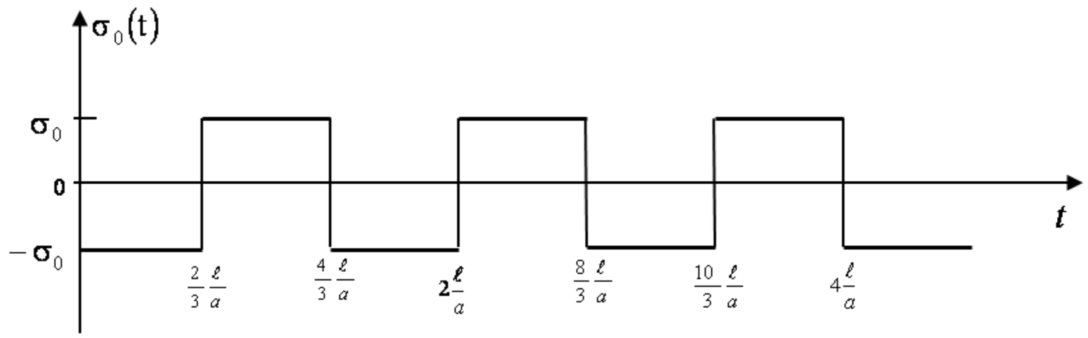


Рисунок 1

Запишем уравнение движения в перемещениях $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \chi\left(\partial u/\partial t / |\partial u/\partial t| \right), \tag{3}$$

где знак скорости $\chi = sign(\partial u/\partial t),$ если скорость не равна нулю и $\chi \in [-1;1]$, если движение происходит с остановками.

В начальный момент времени стержень примем покоящимся и ненапряженным:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t = 0 \tag{4}$$

Выражение знаковой функции χ удается установить заранее, учитывая, что в рассматриваемом классе задач сила трения является пассивной. При этом функция χ в этой задаче имеет выражение:

$$\chi(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H(t - x/a - 2k\ell/a) - H\left(t - x/a - 2\left(k + \frac{1}{3}\right)\ell/a\right) \right\} \left(H(x) - H\left(x - \frac{2}{3}\ell\right) \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H(t - x/a - 2k\ell/a) - H(t + x/a - 2(k+1)\ell/a) \right\} \cdot \mathrm{H}\left(x - \frac{2}{3}\ell\right) -$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{H\left(t-x/a-2\left(k+\frac{1}{3}\right)\ell/a\right)-H\left(t-x/a-2\left(k+\frac{2}{3}\right)\ell/a\right)\right\}\cdot\left(\mathrm{H}(\mathrm{x})-\mathrm{H}\left(\mathrm{x}-\frac{2}{3}\ell\right)\right)-\\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{H\left(t-x/a-2\left(k+\frac{1}{3}\right)\ell/a\right)-H\left(t+x/a-2\left(k+\frac{4}{3}\right)\ell/a\right)\right\}\cdot H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)+\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{H\left(t-x/a-2\left(k+\frac{2}{3}\right)\ell/a\right)-H\left(t+x/a-2\left(k+\frac{5}{3}\right)\ell/a\right)\right\}\cdot H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)+ \qquad (5)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{H\left(t+x/a-2\left(k+\frac{4}{3}\right)\ell/a\right)-H\left(t+x/a-2\left(k+\frac{5}{3}\right)\ell/a\right)\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)\right)-\\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{H\left(t+x/a-2\left(k+\frac{5}{3}\right)\ell/a\right)-H\left(t+x/a-2(k+2)\ell/a\right)\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)\right)-\\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{H\left(t-x/a-2(k+1)\ell/a\right)-H\left(t+x/a-2(k+2)\ell/a\right)\right\}\cdot H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)+\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{H\left(t-x/a-2\left(k+\frac{2}{3}\right)\ell/a\right)-H\left(t+x/a-2(k+1)\ell/a\right)\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{1}{3}\ell\right)\right)-\\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{H\left(t-x/a-2(k+1)\ell/a\right)-H\left(t+x/a-2\left(k+\frac{4}{3}\right)\ell/a\right)\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{1}{3}\ell\right)\right).
\end{aligned}
$$

На рисунке 2 приведены знаки скоростей в областях, ограниченных фронтами волн.

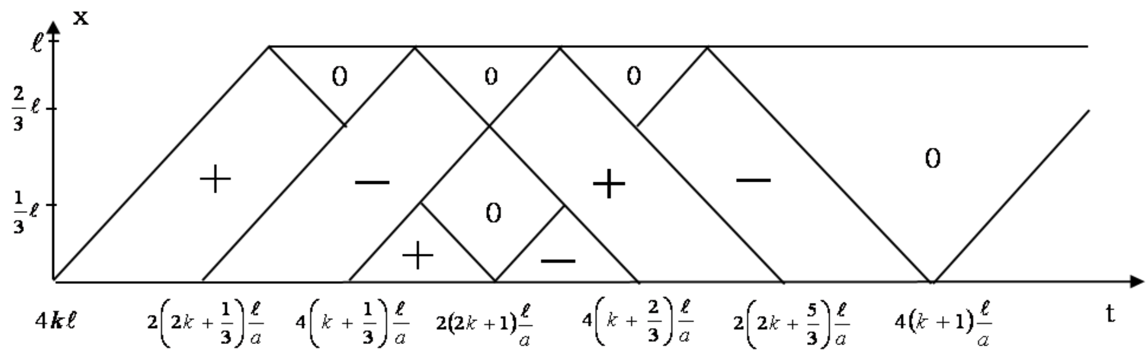


Рисунок 2

Подстановка χ в (3) сводит исходную нелинейную задачу к линейной.

Будем искать решение задачи (2)-(4) с помощью интегрального преобразования Лапласа – Карсона. Для функции $\chi(\mathrm{t},\mathrm{x})$ в изображениях имеем:

$$
\begin{aligned}
\chi(\mathrm{p},\mathrm{x})=&\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{p}(\mathrm{x}+2\mathrm{k}\ell)/\mathrm{a}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{p}\left(\mathrm{x}+2\left(\mathrm{k}+\frac{1}{3}\right)\ell\right)/\mathrm{a}}\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)\right)+\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{-p(x+2k\ell)/a}-e^{p(x-2(k+1)\ell)/a}\right\}\cdot H\left(x-\frac{2}{3}l\right)-\\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{-p\left(x+2\left(k+\frac{1}{3}\right)\ell\right)/a}-e^{-p\left(x+2\left(k+\frac{2}{3}\right)\ell\right)/a}\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)\right)-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{-p\left(x+2\left(k+\frac{1}{3}\right)\ell\right)/a}-e^{p\left(x-2\left(k+\frac{4}{3}\right)\ell\right)/a}\right\}\cdot H\left(x-\frac{2}{3}l\right)+\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{-p\left(x+2\left(k+\frac{2}{3}\right)\ell\right)/a}-e^{p\left(x-2\left(k+\frac{5}{3}\right)\ell\right)/a}\right\}\cdot H\left(x-\frac{2}{3}l\right)+\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{p\left(x-2\left(k+\frac{4}{3}\right)\ell\right)/a}-e^{p\left(x-2\left(k+\frac{5}{3}\right)\ell\right)/a}\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)\right)-\\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{p\left(x-2\left(k+\frac{5}{3}\right)\ell\right)/a}-e^{p(x-2(k+2)\ell)/a}\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)\right)-\\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{-p(x+2(k+1)\ell)/a}-e^{p(x-2(k+2)\ell)/a}\right\}\cdot H\left(x-\frac{2}{3}\ell\right)+\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{-p\left(x+2\left(k+\frac{2}{3}\right)\ell\right)/a}-e^{p(x-2(k+1)\ell)/a}\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{1}{3}\ell\right)\right)-\\
&-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{e^{-p(x+2(k+1)\ell)/a}-e^{p\left(x-2\left(k+\frac{4}{3}\right)\ell\right)/a}\right\}\cdot\left(H(x)-H\left(x-\frac{1}{3}\ell\right)\right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Далее, переходя от решения в изображениях к решению задачи в оригиналах, получено аналитическое решение достаточно громоздкого выражения.

Громоздкое обобщенное решение задачи приобретет очень компактные выражения, если записать его по соответствующим характерным областям. Для этого сначала записываются решения в оригиналах для ряда первых характерных областей – в этой задаче для 51 области, а затем, пользуясь методом математической индукции, записываются решения для всех областей, покрывающих полубесконечную полосу $0 \le x \le \ell$, $t > 0$.

Так, в первой трапецедальной области

$$at < 2\,\ell - x\,, \quad x < at < \frac{2}{3}\ell + x\,, \quad 0 \le x \le \ell\,,$$

решение будет иметь вид

$$\sigma = -\sigma_0 + \frac{q}{2}x\,, \quad \vartheta = \vartheta_0 - \frac{a^2 q}{2E}t\,.$$

Для области вида

$$x + \frac{2}{3}\ell < at < x + \frac{4}{3}\ell\,, \quad at < 2\ell - x\,, \quad 0 \le x \le \frac{2}{3}\ell\,,$$

получаем

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{q}{2}x\,, \quad \vartheta = -\vartheta_0 + \frac{aq}{2E}\left(at - \frac{4}{3}\ell\right).$$

Аналогично записываются решение в треугольной области

$$x + \frac{4}{3}\ell < at < 2\ell - x\,, \quad 0 \le x \le \frac{1}{3}\ell$$

$$\sigma = -\sigma_0 + \frac{q}{2}x \ , \qquad \vartheta = \vartheta_0 - \frac{aq}{2E}\left(at - \frac{1}{3}\ell\right) .$$

Аналогично записываются решение для последующих областей. Дальнейший анализ показывает, что в трапециадальной области

$$at > 4\ell - x \ , \qquad 0 \le x \le \frac{2}{3}\ell$$

$$at > x + \frac{8}{3}\ell \ , \qquad \frac{2}{3}\ell < x \le \ell$$

$$at < x + 4\ell \ , \qquad 0 \le x \le \ell$$

система оказывается в покое и для каждого последующего диапазона времени, равного трем периодам внешней нагрузки, система начнет колебания из покоящегося и невозмущенного состояния под действием нагрузки, тождественной нагрузке при $0 < t < 4\ell/a$.

Сначала находятся решения для 17 областей, характеризующие одно полное колебание системы. Решения задачи по областям, характеризующие два последующие полные колебания, необходимые для записи решения при $0 < t < \infty$, получаются, хотя и трудоемко, по аналогии изложенному, поэтому их приведение с целью сокращения записи опускается.

Рассмотрение последующих областей плоскости движения позволяет записать решение для характерных областей с любыми номерами. В общем виде обозначим их соответственно через $17k+1,\ 17k+2,\ \ldots,17(k+1), (k = 0, 1, 2, \ldots)$, (Рисунок 3).

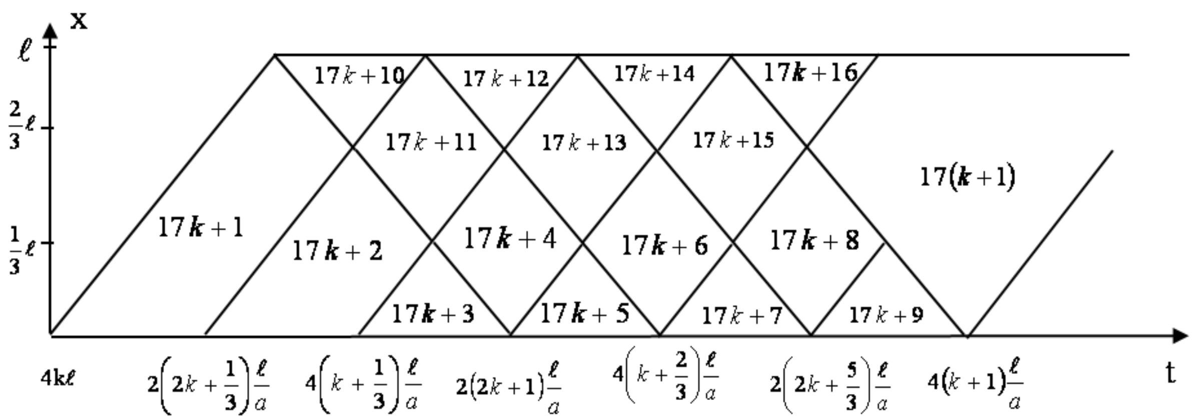


Рисунок 3

Тогда для характерной области $17k+1$ напряжение и скорость имеют выражения:

$$\sigma_{17k+1} = -\sigma_0 + \frac{q}{2}x, \qquad \vartheta_{17k+1} = \vartheta_0 - \frac{aq}{2E}(at - 4k\ell).$$

В областях $17k+2$

$$\sigma_{17k+2} = \sigma_0 - \frac{q}{2}x \ , \qquad \vartheta_{17k+2} = -\vartheta_0 + \frac{aq}{2E}\left(at - 4\left(k + \frac{1}{3}\right)\ell\right).$$

В областях $17k+3$ решения будут

$$\sigma_{17k+3} = -\sigma_0 + \frac{q}{2}x \ , \qquad \vartheta_{17k+3} = \vartheta_0 - \frac{aq}{2E}\left(at - \left(4k + \frac{1}{3}\right)\ell\right) .$$

В областях вида $17k+4$

имеем

$$\sigma_{17k+4} = -2\sigma_0 + \frac{1}{3}ql, \qquad \vartheta_{17k+4} = 0.$$

Для сокращения записи приведем решение в последней характерной области $17(k+1)$

$$\sigma_{17(k+1)} = 0, \qquad \vartheta_{17(k+1)} = 0.$$

Полученное решение нелинейной задачи о распространении волн в рассматриваемой системе под воздействием циклической ступенчатой нагрузки с частотой в три раза большей собственной частоты колебания стержня, показывает, что исследуемая конструкция с сухим трением совершает установившееся периодическое колебание с периодом $4\ell/a$. На рисунке 4 приводится кривая колебаний конца стержня $x=0$.

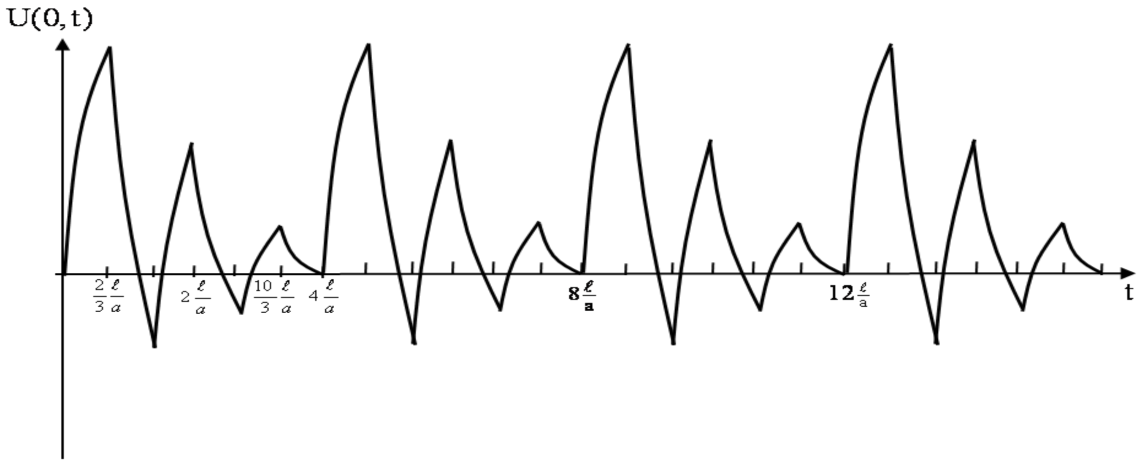


Рисунок 4.

Основываясь на полученных этих и других результатах можно сделать вывод: существует класс циклических нагрузок с частотой в целое число раз больше частоты собственных колебаний системы, под действием которых система совершает установившиеся колебания с двумя частотами. Одна частота совпадает с частотой собственных колебаний, другая – с частотой внешней нагрузки.

Методом χ функции с использованием дополнительно методов интегрального преобразования Лапласа-Карсона и математической индукции получены аналитические решения задач, когда частота внешней нагрузки в произвольное n целое число раз больше и меньше частоты собственных колебании системы.

Аналогичные результаты получены помимо распределенного механизма диссипации энергии и для локализованного и сосредоточенного механизмов.

Литература:

1. Goodman L.E. “Are view analysis of interfacial damping”, Structural ASME, New York (1959).
2. Ya.G. Panovko, Influence of Internal Friction of Elastic System, Fizmatgiz, Moscow (1960) (in Russian).
3. Тюреходжаев А.Н., Конструкционный гистерезис// Тезисы докл. совещания по проблеме конструкционного демпфирования. - Рига, 1970.

4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. - 915 с.
5. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении. // Журнал. техн. Физики.- 1944. - Т.14. - В.4-5. -С. 276-282.
6. Ле суан Ань. Экспериментальные исследования механических автоколебаний при трении. // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1972. - № 4. - С. 32-38.
7. Хайкин С.Э., Лисовский Л.П., Соломонович А.Е. О силах «сухого трения». // Докл. АН СССР. – 1939. -Т.24. - №2. - С.134-138.
8. Тюреходжаев А.Н. Конструкционный гистерезис в стержне с учетом бокового расширения // Исследования по дифференциальным уравнениям и их применению. – АлмАта: Издательство «НАУКА». – 1962. - С. 42-50.
9. Den Hartog J.P. Mechanical vibrations, McGrow-Hill, New York, 1965. P.570.
10. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебание упругих систем. - М.: Наука. - 1967. - 420 с.
11. Никитин Л.В. Продольные колебания упругих стержней при наличии сухого трения. // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1976. - №6. - С.137-145.
12. Ильюшин А.А., Рашидов Т.Р. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. АН УзССР, Сер. техн. наук. - 1971.- Т.1. - С.3-11.
13. Тюреходжаев А.Н. Осадка сваи при ударе и установление параметров сопротивления грунта//Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат. - 1973. - №5. - С.58-66.
14. Тюреходжаев А.Н. Распространение волн в свае, движущейся в многослойном грунте//Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат. - 1979. - №1. - С.57-62.
15. Тюреходжаев А.Н. К вопросу об определении несущей способности свай//Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат. - 1978. - №1. - С.47-53.
16. Eckolt W. Uber erzwungende Reibungsschwingungen. – Z. f. techn. Phys. – 1926. - B.7.
17. Никитин Л.В., Тюреходжаев А.Н. Демпфирование сухим трением динамических нагрузок в волокнистом композите // Мех. композит, матер. - 1986. - N 1. - С.28-37.
18. Никитин Л.В., Рашидов А.Т. Трубопровод под воздействием стационарного конечного импульса в окружающей среде // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. - Алма-Ата: Гылым, 1992. - С. 12-18.
19. Cornelius C.S., Kubitza W.K. Experimental investigation of longitudinal wave propagation in an elastic rod with coulomb friction // Exp. Mech. - 1970. - V.10. - N 4. - p.137-144.
20. Fischer F.D., Rammerstorfer F.G. The thermally loaded heavy beam on a rough surface. Trends in Applications of Mathematics to Mechanics (Edited by W.Schneider, H.Troger and F.Ziegler). Longman Scientific & Technical, Essex (1991).
21. Nikitin L.V., Tyurekhodgaev A.N. Wave propagation and vibration of elstic rods with interfacial frictional slip // Wave motion. – 1990. – N 12. – p.513-526.

Резюме

В работе построено аналитическое решение задач о распространении нелинейных волн под воздействием циклической нагрузки, частота которой не равно частоте собственных колебаний системы. Аналитическое решение задачи получено методом Каппа-функции, построенного А.Тюреходжаевым. Показано, что в этом случае реализуется установившееся колебание с двумя частотами.

Ключевые слова: Нелинейные волны, установившиеся колебания, нелинейный механизм диссипации энергий, кулоновое сухое трение, взаимодействие слоев в геомеханике, субгармонические и ультрагармонические колебания.

Түйіндеме

Жұмыста циклдік жүктеменің әсерінен бейсызықты толқынның таралуы туралы мәселенің аналитикалық шешімі табылған. Аналитикалық шешім каппа-функция әдісін қолдану арқылы анықталған. Бұл орайда қалыптасқан тербелістер екі жиілікпен жүзеге асатыны көрсетілген.

Кілт сөздер: сызықты емес толқындар, резонансты және қалыптасқан тербелістер, энергия бытырауының сызықсыз заңы, кулон құрғақ үйкелісі, геомеханикадағы қабаттардың әсерлесуі, субгармоническиеультрагармоническиеколебания.

Summary

We construct analytical solution of the problems of the propagation of nonlinear waves under the influence of cyclic loading, the frequency of which is not equal to the natural frequency of the system. Analytical solution of the problem is obtained by Kappa function method built by A.Tyurehodzhaev. It is shown that in this case the steady-state oscillations with two frequencies are realized.

Key words: Nonlinear waves, resonant and steady oscillations, nonlinear mechanism of the energy dissipation, Coulomb dry friction, subharmonic and ultraharmonic oscillations, interaction of the layersin geomechanics.

УДК 512.6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА БИКВАТЕРНИОНОВ В РЕШЕНИИ БИКВАТЕРНИОННЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.А.АЛЕКСЕЕВА, доктор физико-математических наук
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

В работах [1,2] представлены основы дифференциальной алгебры бикватернионов, которая очень удобна для решения широкого класса задач математической физики.

С использованием дифференциальных операторов - взаимных комплексных градиентов (биградиентов), обобщающих понятие градиента на функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского, можно многие системы уравнений волновой динамики различных сред привести к решению одного дифференциального бикватернионного уравнения, решения которого можно построить намного легче, нежели искать решения эквивалентной ему системы дифференциальных уравнений восьмого порядка.

Здесь дифференциальная алгебра бикватернионов используется для построения обобщенных решений бикватернионного волнового (*биволнового*) уравнения:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{F}\circ\mathbf{B}=\mathbf{G}(\tau,x), \qquad (\tau,x)\in\mathbf{M}\ , \tag{1}$$

где структурный коэффициент $\mathbf{F}$ - постоянный бикватернион. Согласно кватернионному умножению

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{B}=(f+F)\circ(b+B)=(fb-(F,B))+(fB+bF+[F,B]). \tag{2}$$

Здесь и далее используем скалярно-векторную запись бикватернионов, используя для скаляра одноименные строчные буквы, а для вектора – прописные курсивом, (F,B) и $[F,B]$ -- скалярное и векторное произведение указанных векторов. $\mathbf{B}(\tau,x),\mathbf{G}(\tau,x)$ принадлежат $\mathbf{B}'(\mathbf{M})$ - пространству обобщенных бикватернионов на пространстве Минковского $\mathbf{M}$. Дифференциальные бикватернионные операторы $\nabla^{\pm}=\partial_\tau\pm i\nabla$ -- *взаимные биградиенты*, действие которых на $\mathbf{B}(\tau,x)$ определяется алгеброй бикватернинов :

$$\begin{aligned}\nabla^{\pm}\mathbf{B}&=\left(\partial_\tau\pm i\nabla\right)\circ\left(b(\tau,x)+B(\tau,x)\right)=\\&=\left(\partial_\tau b\mp i\operatorname{div}B\right)+\partial_\tau B\pm i\operatorname{grad}b\pm i\operatorname{rot}\mathrm{B}\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение (1) относится к классу биволновых уравнений общего вида:

$$\mathbf{A}\circ\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{C}\circ\mathbf{B}=\mathbf{H}(\tau,x), \tag{4}$$

которые приводятся к (1), если существует $\mathbf{A}^{-1}$ [1]. В этом случае, умножая (2) слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получим уравнение (1), где $\mathbf{F}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{C},\ \mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{H}$. Эквивалентная (1) система дифференциальных уравнений относится к классу уравнений Янга-Милса [3].

В [1,2] автором рассмотрены частные случаи, когда $\mathbf{F}$ скаляр либо вектор. Показано, что уравнение (1) эквивалентно модифицированной системе уравнений Максвелла при $\mathbf{F}=0$ и Дирака при чисто мнимом $\mathbf{F}=i\rho$. В этих работах, с использованием теории обобщенных функций, построены элементарные и общие решения (1), описывающие нестационарные, гармонические по времени и статические бикватернионные поля. Отметим также, что кватернионное представление системы уравнений Максвелла имеет довольно обширную библиографию, в отличие от работ по построению общего решения кватернионных и бикватернионных аналогов этой системы.

Здесь исследуем общий случай, когда структурный коэффициент $\mathbf{F}$– произвольный постоянный бикватернион, который запишем в виде:

$$\mathbf{F} = f + F, \quad f = h + i\varepsilon, \quad F = -\left(E + iH\right).$$

Построим обобщенные решения (1) при произвольной правой части из класса обобщенных бикватернионов на пространстве Минковского: $\mathbf{G}(\tau,x) \in \mathbf{B}'(\mathbf{M})$.

1. Неоднородное биволновое уравнение и его решения. Введем дифференциальные бикватернионные операторы:

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^{+} = \nabla^{+} + \mathbf{F} = \nabla^{+} + f + F, \quad \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-} = \nabla^{-} + \mathbf{F}^{-} = \nabla^{-} + f - F,$$

свойствами которых будем пользоваться далее для решения поставленной задачи. В частности,

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^{+} \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-} \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^{+} = \Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) - 2i(F,\nabla). \tag{5}$$

где волновой оператор $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ - лапласиан. Далее значок кватернионного умножения между операторами убираем: $\mathbf{D}_\mathbf{F}^{+}\mathbf{D}_\mathbf{F}^{-} \triangleq \mathbf{D}_\mathbf{F}^{+} \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}$.

Построим здесь решения уравнения (1) для верхнего знака биградиента:

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau,x), \qquad (\tau,x) \in \mathbf{M}. \tag{6}$$

Используя свойство (5), из (6) получим

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}\mathbf{D}_\mathbf{F}^{+}\mathbf{B} = \left\{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla)\right\}\mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}\mathbf{G} \triangleq \mathbf{Q}$$

Т.е. каждая компонента $\mathbf{B}$ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Box u + 2f\partial_\tau u + 2i(F,\nabla u) + f^2 u + (F,F)u = q(\tau,x) \tag{7}$$

с соответствующей $\mathbf{Q}$ правой частью.

На основе теории обобщенных функций легко доказывается

Т е о р е м а 1. *Решение биволнового уравнения* (1) *можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}\left(\psi * \mathbf{G}\right) = \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}\psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}\mathbf{G} + \mathbf{B}^0 \tag{8}$$

где $\psi(\tau,x)$ -- *фундаментальное решение уравнения* (7) (*при* $q = \delta(\tau)\delta(x)$), *а* $\mathbf{B}^0(\tau,x)$ *решение однородного уравнения* (6) (*при* $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$):

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}\left(\psi_0^j e_j * \mathbf{C}_j^0\right) \tag{9}$$

$\psi_0^j(\tau,x)$ -- *решения однородного уравнения* (7) (*при* $q = 0$), $\mathbf{C}_j^0(\tau,x) \in \mathbf{B}'(\mathbf{M})$ -- *произвольные бикватернионы, допускающие такую свертку,* e_j - *базисные элементы пространства бикватернионов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (8). Подставим первое слагаемое в уравнение (6) и, используя (5) и свойство дифференцирования свертки [7,2], получим

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}\mathbf{D}_\mathbf{F}^{+}\left(\psi * \mathbf{G}\right) = \left\{\Box\psi + 2f\partial_\tau\psi + f^2\psi + (F,F)\psi + 2i(F,\nabla\psi)\right\} * \mathbf{G} = \delta(\tau)\delta(x) * \mathbf{G} = \mathbf{G}.$$

Для каждого слагаемого второй суммы аналогично имеем

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^{-}\mathbf{D}_\mathbf{F}^{+}\left(\psi_0^j e_j * \mathbf{C}_j^0\right) = \left\{\Box\psi_0^j + 2f\partial_\tau\psi_0^j + f^2\psi_0^j + (F,F)\psi_0^j + 2i(F,\nabla\psi_0^j)\right\}\left(e_j * \mathbf{C}_j^0\right) = 0.$$

Следовательно, класс решений биволнового уравнения (6) определяется скалярными функциями - решениями уравнения (7), которые будем называть *скалярными потенциалами* биволнового уравнения.

2. Скалярные потенциалы неоднородного биволнового уравнения

Т е о р е м а 2. *Фундаментальные решения уравнения* (7) *имеют вид:*

$$\psi=(1-a)\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)+a\frac{e^{-i(F,x)+\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau+\|x\|)+\psi^{0},\qquad \forall a\in\mathbf{Z} \tag{10}$$

где $\delta(\tau-\|x\|)$ -- *простой слой на световом конусе* $\tau=\pm\|x\|$; $\psi^{0}(\tau,x)$ - *решение однородного уравнения* (7) (*при* $q=0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье обобщенных функций. Переменные Фурье, соответствующие (τ,x) обозначаем (ω,ξ) соответственно. Уравнение для ψ имеет вид:

$$\Box\psi+2f\partial_{\tau}\psi+2i(F,\nabla\psi)+f^{2}\psi+(F,F)\psi=\delta(\tau)\delta(x)\,, \tag{11}$$

а его преобразование Фурье можно записать в виде:

$$\left\{\left(\xi+F,\xi+F\right)+(f-i\omega)^{2}\right\}\bar{\psi}=1$$

Откуда получим

$$\bar{\psi}(\omega,\xi)=\frac{1}{\left(\xi+F,\xi+F\right)-(\omega+if)^{2}}$$

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Даламбера: $\Box\chi=\delta(x,t)$, которое имеет вид :

$$\chi(x,\tau)=\frac{1-a}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)+\frac{a}{4\pi\|x\|}\delta(\tau+\|x\|),\quad \forall a\in\mathbf{Z}\,.$$

Это сингулярные обобщенные функции – простые слои на световом конусе "будущего и прошедшего": $\tau=\pm\|x\|$. Их преобразование Фурье

$$\mathrm{F}\left[\frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau\mp\|x\|)\right]=\frac{1}{\|\xi\|^{2}-\omega^{2}\pm i0} \tag{12}$$

Используя свойства сдвига преобразования Фурье [3], из (11) и (12) следует формула:

$$\psi=\frac{e^{i(F,x)-\tau f}}{4\pi\|x\|}\left((1-a)\delta(\tau-\|x\|)+a\delta(\tau+\|x\|)\right)+\psi^{0},\quad \forall a\in\mathbf{Z}$$

Поскольку на носителе первого слагаемого $\tau=\|x\|$, а у второго $\tau=-\|x\|$, в результате получим формулу теоремы.

Заметим, что ψ -- сингулярная обобщенная функция, включающая две сферические расходящиеся и сходящиеся волны, распространяющиеся в R^{3} с единичной скоростью (если τ - время).

Используя это фундаментальное решение можно построить решение уравнения (6) при достаточно произвольной правой части.

Т е о р е м а 3. *Если* $\sup\limits_{\tau} q(x,\tau)=\{\tau:\tau\geq 0\}$ *и* $q(x,\tau)$ - *регулярная функция, такая, что при малых x для* $\forall\tau>0$ $\quad\exists\varepsilon<1$: $|q(x,\tau)|\leq O\left(\|x\|^{-(2+\varepsilon)}\right)$, *то обобщенное решение уравнения* (7) *имеет вид:*

$$u=\psi^{0}+\frac{e^{i(F,x)}}{4\pi}\int\limits_{r<\tau}\frac{e^{-i(F,y)-rf}}{r}q(y,\tau-r)dV(y),\quad r=\|y-x\| \tag{13}$$

где ψ^{0} - *решение однородного уравнения* (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя свойство фундаментального решения [4], получим обобщенное решение в виде свертки:

$$u = q(x,\tau) * \frac{e^{i(F,x)-\|x\| f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) =$$

$$= \frac{e^{i(F,x)}}{4\pi} H(\tau) \int\limits_{\|y-x\|<\tau} \frac{e^{-i(F,y)-\|x-y\| f}}{\|y-x\|} q(y, \tau - \|y-x\|) dV(y),$$

$dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$. Что дает формулу теоремы. При этом интеграл существует в силу условий на $q(x,\tau)$.

3. Скалярные потенциалы однородного биволнового уравнения. Построим решения однородного уравнения (7):

$$\Box u + 2f\partial_\tau u + 2i(F,\nabla u) + f^2 u + (F,F)u = 0 \tag{14}$$

Его преобразование Фурье имеет вид:

$$\left\{\left(\xi + F, \xi + F\right) + (f - i\omega)^2\right\}\bar{\psi}^0 = 0$$

Следовательно [4], $\bar{\psi}^0 = \varphi(\omega,\xi)\delta_S(\omega,\xi)$, где $\delta_S(\omega,\xi)$ -- простой слой на поверхности S в M, на которой выполняются условия:

$$S = \left\{(\omega,\xi) : \left(\xi + F, \xi + F\right) + (f - i\omega)^2 = 0\right\}, \tag{15}$$

плотность простого слоя $\varphi(\omega,\xi)$ -- произвольная интегрируемая на S функция.

Формальное решение уравнения (14) имеет вид поверхностного интеграла

$$\psi^0(\tau,x) = \int\limits_S \varphi(\omega,\xi)\exp(-i\omega\tau - i(x,\xi))dS(\omega,\xi), \quad \forall\varphi(\omega,\xi) \in L_1(S) \tag{16}$$

При каких **F** такая поверхность существует, и какой вид она имеет?

3.1. Рассмотрим вначале случай, когда $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = i\varepsilon - E$, где ε, E -- действительные скаляр и вектор. Тогда S – это поверхность в $R^4 = \left\{(\omega,\xi) \overset{\Delta}{=} (\omega,\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right\}$, описываемая уравнением:

$$S = \left\{(\omega,\xi) : \left(\xi - E, \xi - E\right) - (\varepsilon - \omega)^2 = 0\right\}. \tag{17}$$

Это трехмерный конус в R^4 с вершиной в точке $(\omega,\xi) = (\varepsilon, E)$. Т.к. на его поверхности

$$\omega = \pm\|\xi - E\| + \varepsilon,$$

интеграл (16) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\psi^0(\tau,x) &= e^{-i\varepsilon\tau}\int\limits_{R^3}\phi(\xi)\exp\left(\pm i\|\xi - E\|\tau - i(x,\xi)\right)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ &= e^{-i\varepsilon\tau - i(x,E)}\int\limits_{R^3}\phi(\xi)\exp\left(\pm i\|\xi - E\|\tau - i(x,\xi - E)\right)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ &= e^{-i(\varepsilon\tau + (x,E))}\int\limits_{R^3}\varphi(\varsigma)\exp\left(\pm i\|\varsigma\|\tau - i(x,\varsigma)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2 d\varsigma_3\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $\forall\varphi(\varsigma) \in L_1(R^3)$ - произвольная интегрируемая на R^3 функция.

3.2 Если же $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = h - iH$ (h, H -- действительные скаляр и вектор), тогда из (15) следует:

$$\left(\xi - iH, \xi - iH\right) + \left(h - i\omega\right)^2 = \|\xi\|^2 - \omega^2 + \left(h^2 - \|H\|^2\right) - 2i\left((H,\xi) + h\omega\right) = 0 \tag{19}$$

Решением этого уравнения будет пересечение двух множеств в R^4, задаваемых равенствами:

$$S = \left\{(\omega,\xi) : \|\xi\|^2 = \omega^2 + \|H\|^2 - h^2, \quad h\omega + (H,\xi) = 0\right\} \tag{20}$$

При $H=0 \quad S=\left\{(\omega,\xi):\|\xi\|^2=-h^2, \quad \omega=0\right\}$, откуда следует, что такой поверхности не существует.

При $H\neq 0$ второе уравнение – это трехмерная гиперплоскость в R^4, проходящая через начало координат, с вектором нормали (h,H). Если $h\neq 0$, то S – это пересечение трехмерного гиперболоида с трехмерной гиперплоскостью, на котором

$$\|\xi\|^2=(h^{-1}H,\xi)^2+\|H\|^2-h, \quad \omega=-(h^{-1}H,\xi) \quad \Rightarrow \quad \|\xi\|^2=\frac{\|H\|^2-h^2}{1-(e_\xi, h^{-1}H)^2}, \qquad e_\xi=\frac{\xi}{\|\xi\|}.$$

Условием существования такого пересечения является неравенство

$$\frac{\|H\|^2-h^2}{h^2-\|H\|^2\cos^2\theta}>0, \tag{21}$$

где θ -- угол между ξ и H. Неравенсто выполняется при $|h|<\|H\|$, если $|\cos\theta|<\dfrac{|h|}{\|H\|}<1$.

При $|h|>\|H\|$ решений нет, т.к. $|\cos\theta|\leq 1$.

Легко видеть, что $S_\cap(\xi)$ -- это однополостный гиперболоид вращения вокруг вектора H в R^3, полуоси которого определяются величинами

$$\left(\|H\|^2-h^2\right)^{1/2}, \quad \left(\|H\|^2-h^2\right)^{1/2}, \ h.$$

Формула решения (17) приводится к виду:

$$\psi^0(\tau,x)=\int\limits_{S_\cap(\xi)}\varphi(\xi)\exp\Big(i(\tau h^{-1}H-x,\xi)\Big)dS_\cap(\xi), \quad \forall\varphi(\xi)\in L_1\left(S_\cap(\xi)\right) \tag{22}$$

где $S_\cap(\xi)=\left\{\xi:\|\xi\|=\sqrt{\dfrac{\|H\|^2-h^2}{1-\|h^{-1}H\|^2\cos^2\theta}}, \quad \dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{|h|}{\|H\|}<\theta<\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{|h|}{\|H\|}\right\}$

Этот интеграл можно упростить, если перейти к декартовой системе координат, связанной с вектором H:

$$\xi=\sum_{k=1}^{3}\zeta_k e^k, \quad e^3=e_H=H/\|H\|.$$

Тогда $$S_\cap(\xi)\to S_\varsigma=\left\{\zeta:\frac{\|\zeta\|_2^2}{\|H\|^2-h^2}-\frac{1}{h^2}\zeta_3^{\,2}=1\right\}, \quad \|\zeta\|_2^2=\zeta_1^2+\zeta_1^2$$

и интеграл (22) преобразуется к интегралу по плоскости $\varsigma\in R^2$, с выколотым кругом радиуса $r=\|H\|^2-h^2$, на которой $\zeta_3=\pm\sqrt{\dfrac{h^2\|\zeta\|_2^2}{\|H\|^2-h^2}}$. Обозначим

$$\alpha(r)=\frac{|h|r}{\sqrt{\|H\|^2-h^2}}$$

Действительно, в силу ортогональности H к e^1 и e^2, имеем

$$\psi^0(\tau,x)=\int\limits_{S_\zeta}\gamma(\varsigma)\exp\left(ih^{-1}(H,\varsigma)\tau-i\sum_{k=1}^{2}(x,e^k)\zeta_k-i(x,e_H)\zeta_3)\right)dS_\zeta \quad \Rightarrow$$

$$\psi^0(\tau,x)=\int\limits_{\|\varsigma\|_2^2\ge\|H\|^2-h^2}\gamma(\varsigma)\exp\Big(\pm i\tau h^{-1}\|H\|\alpha(\|\varsigma\|)-i(\varsigma,x_{\perp H})\mp i(x,e_H)\alpha(\|\varsigma\|)\Big)d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

$$\|\varsigma\|_2^2=\sum_{k=1}^{2}\varsigma_k^2\,,\quad \forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left(\varsigma\in R^2,\quad \|\varsigma\|\ge\|H\|^2-h^2\right).$$

Остался случай $h=0$. Тогда из (20) получим:

$$S=\left\{\omega=\pm\sqrt{\|\xi\|^2-\|H\|^2},\|\xi\|\ge\|H\|,\quad (H,\xi)=0\right\}$$

$$\psi^0(\tau,x)=\int\limits_{\{\xi\perp H\}\bigcap\{\|\xi\|\ge\|H\|\}}\varphi(\xi)\exp\left(i(\pm\tau\sqrt{\|\xi\|^2-\|H\|^2}-(x,\xi))\right)dV(\xi)\quad\Rightarrow$$

$$\psi^0_\mp(\tau,x)=\iint\limits_{\|\varsigma\|_2\ge\|H\|}\gamma(\varsigma)\exp\left(-i\left(\varsigma_1(x,e_H^1)+\varsigma_2(x,e_H^2)\mp\tau\sqrt{\|\zeta\|^2-\|H\|^2}\right)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

$\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left(\varsigma\in R^2,\quad \|\varsigma\|\ge\|H\|\right)$. Здесь область интегрирования тоже совпадает с плоскостью, перпендикулярной вектору H, с выколотым кругом радиуса $\|H\|$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Т е о р е м а 4. *Решения однородного биволнового уравнения* (1) *при* $\mathbf{F}=\mathbf{F}_2=h-iH$ *существуют, если* $\|H\|>|h|$, *и имеют вид*: *при* $|h|\ne 0$

$$\psi^0_\pm=\iint\limits_{\|\varsigma\|^2\ge\|H\|^2-h^2}\gamma(\varsigma)\exp\Big(\pm i\tau h^{-1}\|H\|\alpha(\|\varsigma\|)-i(\varsigma,x_{\perp H})\mp i(x,e_H)\alpha(\|\varsigma\|)\Big)d\varsigma_1 d\varsigma_2,\tag{23}$$

$\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left(\left\{\varsigma\in R^2:\|\varsigma\|^2\ge\|H\|^2-h^2\right\}\right)$, $x_{\perp H}=x-(x,e_H)e_H$; *при* $|h|=0$

$$\psi^0_\mp(\tau,x)=\iint\limits_{\|\varsigma\|\ge\|H\|}\gamma(\varsigma)\exp\left(-i\left(\varsigma_1(x,e_H^1)+\varsigma_2(x,e_H^2)\mp\tau\sqrt{\|\zeta\|^2-\|H\|^2}\right)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2,\tag{24}$$

$\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left(\varsigma\in R^2,\quad \|\varsigma\|\ge\|H\|\right)$, *либо представимы в виде линейной комбинаций решений такого вида*: $\psi^0(\tau,x)=a\psi^0_+(\tau,x)+b\psi^0_-(\tau,x),\quad a,b\in\mathbf{Z}$.

3.3. В общем случае структурный коэффициент разлагается на два бикватерниона:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=\left(h+i\varepsilon\right)-\left(E+iH\right),\tag{25}$$

$$\mathbf{F}_1=i\varepsilon-E,\quad \mathbf{F}_2=h-iH.$$

Предполагаем здесь, что

$$\mathbf{F}_1\ne 0,\quad \mathbf{F}_2\ne 0.\tag{26}$$

Тогда гиперповерхность (15) описывается соотношениями:

$$S=\left\{(\omega,\xi):\left((\xi-E)-iH,(\xi-E)-iH)\right)+\left(h+i(\varepsilon-\omega)\right)^2=0\right\}\tag{27}$$

Выделим действительную и мнимую часть:

$$S=\left\{(\omega,\xi):\|\xi-E\|^2-\|H\|^2-2i\left(H,(\xi-E)\right)+(h^2-(\varepsilon-\omega)^2+2ih(\varepsilon-\omega))=0\right\},$$

приравнивая их нулю, получим S – это пересечение двух гиперповерхностей в R^4:

$$S=\left\{(\omega,\xi):\|\xi-E\|^2-(\omega-\varepsilon)^2=\|H\|^2-h^2\quad\bigcap\quad\left(H,(\xi-E)\right)+h(\omega-\varepsilon)=0\right\}\tag{28}$$

Чтобы второе уравнение описывало гиперплоскость, необходимо, чтобы H и h не обращались одновременно в ноль в R^4. В противном имеем случай 3.1.

Если $\|H\|-|h|\neq 0$, то S – это пересечение в R^4 трехмерного однополостного (при $\|H\|-|h|>0$) или двуполостного (при $\|H\|-|h|<0$) гиперболоида, сдвинутого на вектор $\left(\omega^*,\xi^*\right)=(\varepsilon,E)$, с трехмерной гиперплоскостью с тем же сдвигом, которое в R^3 описывается множествами вида:

$$S_{\cap}(\xi)=\left\{\omega=\varepsilon-h^{-1}(H,\xi-E),\ \xi:\left\{\|\xi-E\|^2-\left(h^{-1}H,\xi-E\right)^2=\|H\|^2-h^2\right\}\right\} \qquad (29)$$

Из формулы (16) и формулы (29) следует: при $|h|\neq 0$

$$\psi^0(\tau,x)=e^{-i\tau\varepsilon}\int\limits_{S_{\cap}(\xi)}\phi(\xi)\exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H,\xi)-(x,\xi)\right)\right)dS_{\cap}(\xi), \qquad (30)$$

для $\forall\phi(\xi)\in L_1\left(S_{\cap}(\xi)\right)$.

Переходя к системе координат с началом в точке $\xi^*=E$ и ортами $e^1,e^2,e^3=h^{-1}H/\left\|h^{-1}H\right\|$, получим

$$S_{\varsigma}(\varepsilon,E)=\left\{\varsigma\in R^3:\|\varsigma\|^2-\left(\left\|h^{-1}H\right\|\varsigma_3\right)^2=\|H\|^2-h^2\right\}=$$

$$=\left\{\varsigma\in R^3:\zeta_1^2+\zeta_2^2+(1-\left\|h^{-1}H\right\|^2)\varsigma_3{}^2=\|H\|^2-h^2\right\}$$

Следовательно, такая поверхность существует, только если $\|H\|>|h|$, и на ней

$$\varsigma_3(\|\varsigma\|)=\pm\sqrt{\frac{\|H\|^2-h^2-\|\zeta\|^2}{(1-\left\|h^{-1}H\right\|^2)}},\quad \|\zeta\|^2>\|H\|^2-h^2,\quad \varsigma\in R^2:$$

В этой системе координат решение можно представить в виде

$$\psi^0(\tau,x)=\exp\left(-i\tau\left(\varepsilon-(h^{-1}H,E)\right)-i\left(x,E\right)\right)\times$$

$$\times\iint\limits_{\|\varsigma\|>\sqrt{\|H\|^2-h^2}}\gamma(\varsigma)\exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H,\|\varsigma\|e_H)-(x_{\perp H},\varsigma)\mp\varsigma_3(\|\varsigma\|)x_{\parallel H}\right)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_1$$

для $\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left\{\varsigma:\|\varsigma\|\leq\sqrt{\|H\|^2-h^2}\right\}$, $x=x_{\parallel H}e^3+x_{\perp H}$, $x_{\parallel H}=(x,e^3)$, $x_{\perp H}=x-(x,e^3)e^3$.

Если $|h|=0$, тогда

$$S=\left\{(\omega,\xi):\|\xi-E\|^2-(\omega-\varepsilon)^2=\|H\|^2\bigcap\left(H,(\xi-E)=0\right)\right\},$$

$$S_{\cap}(\xi)=\left\{(\omega,\xi):\omega=\varepsilon\pm\sqrt{\|\xi-E\|^2-\|H\|^2};\quad \xi:\left\{\|\xi-E\|^2\geq\|H\|^2\bigcap\left(H,(\xi-E)=0\right)\right\}\right\},$$

$$\psi^0(\tau,x)=e^{-i\tau\varepsilon}\int\limits_{\substack{\xi-E\perp H\,\cap\\ \|\xi-E\|\geq\|H\|}}\varphi(\xi)\exp\left(i(\pm\tau\sqrt{\|\xi-E\|^2-\|H\|^2}-(x,\xi))\right)dS_{\cap}(\xi),$$

$$\forall\varphi(\xi)\in L_1(S_{\cap}(\xi))$$

$S_{\cap}(\xi)$ – это часть плоскости, перпендикулярной вектору H, проходящей через точку $\xi^*=E$, с выколотым кругом радиуса $\|H\|$, с центром в той же точке $\xi^*=E$. Интеграл тоже можно упростить, переходя к системе координат, связанной с осями соответствующего одноосного гиперболоида.

Сформулируем полученные результаты в следующей теореме.

Т е о р е м а 5. *Скалярные потенциалы однородного биволнового уравнения общего вида* (1)*, удовлетворяющие уравнению* (14), *существуют при* $\|H\| > |h|$ *и представимы в виде линейной комбинаций решений вида*:

при $|h| \neq 0$

$$\psi^0(\tau,x) == \exp\Big(-i\tau\Big(\varepsilon-(h^{-1}H,E)\Big)-i\big(x,E\big)\Big)\times$$

$$\times \iint\limits_{\|\varsigma\|>\sqrt{\|H\|^2-h^2}} \gamma(\varsigma)\exp\Big(i\Big(\tau h^{-1}\|H\|\|\varsigma\|-(x_{\perp H},\varsigma)\mp\varsigma_3(\|\varsigma\|)x_{\parallel H}\Big)\Big)d\varsigma_1 d\varsigma_2, \qquad (33)$$

при $|h| = 0$

$$\psi^0(\tau,x) = e^{-i\tau\varepsilon-i(x,E)} \int\limits_{\|\varsigma\|\geq\|H\|} \gamma(\varsigma)\exp\left(i(\pm\tau\sqrt{\|\varsigma\|^2-\|H\|^2}-(x_{\perp H},\varsigma)-\left(x,\frac{H}{\|H\|}\right)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

для $\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left\{\varsigma\in R^2:\|\varsigma\|\geq\sqrt{\|H\|^2-h^2}\right\}$, $\quad x_{\parallel H}=(x,e^3),\ x_{\perp H}=x-x_{\parallel H}e^3,\ e^3=H/\|H\|$.

В силу произвольности $\gamma(\varsigma)$, можно строить множество скалярных потенциалов и соответственно решений исходного бикватернионного уравнения (1).

Заключение. Рассмотренное здесь биволновое твисторное уравнение (1), если записать его в виде системы уравнений для скалярной и векторной части и перейти к их тензорному аналогу, можно отнести к классу уравнений Янга-Миллса [3], используемых в квантовой механике для построения моделей элементарных частиц [5]. Решения однородных уравнений Янга-Миллса называются *твисторами*. Здесь показано, что для твисторов существуют порождающие их скалярные потенциалы, которые определяют их решения. Скалярные потенциалы выражаются через интегралы от элементарных потенциалов, выражаемых через экспоненциальные функции, и содержат достаточно произвольные подынтегральные функции типа $\chi(\varsigma)$. От этих представлений нетрудно перейти к представлению твисторов с использованием функций Бесселя и сферических гармоник, если выбирать $\chi(\varsigma)$ соответственно интегральным разложениям этих специальных функций. В этом случае можно получить счетное число еще более элементарных твисторов, которые можно использовать в теории элементарных частиц.

Биволновое уравнение (1) при $\mathbf{B} = i\rho + J$ имеет вид уравнения трансформации масс-зарядов (ρ) и электро-гравимагнитных токов (J) под воздействием постоянного внешнего ЭГМ-поля, описываемого бикватернионом **F,** для одной бикватернионной модели ЭГМ-поля [6,7]. Если перейти на физический язык, полученные здесь твисторы для этой модели описывают трансформацию спиноров свободного поля (при **F** =0), под воздействием постоянного внешнего ЭГМ-поля, вектор электрической напряженности которого равен *E*, а гравимагнитной напряженности *H*. Потенциальная часть *H* описывает напряженность внешнего гравитационного поля, а его вихревая часть соответствует магнитной напряженности внешнего поля. Скаляры ε и h описывают свойства сопротивления-поглощения этих полей. Используя построенные здесь решения можно детально исследовать такие процессы.

Литература:

1.Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов//Математический журнал. - Т.10 (2010). - №.1. - С.33-41; №.3. - С.5-13; Т.11 (2011). - №.1. - С.30-38. -Т.13 (2013). - №1. - С.17-35.

2. Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations// Clifford Analysis, Clifford algebras and their applications. Vol.7 (2012), No.1, 19-39.

3. Yang C.N.,Mills R. Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance// Physical review. Vol.96 (1954), No 1, 191-195.

4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике – М.: Наука, 1976.

5. Боголюбов Н.В., Логунов А.А., Оксак А.А., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля - М.:Наука, 1987.

6. Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона// Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2004. - №3. - С. 45-53.

7. Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравимагнитного поля// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. -Т.6. - №1. - С.122-134.

Резюме

На основе дифференциальной алгебры бикватернионов и теории обобщенных функций рассмотрено бикватернионное волновое уравнение общего вида при бикватернионном представлении его структурного коэффициента. Если записать это уравнение в матричном (тензорном) виде, оно относится к классу уравнений Янга-Миллса, которые используются в теоретической физике для математического описания элементарных частиц. Построены обобщенные решения однородного и неоднородного уравнения.

Ключевые слова: бикватернионное волновое уравнение, структурный коэффициент, обобщенное решение.

Түйіндеме

Бикватернион дифференциалдық алгебрасы және жалпыланған функциялар теориясының негізінде бикватернион түріндегі құрылымды еселік үшін жалпы түрдегі бикватернион толқындық теңдеуі қарастырылған. Егер сол теңдеу матрицалық (тензорлық) түрде жазылса, ол элементарлық бөлшектің математикалық сипаттамасы үшін қағидалы физикада пайдаланылатын Янг-Миллстың теңдеулеріне қарайды. Бірыңғай және аламық теңдеулердің жалпыланған шешімдері құрастырылған.

Кілт сөздер: бикватернион толқындық теңдеу, құрылымды еселік, жалпыланған шешім.

Summary

On the base of differential algebra of biquaternions and theories of generalized functions the biquaternionic wave equation of general type is considered under biquaternionic representation of its structural factor. If we write this equation in matrix (tensor) form, it pertains to the class of the Young-Mills equations, which are used in theoretical physics for mathematical description of the elementary particles. Its generalized decisions of homogeneous and non-homogeny equations have been built.

Key words: biquaternionic wave equation, structural coefficient, generalized solutions.

УДК 510.6

СЧЁТНЫЕ ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ МОДЕЛИ УНИВЕРСАЛЬНО АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ ТЕОРИЙ

А.Т.НУРТАЗИН, кандидат физико-математических наук
Казахский национальный университет им. аль - Фараби, г.Алматы,
Республика Казахстан

1.Замена функций на их графики.

В теории моделей имеется стандартная процедура, состоящая в рассмотрении вместо каждой функции её графика. В реляционных сигнатурах намного проще определяются формулы. Поэтому значительно упрощаются многие доказательства, использующие индукцию по сложности формул. Интересно, что переход от смешанной к реляционной сигнатуре при рассмотрении понятия "экзистенциальной замкнутости" не приводит к значительным потерям.

Предложение 1. Пусть реляционная структура $\boldsymbol{A}$ получена из структуры $\boldsymbol{A}'$ смешанной сигнатуры заменой всех функций на их графики. Тогда семейства формульных отношений в структуре $\boldsymbol{A}'$ и полученной в результате такого перехода структуре $\boldsymbol{A}$ совпадают.

Следующий естественный вопрос, возникающий в связи с проведёнными ассуждениями, касается проблемы задания класса структур $\boldsymbol{C}$ чисто предикатной сигнатуры Σ, полученных из структур некоторого аксиоматизируемого класса $\boldsymbol{C}'$ смешанной сигнатуры Σ'.

Предложение 2.

1) Если класс $\boldsymbol{C}'$ моделей смешанной сигнатуры Σ' аксиоматизируем, то класс $\boldsymbol{C}'$ моделей чисто предикатной сигнатуры Σ, полученных из моделей класса $\boldsymbol{C}'$ заменой функций на их графики, также аксиоматизируем.

2) Если элементарная теория аксиоматизируемого класса моделей $\boldsymbol{C}'$ аксиоматизируется $\forall_{2k}$ предложениями, то теория $\boldsymbol{T}$ класса $\boldsymbol{C}'$ моделей, полученных из моделей класса $\boldsymbol{C}'$ заменой всех функций на их графики, также является $\forall_{2k}$ теорией.

3) При замене функций на их графики класс структур, экзистенциально замкнутых в исходной теории, переходит в класс структур, экзистенциально замкнутых в новой реляционной.

Σ, полученных из структур некоторого аксиоматизируемого класса *C* смешанной сигнатуры Σ.

Предложение 2.

1) Если класс *C* моделей смешанной сигнатуры Σ аксиоматизируем, то класс *C* ' моделей чисто предикатной сигнатуры Σ, полученных из моделей класса *C*' заменой функций на их графики, также аксиоматизируем.

2) Если элементарная теория аксиоматизируемого класса моделей *C*' аксиоматизируется $\forall_{2k}$-предложениями, то теория *T* класса *C*' моделей, полученных из моделей класса *C*' заменой всех функций на их графики, также является $\forall_{2k}$ -теорией.

3) При замене функций на их графики класс структур, экзистенциально замкнутых в исходной теории, переходит в класс структур, экзистенциально замкнутых в новой реляционной.

2.Экзистенциально замкнутые модели и универсально аксиоматизируемые теории со свойством совместного вложения.

Хорошо известно, что класс структур, экзистенциально замкнутых в произвольной непротиворечивой теории $\boldsymbol{T}$, на самом деле совпадает с классом структур, экзистенциально замкнутых в её универсальной подтеории $\boldsymbol{T}_\forall$. Более того, $\boldsymbol{T}_\forall$ является слабейшей среди теорий, классы экзистенциально замкнутых моделей которых совпадают с классом структур, экзистенциально замкнутых в самой теории $\boldsymbol{T}$.

В теории моделей при изучении различных классов структур одним из наиболее "полезных" признаётся так называемое свойство «*совместного вложения*».

Определение.

Класс структур $\boldsymbol{C}$ обладает свойством совместного вложения, если для двух произвольных структур $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ из $\boldsymbol{C}$ в нём найдётся третья $\boldsymbol{B}$, в которую могут быть одновременно изоморфно вложены структуры $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$.

Свойством совместного вложения, в частности, обладает класс моделей, локально вложимых в некоторую фиксированную. Элементарная теория этого класса универсально аксиоматизируема. Если класс моделей данной универсальной теории $\boldsymbol{T}$ обладает свойством совместного вложения, то мы говорим, что этим свойством обладает сама эта теория.

Теорема 1.

Класс экзистенциально замкнутых моделей произвольной непротиворечивой универсально аксиоматизируемой теории $\boldsymbol{T}$ *является объединением непересекающихся классов экзистенциально замкнутых моделей её минимальных универсальных расширений, обладающих свойством совместного вложения.*

На практике полезным может оказаться следующий синтаксический эквивалент этого условия:

Предложение. *Для того, чтобы непротиворечивая универсальная теория* $\boldsymbol{T}$ *обладала свойством совместного вложения, необходимо и достаточно, чтобы все выполнимые в этой теории экзистенциальные предложения были выполнимы в ней одновременно.*

Основным неформальным следствием этого параграфа является то, что для описания экзистенциально замкнутых моделей любой универсальной теории достаточно изучить экзистенциально замкнутые модели всех её минимальных универсальных расширений, обладающих свойством совместного вложения. Ввиду вышесказанного, предполагается, что все рассматриваемые в дальнейшем универсальные теории обладают свойством совместного вложения.

3. Экзистенциальные формулы и максимальные типы. Модельная полнота и экзистенциальная замкнутость.

Легко видеть, что экзистенциально замкнутые модели универсально аксиоматизируемой теории со свойством совместного вложения имеют одинаковую $\forall\exists$-теорию. Таким образом, по аналогии с булевой алгеброй $\boldsymbol{B}$_n(S) для полной теории $\boldsymbol{S}$ по произвольной универсально аксиоматизируемой обладающей свойством совместного вложения теории $\boldsymbol{T}$ определяется дистрибутивная решётка $\boldsymbol{E}$_n(T), элементами которой являются классы эквивалентных во всех экзистенциально замкнутых моделях этой теории

n-местных экзистенциальных формул, а отношение порядка определяется обычным семантическим следованием в классе $\boldsymbol{E}$_T.

Заметим, что в теории $\boldsymbol{T}^e$ дистрибутивные решётки $\boldsymbol{E}_n(T^e)$, $n\in\omega$, оказываются подрешётками булевых решёток $\boldsymbol{E}_n(T^e)$, $n\notin\omega$. Естественно предположить, что свойства класса $\boldsymbol{E}_T$ экзистенциально замкнутых моделей универсально аксиоматизируемой и имеющей свойство совместного вложения теории $\boldsymbol{T}$ во многом определяются свойствами семейства $\boldsymbol{E}_n(T^e)$: $n\in\omega$ её дистрибутивных решёток экзистенциальных отношений. Ввиду вышесказанного, представляется интересным исследовать ситуацию, когда все дистрибутивные решётки $\boldsymbol{T}_n(T^e)$, $n\in\omega$, оказываются булевыми. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы в теории T^e отрицание $\neg[\exists \mathbf{y}\ \ \psi(\mathbf{x},\mathbf{y})]$ любой экзистенциальной формулы $\exists \mathbf{y}\ \ \psi(\mathbf{x},\mathbf{y})$, которое является универсальной формулой $\forall \mathbf{y}\ \ [\neg\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})]$, было эквивалентно некоторой экзистенциальной формуле. Довольно неожиданный ответ на сформулированный вопрос даёт следующее утверждение:

Теорема 2.

Пусть $\boldsymbol{T}$ *универсально аксиоматизируемая, имеющая свойство совместного вложения теория. Тогда элементарная теория* T^e *её подкласса экзистенциально замкнутых моделей полна и модельно полна, если и только если в ней любая универсальная формула эквивалентна некоторой экзистенциальной.*

При изучении свойств и строения моделей данной полной теории чаще всего обычно пользуются понятием полного типа конечного кортежа из произвольной модели этой теории. Неформальным следствием первой части этого параграфа является то, что при изучении экзистенциально замкнутых моделей произвольной обладающей свойством совместного вложения универсальной теории $\boldsymbol{T}$ более полезным может оказаться следующее ослабление этого понятия.

Определение.

Экзистенциальным типом кортежа $\boldsymbol{a}$ *из модели* $\boldsymbol{M}$ *называется множество* $tp_{\exists}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{M})=tp_{\exists}(\boldsymbol{a})$ *всех выполняющихся на нём* $\exists$*-формул.*

Очевидно, экзистенциальный тип данного кортежа $\mathbf{a}$ из произвольной модели универсальной теории $\boldsymbol{T}$ может не быть в ней максимальным совместным множеством экзистенциальных формул. Следующее утверждение показывает, что для кортежей из экзистенциально замкнутых моделей ситуация становится иной. Кроме того, третий пункт теоремы в дальнейшем эффективно используется для конструирования простой экзистенциально замкнутой модели теории $\boldsymbol{T}$.

Теорема 3.

Для произвольной модели $\boldsymbol{M}$ *универсальной обладающей свойством совместного вложения теории* $\boldsymbol{T}$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\boldsymbol{M}$ *экзистенциально замкнута в* $\boldsymbol{T}$ *.*

2) Экзистенциальные типы всех кортежей из $\boldsymbol{M}$ *максимальны в* $\boldsymbol{T}$*.*

3) В $\boldsymbol{M}$ *для любого кортежа* $\boldsymbol{a}$ *и выполняющейся на нём универсальной формулы* $\psi(\mathbf{x})$ *найдётся некоторая истинная на этом кортеже экзистенциальная формула* ц$(\boldsymbol{x})$*, для которой выполняется:* $T\vdash$ ц$(\boldsymbol{x}) \rightarrow \psi(\boldsymbol{x})$*.*

Следствие.

Для любого кортежа $\mathbf{b}$ *из экзистенциально замкнутой М универсально аксиоматизируемой теории* $\boldsymbol{T}$ *обогащение* $\boldsymbol{M}(\mathbf{b})$ *экзистенциально замкнуто в несущественном универсальном раширении* $\boldsymbol{T}\,(\mathbf{b}\ \})$ *теории* $\boldsymbol{T}$*.*

Из последнего пункта доказанной теоремы достаточно просто получается следующее условия существования в произвольной совместной теории некоторой экзистенциально замкнутой модели.

Теорема 4.

Для того, чтобы данная непротиворечивая теория ***T*** *имела хотя бы одну экзистенциально замкнутую в ней модель необходимо и достаточно, чтобы в любой выполнимой в ней универсальной формуле содержалась некоторая, также выполнимая, экзистенциальная.*

4. Счётные однородные экзистенциально замкнутые структуры.

Как следует из предыдущего параграфа, при описании свойств элементов и кортежей экзистенциально замкнутых структур важную роль играют их экзистенциальные типы.

Определение.

Счётную экзистенциально замкнутую структуру ***C*** *чисто предикатной сигнатуры У назовём (экзистенциально) однородной, если для любых двух её кортежей* ***a*** *и* ***b****, имеющих одинаковые ∃-типы, покоординатное соответствие из* ***a*** *в* ***b*** *может быть продолжено до автоморфизма структуры* ***C.***

Первым естественным вопросом, возникающим в связи с приведёнными определением будет:

Существуют ли счётные однородные экзистенциально замкнутые структуры?

Теорема 5.

Любая счётная модель ***A*** *универсальной теории* ***T*** *счётной предикатной сигнатуры У может быть расширена до однородной экзистенциально замкнутой модели* ***T*** *этой теории.*

Как показывает следующее утверждение важным свойством введённого подкласса является то, что в нём тип изоморфизма любой счётной однородной экзистенциально замкнутой модели определяется семейством реализуемых в нём экзистенциальных типов.

Теорема 6.

Две счётные однородные экзистенциально замкнутые модели ***M*** *и* ***N*** *одной и той же счётной сигнатуры \Sigma изоморфны, если и только если совпадают семейства реализуемых в них экзистенциальных типов.*

При рассмотрении произвольной полной теории одним из важных её свойств является наличие среди её счётных моделей универсальной, элементарными подмоделями которой могут считаться все другие её счётные модели. Но в случае существования особую роль среди таких универсальных счётных моделей играет понятие счётной насыщенной модели, которая единственна и однородна. Естественно, что такой же вопрос возникает и при изучении счётных экзистенциально замкнутых моделей произвольной имеющей свойство совместного вложения универсально аксиоматизируемой теории.

Теорема 7.

1. Для существования в классе счётных экзистенциально замкнутых моделей данной непротиворечивой и обладающей свойством совместного вложения универсально аксиоматизируемой теории универсальной необходимо и достаточно счётность каждого из семейств её экзистенциальных типов $\boldsymbol{ES}_n(T)$*,* $n \in \omega$*.*

2. В случае существования счётных универсальных экзистенциально замкнутых моделей среди них имеется единственная однородная.

5. Главные формулы и типы.

Этот раздел мы начнём с определения *главных* экзистенциальных формул, которые в нашем случае играют ту же роль, которую в полных теориях играют атомы.

Определение

В имеющей свойство совместного вложения универсальной теории ***T*** *выполнимую экзистенциальную формулу* $ц(\boldsymbol{x})$ *от* n *переменных* $\boldsymbol{x} = \langle x_0,\dots,x_{n-1}\rangle$ *назовём главной, если в этой теории все совместные с нею экзистенциальные формулы от переменных* $\boldsymbol{x}$ *совместны между собой.*

Перечислим некоторые простые свойства главных формул.

Предложение.

Для произвольной экзистенциальной формулы $ц(\boldsymbol{x})$ *в универсально аксиоматизируемой и имеющей свойство совместного вложения теории* ***T*** *эквивалентны следующие три условия:*

1. $ц(\boldsymbol{x})$ *главная в теории* ***T****.*

2. В некоторой экзистенцильно замкнутой модели ***M*** *теории* ***T*** *для любой совместной с* $ц(\boldsymbol{x})$ *экзистенциальной формулы* $\psi(\boldsymbol{x})$ *выполняется* $ц(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{x})$*.*

3. В любой экзистенцильно замкнутой модели ***M*** *теории* ***T*** *для каждой совместной с* $ц(\boldsymbol{x})$ *экзистенциальной формулы* $\psi(\boldsymbol{x})$ *выполняется* $ц(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{x})$*.*

Следующее утверждение даёт ответ на вопрос о существовании в данной теории экзистенциально замкнутой модели, в которой любой кортеж удовлетворяет некоторой главной экзистенциальной формуле.

Теорема 8.

В классе экзистенциально замкнутых моделей $\boldsymbol{E}_T$ *любой обладающей свойством совместного вложения универсально аксиоматизируемой непротиворечивой теории* $\boldsymbol{T}$ *меется счётная модель с главными типами, если и только если в ней для любой выполнимой экзистенциальной формулы найдётся совместная с нею главная.*

В случае существования счётная экзистенциально замкнутая модель с главными типами произвольной обладающей свойством совместноговложения универсально аксиоматизируемой теории обладает теми же свойствами, которыми обладают счётные атомные модели полных теорий.

Теорема 9.

В случае существования, счётная экзистенциально замкнутая модель с главными типами $\boldsymbol{M}$ *универсально аксиоматизиуемой и обладающей свойством совместного вложения теории* $\boldsymbol{T}$ *однородна, единственна и может быть изоморфно вложена в любую другую экзистенциально замкнутую модель этой теории.*

6. Опускание неглавных типов. Простые экзистенциально замкнутые модели.

Максимальный экзистенциальный тип, в котором нет наимменьшей "главной" формулы называем неглавным.

Теорема 10.

В непротиворечивой универсально аксиоматизируемой теории $\boldsymbol{T}$ *любой максимальный неглавный экзистенциальный тип* $p(\boldsymbol{x})$ *может быть опущен в некоторой счётной экзистенциально замкнутой модели* $\boldsymbol{M}$.

В предыдущем параграфе замечено, что в универсальной теории $\boldsymbol{T}$ со свойством совместного вложения, в которой в каждой выполнимой экзистенциальной формуле содержится главная, имеется простая модель. На самом деле это условие необходимо.

Напомним, что рассматриваемое в этой работе свойство экзистенциальной замкнутости данной модели основано на сохранении истинности всех универсальных формул при переходе от этой модели к её простым расширениям. На самом деле любая простая экзистенциально замкнутая модель обладает гораздо более сильным свойством *элементарной замкнутости.*

Теорема 11.подмодель

Если простая экзистенциально замкнутая модель $\boldsymbol{M}$ универсально аксиоматизируемой и обладающей свойством совместного вложения теории $\boldsymbol{T}$ элементарно эквивалентна своему обычному расширению $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}$ элементарная подмодель $\boldsymbol{N}$, то это включение элементарно.

7.Универсальные теории с одной счётной экзистенциально замкнутой моделью.

Воспользуемся результатами двух предыдущих разделов для описания универсально аксиоматизируемых теорий, имеющих в точности одну счётную экзистенцилльно замкнутую модель.

Теорема 12.

1. Для того, чтобы данная универсально аксиоматизируемая теория $\boldsymbol{T}$ *имела в точности одну счётную экзистенциально замкнутую модель необходимо и достаточно, чтобы она обладала свойством совместного вложения и в ней все максимальные экзистенциальные типы были главными.*

2. Если в данной универсально аксиоматизируемой теории имеется лишь одна счётная экзистенциально замкнутая модель, то она не может быть минимальной.

Универсально аксиоматизируемая теория, имеющая свойство совместного вложения и хотя бы одну счётно категоричную экзистенциально замкнутую модель.

В работе [10] Сарацино доказал, что любая счётно категоричная теория имеет счётно категоричный модельный компаньон. В связи с этим представляет интерес выделение условий, при которых данная универсально аксиоматизируемая и имеющая свойство совместного вложения теория $\boldsymbol{T}$ имеет хотя бы одну счётно категоричную экзистенциально замкнутую модель. Второй пункт следующего утверждения предоставляет достаточно удобный критерий существования в $\boldsymbol{T}$ счётно категоричной экзистенциально замкнутой модели, а третий - достаточно подробно характеризует теорию $\boldsymbol{T}^e$.

Теорема 13.

Для произвольной универсально аксиоматизируемой и обладающей свойством совместного вложения теории эквивалентны следующие три условия:

*1) **T** имеет хотя бы одну счётно категоричную экзистенциально замкнутую модель.*

*2) В **T** для любого натурального числа n имеется лишь конечное число попарно несовместных выполнимых n-местных экзистенциальных формул.*

*3) В теории **T** с точностью до изоморфизма имеется лишь одна счётная экзистенциально замкнутая модель, элементарная теория $\boldsymbol{T}^e$ которой счётно категорична и модельно полна.*

В заключение данной статьи заметим, что в отличие от случая полных теорий в универсально аксиоматизируемых может быть любое число счётных экзистенциально замкнутых моделей.

Литература:

1. Robinson A. On the Metamathematics of Algebra, -- Amsterdam: North -- Holland, 1951.
2. Robinson A. Infinite forcing in model theory, --- Proceedings of the second Scandinavian Logic Symposium, Amsterdam: North -- Holland, 1971, 317 - 340.
3. Barwise J., Robinson A. Completing theories by forcing, Ann. Math. Logic, 1970, 2, 119-142.
4. Cohen P.J. Set Theory and the Continuum Hypothesis, N.-Y., Benjamin,1966.
5. Ершов Ю.Л. Об элементарных теориях максимальных полей. // ДАН СССР. – 1965. - №165. – С.1390-1393.
6. Roland Fraisse. Sur quelquesclassificationsdes systemesderelations. --- Publ. scient. de l'univ. d'Algers, 1955(?), A1, p. 35-182.
7. Ryll-Nardzewski C. On the categoricity in power $\;\aleph_0$, Bull.Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys., 7, 545-548.
8. Macintyre A. On algebraically closed groups, Ann. Math., 1972, 96, 53 -- 97.
9. Macintyre A. Omitting quantifier-free types in generic structures, Journ. of Symbolic Logic, 1972, 37, 512 -- 520.
10. Saracino D. Model companion for $\;\aleph_0-$categorical theories, Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 78, 591 -- 598.
11. Simmons H. Existentially closed structures. - The Journal of Symbolic Logic, Volume 37, Number 2, June 1972
12. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. - М., 1977.
13. Vaught R. Denumerable models of complete theories. --- In: Infinistic Methods. London: Pergamon, 1961, p. 303 - 321.
14. Справочная книга по математической логике: В 4-х частях. / Под ред. Дж.Барвайса. пер. с англ. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. - Ч.1. Теория моделей: Глава 4. Модельная полнота. Ангус Макинтайр. - С. 141 - 182.
15.Wilfrid Hodges. Model Theory. - Cambridge University Press, 1993. P.772.

Резюме

В работе исследуются и решаются некоторые вопросы из общей теории моделей: экзистенциально замкнутые модели и универсально аксиоматизируемые теории со свойством совместного вложения; экзистенциальные формулы и максимальные типы; модельная полнота и экзистенциальная замкнутость; счётные однородные экзистенциально замкнутые структуры; главные формулы и типы; опускание неглавных типов; простые экзистенциально замкнутые модели; универсальные теории с одной счётной экзистенциально замкнутой моделью.

Ключевые слова: теория, модель, экзистенциально замкнутые модели, универсально аксиоматизируемые теории, формулы, типы, модельная полнота, экзистенциальная замкнутость, однородные, главные формулы и типы, опускание неглавных типов.

Түйіндеме

Осы мақалада жалпы моделдер теорияның келесі сұрақтары зерттелінеді: экзистенциал тұйықталған модельдері; тұйықталған моделдері мен қос еңгізу қасиеті орындалатың универсал аксиомалар мен анықталатың теориялары; экзистенциал формулалары мен максимал үлгілері; моделдік толықтық пен экзистенциал тұйықтығы; саналымды біртекті экзистенциал тұйықталған

құрылымдар; бас формулалары мен үлгілері; бас емес үлгілерді түсіру; қарапайым экзистенциал тұйықталған моделдері; бір-ақ экзистенциал тұйықталған моделі бар универсал теориялары.
Кілт сөздер: теория, модельдер, экзистенциал түйықталған модельдері, универсал аксиомалары бар теориялар, формулалар, үлгі, модельдік толықтық, экзистенциал тұйықталу, біртекті модельдер, бас үлгілері, бас емес үлгілерді түсіру.

Summary

We study and solve some of the questions from the general theory of models: existentially closed model and universally axiomatizable theory with the joint embedding property, existential formulas and maximum types, model completeness and existentially closed, countable homogeneous existentially closed structures, the principal formulas and types, lowering non-principal types, simple existentially closed model; universal theory with a countable existentially closed model.
Key words: a theory, a model, an existentially closed model, a universally axiomatizable theory, formulas, types, a model completeness, an existential isolation, homogeneous, main formulas and types, lowering non-principal types.

УДК 514.765 + 517.938

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ПОТОКОВ РИЧЧИ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАХА

Н.А. АБИЕВ, кандидат физико-математических наук, доцент
Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати, Республика Казахстан

В настоящей работе исследуются особые точки следующей системы автономных ОДУ (см. [4]):

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1,x_2,x_3)\,, \quad \frac{dx_2}{dt} = g(x_1,x_2,x_3)\,, \quad \frac{dx_3}{dt} = h(x_1,x_2,x_3)\,, \quad x_i = x_i(t) > 0\,, \tag{1}$$

где

$$f(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_1x_1\left(\frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2}\right) + x_1\Omega,$$

$$g(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_2x_2\left(\frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3}\right) + x_2\Omega,$$

$$h(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_3x_3\left(\frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3}\right) + x_3\Omega,$$

$$\Omega := \left(\frac{1}{a_1x_1} + \frac{1}{a_2x_2} + \frac{1}{a_3x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2}\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^{-1}, \quad a_i \in (0,1/2]\,, \quad i = 1,2,3$$

Система (1) возникает при изучении потоков Риччи (см. [5,8] для деталей) в специальных классах однородных многообразий. Пусть G/H-однородное компактное пространство с полупростой связной группой Ли G и ее замкнутой подгруппой Ли H (см. [1] для деталей). Пусть изотропное представление p пространства G/H разлагается в прямую сумму трех попарно ортогональных и $Ad(H)$-инвариантных неприводимых модулей: $p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$. В таких пространствах G/H, названных три-локально симметрическими [2] или обобщенными пространствами Уоллаха [3,7], любая G-инвариантная риманова метрика $\rho = \rho(t)$ тождественна $ad(H)$-инвариантному скалярному произведению $x_1(\cdot,\cdot)\big|_{p_1} \oplus x_2(\cdot,\cdot)\big|_{p_2} \oplus x_3(\cdot,\cdot)\big|_{p_3}$ при некоторых $x_i = x_i(t) > 0$, удовлетворяющих (1). Согласно [1] инвариантная риманова метрика ρ называется эйнштейновой, если тензор Риччи $Ric(\rho)$ пропорционален ρ. Как следует из результатов [3], в случае рассматриваемых пространств эйнштейнова метрика соответствует особым точкам системы ОДУ (1). Нашей целью является определение типа подобных особых точек при некоторых частных значениях параметров $a_i \in (0,1/2]$.

Нетрудно заметить, что объем $V = x_1^{1/a_1}x_2^{1/a_2}x_3^{1/a_3}$ является первым интегралом системы (1). Следовательно, на поверхности $V = 1$ система (1) эквивалентна системе из двух уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \tilde{f}(x_1,x_2)\,, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \tilde{g}(x_1,x_2)\,, \tag{2}$$

где $\widetilde{f}(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$, $\widetilde{g}(x_1,x_2)=g(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$, $\varphi(x_1,x_2)=x_1^{-\frac{a_3}{a_1}}x_2^{-\frac{a_2}{a_1}}$.

Очевидно, что функции $\widetilde{f}(x_1,x_2)$ $\widetilde{g}(x_1,x_2)$ являются аналитическими в окрестности произвольной точки $(x_1^0,x_2^0)\neq(0,0)$ и, поэтому, имеют место разложения

$$\widetilde{f}(x_1,x_2)=J_{11}(x_1-x_1^0)+J_{12}(x_2-x_2^0)+F(x_1,x_2),$$
$$\widetilde{g}(x_1,x_2)=J_{21}(x_1-x_1^0)+J_{22}(x_2-x_2^0)+G(x_1,x_2),$$

где J_{ij} - элементы матрицы $J=J(x_1^0,x_2^0)=\left.\begin{pmatrix}\widetilde{f}_{x_1} & \widetilde{f}_{x_2}\\ \widetilde{g}_{x_1} & \widetilde{g}_{x_2}\end{pmatrix}\right|_{(x_1,x_2)=(x_1^0,x_2^0)}$, F,G -некоторые аналитические функции в окрестности (x_1^0,x_2^0). Собственные значения J вычисляются по формуле $\lambda_{1,2}=\dfrac{\rho\pm\sqrt{\sigma}}{2}$, где $\sigma=\rho^2-4\delta$, $\delta=\det(J)$ - определитель J, $\rho=trace(J)$ - след J.

Отметим, что непосредственная подстановка $x_3=\varphi(x_1,x_2)$ в f и g приводит к сложным выражениям для производных функций $\widetilde{f},\widetilde{g}$. Мы предлагаем простой и эффективный способ.

Лемма 1. Пусть $(x_1^0,x_2^0,x_3^0)=(\gamma_1 q,\gamma_2 q,\gamma_3 q)$, где q,γ_i - вещественные числа. Тогда для частных производных функций $\widetilde{f}(x_1,x_2)$ и $\widetilde{g}(x_1,x_2)$ в точке (x_1^0,x_2^0) справедливы формулы $\widetilde{z}_{x_i}=z_{x_i}+z_{x_3}\varphi_{x_i}$, где $z\in\{f,g\}$, $\varphi_{x_i}=-\dfrac{a_3\gamma_3}{a_i\gamma_i}$, $i\in\{1,2\}$.

Доказательство. Доказательство вытекает из известной формулы дифференцирования сложной функции.

Замечание 1. Очевидно, что $(x_1^0,x_2^0)=(\gamma_1 q,\gamma_2 q)$ является особой точкой системы (2) тогда и только тогда, когда $(x_1^0,x_2^0,x_3^0)=(\gamma_1 q,\gamma_2 q,\gamma_3 q)$ является особой точкой системы (1), соответствующей единственному значению $q=\left(\gamma_1^{-1/a_1}\gamma_2^{-1/a_2}\gamma_3^{-1/a_3}\right)^d>0$, где $d=\left(1/a_1+1/a_2+1/a_3\right)^{-1}$.

В работе [4] доказан следующий общий результат.

Теорема 1 (Теорема 3, [4]). При всех $a_i\in(0,1/2]$ всякая возможная особая точка (x_1^0,x_2^0) системы (2) такова, что в ней $\sigma\geq 0$. В частности, любая невырожденная ($\delta\neq 0$) особая точка (2) может быть только либо узлом, либо седлом.

Классификация особых точек в случае $a_1+a_2+a_3=1/2$

Отметим, что задача классификации особых точек (2) в общем случае является довольно сложной. Поэтому мы остановимся на частном случае $a_i\in(0,1/2]$, $i=1,2,3$, $a_1+a_2+a_3=1/2$, когда G/H имеет вид $SU(l+m+n)/S(U(l)\times U(m)\times U(n))$, где $l,m,n\in N$.

Согласно Теореме 5 из [2] однородное пространство G/H в рассматриваемом случае имеет следующие четыре семейства инвариантных эйнштейновых метрик (x_1^0,x_2^0,x_3^0):

$$((1-2a_1)q,(1-2a_2)q,2(a_1+a_2)q);$$
$$((1-2a_1)q,(1-2a_2)q,2(1-a_1-a_2)q); \qquad (3)$$
$$((1-2a_1)q,(1+2a_2)q,2(a_1+a_2)q);$$
$$((1+2a_1)q,(1-2a_2)q,2(a_1+a_2)q).$$

Теорема 2. Пусть $a_i\in(0,1/2]$, $a_1+a_2+a_3=1/2$. Тогда относительно (3) имеют место следующие утверждения:

1) При каждом фиксированном a_i каждое семейство дает изолированную особую точку системы (2) со значением q, однозначно определяемым из уравнения $x_3^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0)$;

2) Первое семейство обеспечивает системе (2) неустойчивые узлы, а остальные семейства-седла.

Доказательство. 1) Несложные вычисления показывают, что при фиксированных a_i каждое семейство из (3) является также и однопараметрическим семейством изолированных особых точек системы (1), то есть $f(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = g(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = h(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0$ при всех $q \in R$, $q > 0$.

Пусть q_j - то значение параметра q, которое соответствует j-му семейству и удовлетворяет условию $x_3^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0)$, где $j = 1,...,4$. Тогда для завершения доказательства первой части теоремы достаточно найти q_j из Замечания 1.

2) Приступаем к доказательству второй части теоремы.

Первое семейство. Рассмотрим особую точку $(x_1^0, x_2^0) = ((1-2a_1)q_1, (1-2a_2)q_1)$ с $x_3^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0) = 2(a_1 + a_2)q_1$. Используя Лемму 1 для нахождения матрицы линейных частей J, получаем следующее $\delta = \dfrac{-4a_1a_2(-1+2a_1+2a_2)}{(-1+2a_1)(-1+2a_2)} \dfrac{1}{q_1^2} > 0$, $\qquad \rho = \dfrac{1}{q_1} > 0$.

Второе семейство. Рассмотрим особую точку $(x_1^0, x_2^0) = ((1-2a_1)q_2, (1-2a_2)q_2)$ с $x_3^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0) = 2(1-a_1-a_2)q_2$. Используя Лемму 1, имеем $\delta = -\dfrac{-1+2a_1+2a_2}{-1+a_1+a_2} \dfrac{1}{q_2^2} < 0$.

Третье семейство. Особая точка: $(x_1^0, x_2^0) = ((1-2a_1)q_3, (1+2a_2)q_3)$ с $x_3^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0) = 2(a_1 + a_2)q_3$. Как показывают вычисления, $\delta = \dfrac{-4a_2}{1+2a_2} \dfrac{1}{q_3^2} < 0$.

Четвертое семейство. Особая точка: $(x_1^0, x_2^0) = ((1+2a_1)q_4, (1-2a_2)q_4)$ с $x_3^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0) = 2(a_1 + a_2)q_4$. В этом случае $\delta = \dfrac{-4a_1}{1+2a_1} \dfrac{1}{q_4^2} < 0$.

Итак, мы доказали, что для каждого семейства особых точек (x_1^0, x_2^0) имеет место неравенство $\delta \neq 0$. В таком случае отсюда и из Теоремы 1 вытекает, что собственные значения матрицы $J = J(x_1^0, x_2^0)$ вещественны и не равны нулю. Следовательно, по Теореме 2.15 из [6] первое семейство из (3) дает неустойчивые узлы ($\rho > 0$), а остальные семейства дают седла. Теорема доказана.

Замечание 2. Для первого семейства из (3) при $a_1 = a_2 = a_3 = 1/6$ имеем $\sigma = 0$. Особой точкой (2) в этом случае является единственная точка $(x_1^0, x_2^0) = (1,1)$, получаемая при $q_1 = 3/2$. Отметим, что $x_3^0 = 1$. Матрица J в этом случае имеет совпадающие собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/3$. Как показывают численные эксперименты, фазовый портрет (2) в окрестности точки $(1,1)$ состоит из прямых линий, расходящихся от этой точки. Это в точности соответствует результатам качественной теории ОДУ.

Отметим также, что в Замечании 2 к Теореме 4 работы [4] доказан более общий факт о том, что система (2) обладает единственной особой точкой $(x_1^0, x_2^0) = (1,1)$ со свойством $\sigma = 0$ при всех $a_1 = a_2 = a_3 = s$, $s \in (0,1/2]$.

Литература:

1. Бессе А.Л. Многообразия Эйнштейна.-М.: Мир, 1990.
2. Ломшаков А.М., Никоноров Ю.Г., Фирсов Е.В. Инвариантные метрики Эйнштейна на три-локально-симметрических пространствах // Математические труды. – 2003. - Т.6. - №2.-С.80-101.

3. Никоноров Ю.Г. Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна // Сиб.матем.журнал. - 2000. - Т.41. - №1.-С.200-205.

4. Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. The Ricci flow on generalized Wallach spaces // Preprint, arXiv: 1305.0440 (2013).

5. Chow B., Knopf D. The Ricci Flow: an Introduction. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, 2004.

6. Dumortier F., Llibre J., Artes J. Qualitative theory of planar differential systems. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. xvi+298 pp.

7. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York), 2007. V.146, No.7, P.6313-6390.

8. Topping P. Lectures on the Ricci flow, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 325, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Резюме

Изучаются особые точки нормализованного потока Риччи. Целью работы является определение типов таких особых точек.

Ключевые слова: поток Риччи, обобщенное пространство Уоллаха, инвариантная метрика Эйнштейна, особая точка плоской динамической системы.

Түйіндеме

Нормалдастырылған Риччи ағымының ерекше нүктелері зерттелінеді. Жұмыстың мақсаты осындай ерекше нүктелердің типтерін анықтауда жатады.

Кілт сөздер: Риччи ағымы, жалпыланған Уоллах кеңістігі, Эйнштейн инвариантты метрикасы, жазық динамикалық жүйенің ерекше нүктесі.

Summary

We consider spesial points of the normalized Ricci`s flow on generalized Wallach spaces. Our dim is to determine peculiarities of such points.

Key words: Ricci flow, generalized Wallach space, invariant Einstein metrica, singular point of planar dynamical system.

УДК 510.67

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ МАКСИМАЛЬНОСТИ ЧИСЛА СЧЁТНЫХ НЕИЗОМОРФНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ

Б.С. БАЙЖАНОВ, доктор физико-математических наук,
Т.С. ЗАМБАРНАЯ, А.А. АЛИБЕК
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

Определение 1 *Счётная полная теория* T *называется* ***малой***, *если* $|\bigcup_{n<\omega} S_n(T)| = \omega$, *где* $S_n(T)$ – *множество всех* n*-типов над* $\varnothing$.

Если теория не является малой, тогда число счётных неизоморфных моделей данной теории максимально.

Далее, T будет обозначать малую теорию, а N – счётную насыщенную модель.

Для любого множества $A \subset N$ (не обязательно определимого) обозначим:

$$A^+ := \{\gamma \in N \mid \forall a \in A : N \quad a < \gamma\}$$

$$A^- := \{\gamma \in N \mid \forall a \in A : N \quad \gamma < a\}.$$

Определение 2 *Пусть* $A, B \subset N$, $\phi(x, y)$ – A*-определимая* 2*-формула.* $\phi(x, y)$ *является* B*-* ***устойчивой***, *если* $\forall \alpha \in B, \exists \gamma_1, \gamma_2 \in B \ (\gamma_1 < \alpha < \gamma_2)$ *такие что*

$$\gamma_1 < \phi(\alpha, N) < \gamma_2. \text{ (Рис.1)}$$

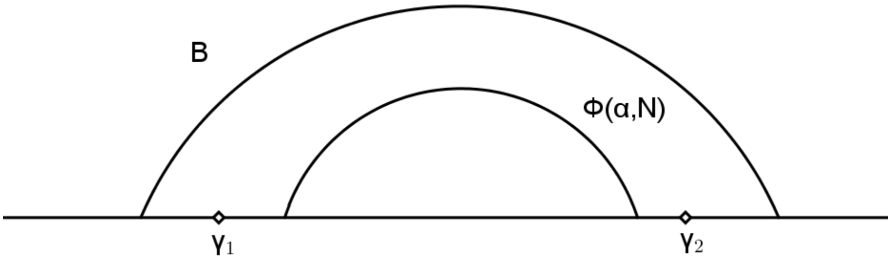


Рис.1

Если $B = \Theta(N)$ и Θ – A-определимая 1-формула или $B = p(N)$ и $p \in S_1(A)$ – один-тип, тогда мы говорим, что $\phi(x, y)$ является Θ - **устойчивой** или p - **устойчивой**.

Определение 3 B - *устойчивая* 2 *-формула* $\phi(x, y)$ *называется* ***выпуклой вправо на*** B *, если*

$$\forall \alpha \in B, \forall \beta(\beta \in \phi(\alpha, N) \to \alpha \le \beta \wedge \forall \gamma \in B(\alpha < \gamma < \beta \to \gamma \in \phi(\alpha, N)). \text{ (Рис.2)}$$

Выражение $\forall \gamma \in B(\alpha < \gamma < \beta \to \gamma \in \phi(\alpha, N))$ является условием выпуклости формулы $\phi(x, y)$ на множестве B.

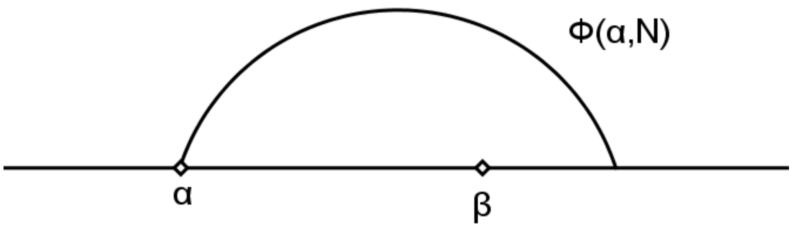


Рис.2

Если для $\Theta \in F_1(A), p \in S_1(A)$, $B = \Theta(N)$ либо $B = p(N)$, тогда мы будем говорить что 2 - формула $\phi(x, y)$ выпукла вправо на $\Theta(x)$ либо на $p(x)$.

Определение 4 B *-устойчивая* 2 *-формула* $\phi(x, y)$ *называется* ***выпуклой влево на*** B *, если*

$$\forall \alpha \in B, \forall \beta(\beta \in \phi(\alpha, N) \to \beta \le \alpha) \wedge \forall \gamma \in B(\beta < \gamma < \alpha \to \gamma \in \phi(\alpha, N)). \text{ (Рис.3)}$$

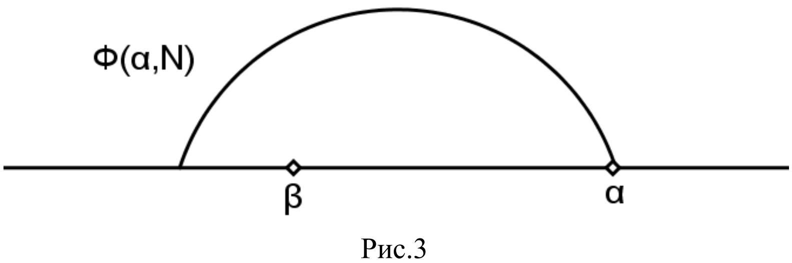


Рис.3

Если для $\Theta \in F_1(A), p \in S_1(A), B = \Theta(N)$ либо $B = p(N)$, тогда мы будем говорить что 2 - формула $\phi(x, y)$ выпукла влево на $\Theta(x)$ либо на $p(x)$.

Определение 5 *Выпуклая вправо* 2 *-формула* $\phi(x, y)$ ***возрастает*** B *, если* $\forall \alpha, \beta \in B$,

$$(\alpha < \beta \to \phi(\beta, N)^+ \subseteq \phi(\alpha, N)^+). \text{ (Рис.4)}$$

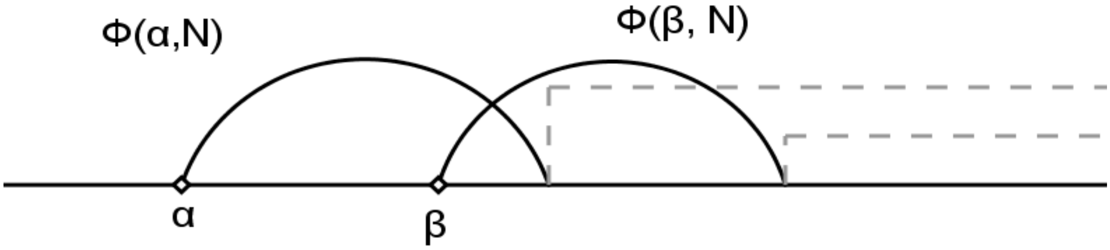


Рис.4

Определение 6 *Выпуклая влево* 2*-формула* $\phi(x, y)$ ***убывает на*** B*, если* $\forall \alpha, \beta \in B$,

$$(\alpha < \beta \to \phi(\alpha, N)^- \subseteq \phi(\beta, N)^-).(Рис.5)$$

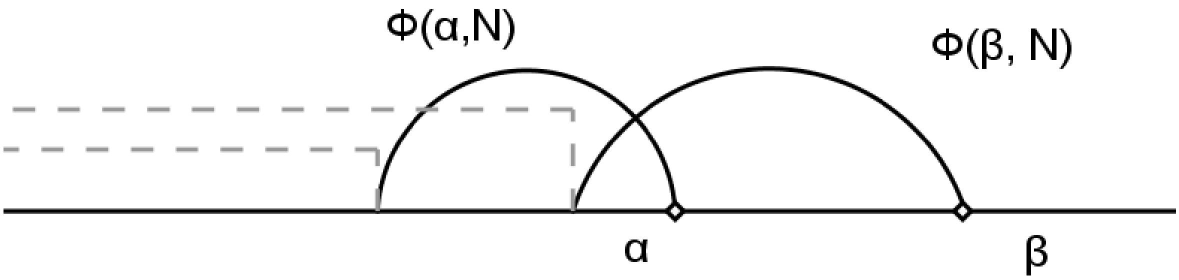


Рис.5

Определение 7 A*-определимая возрастающая на* B 2*-формула* $\phi(x, y)$ *является* ***квази-следователем*** *на* B*, если* $\forall \alpha \in B, \exists \beta \in \phi(\alpha, N) \cap B$,

$$\phi(\beta, N) \setminus \phi(\alpha, N) \neq \varnothing. \text{ (Рис.6)}$$

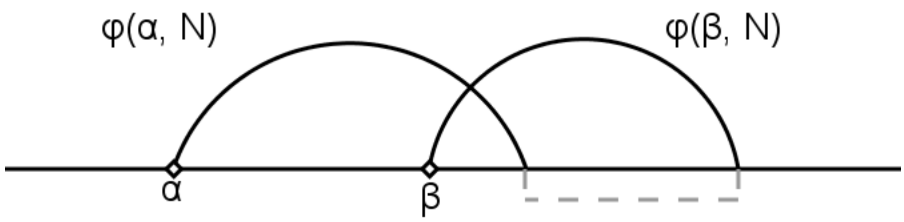


Рис.6

A*-определимая убывающая на* B 2*-формула* $\phi(x, y)$ *является* ***квази-следователем на*** B*, если* $\forall \alpha \in B,\ \exists \beta \in \phi(\alpha, N) \cap B$,

$$\phi(\beta, N) \setminus \phi(\alpha, N) \neq \varnothing.(Рис.7)$$

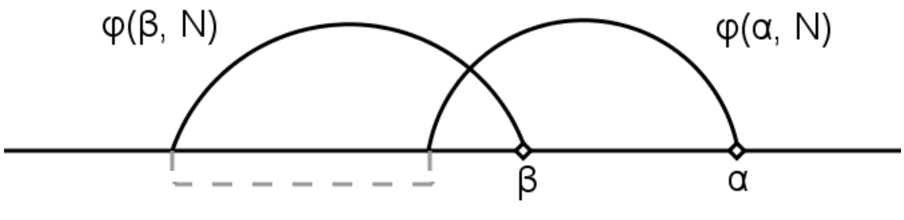


Рис.7

Если $\phi(x,y)$ – квази-следователь, обозначим

$$\phi^0(x,y) = \{x = y\}.$$

$$\phi^n(x,y) := \exists y_1,\ldots,\exists y_{n-1}(\phi(x,y_1)\wedge\phi(y_1,y_2)\wedge\ldots\wedge\phi(y_{n-1},y)) \text{ (Рис.8)}$$

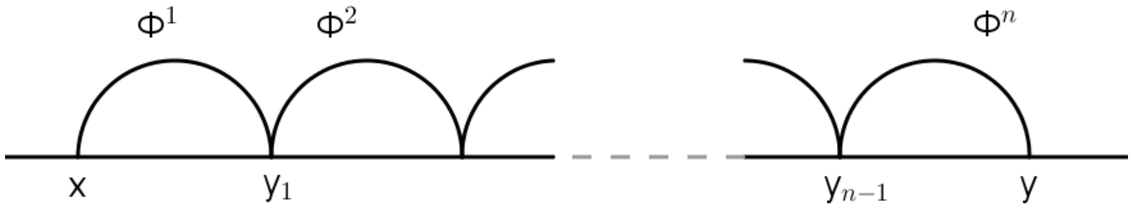


Рис.8

$$\phi^{-n}(x,y) := \exists x_1,\ldots,\exists x_{n-1}(\phi(x_1,x)\wedge\phi(x_2,x_1)\wedge\ldots\wedge\phi(y,x_{n-1})\wedge(y\le x)\bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i \le x) \text{ (Рис.9)}$$

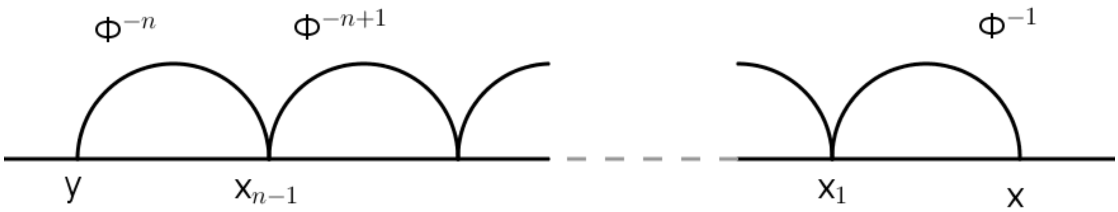


Рис.9

$\phi^i(x,y)$ является квази-следователем на B для любого $i \in Z$.

Пусть $\phi(x,y)$ – квази-следователь на B. Обозначим для $\alpha \in B$

$$V_{B,\phi}(\alpha) := \{\gamma \in B \mid \exists n \in Z, \gamma \in \phi^n(\alpha, N)\cap B\}.$$

Теорема 1 [1] *Пусть A – конечное подмножество N, $p \in S_1(A), \phi(x,y)$ – A-определимый квази-следователь на $p(x)$. Тогда T имеет 2^ω счётных неизоморфных моделей.*

Доказательство теоремы 1

Без потери общности будем считать что $\phi(x,y)$ выпукла вправо на $p(x)$. Для выпуклой влево формулы доказательство аналогично.

Обозначим $Q(x,y) := \{x<y\}\cup p(x)\cup p(y)\cup\{y\notin\phi^n(x,N)\mid n<\omega\}\cup\{R(y,x)\}\cup\{L(x,y)\}$, где $R(x,y)$ – это A-определимая выпуклая вправо на p 2-формула, такая что $\forall n<\omega, \forall\alpha\in p(N), \phi^n(\alpha,N)\cap p(N)\subset R(\alpha,N)$, и $L(x,y)$ – это A-определимая выпуклая влево на p 2-формула, такая что $\forall n<\omega,\ \exists\alpha_1,\alpha_2\in p(N), \alpha_1<\phi^n(\alpha_2,N), \alpha_1\in L(\alpha_2,N)$.

Совместность $Q(x,y)$ проверяется непосредственно.

Пусть $<\alpha,\beta>$ – картеж, который реализует $Q(x,y)$. Фиксируем этот картеж до конца доказательства теоремы 1.

Обозначим

$$(V_{p,\phi}(\alpha), V_{p,\phi}(\beta))_{p(N)} := \{\gamma\in p(N)\mid V_{p,\phi}(\alpha)<\gamma<V_{p,\phi}(\beta)\}.$$

Лемма 2 $\forall\gamma_1,\gamma_2\in(V_{p,\phi,}(\alpha),V_{p,\phi}(\beta))_{p(N)}$,

$$tp^c(\gamma_1\mid A\cup\{\alpha,\beta\}) = tp^c(\gamma_2\mid A\cup\{\alpha,\beta\}).$$

Доказательство леммы 2

Предположим, что утверждение леммы не верно. То есть существуют $\gamma_1,\gamma_2\in(V_{p,\phi}(\alpha),V_{p,\phi}(\beta))_{p(N)}$, существует $(A\cup\{\alpha,\beta\})$-определимая формула H, такая что

$\gamma_1 \in H(N,\alpha,\beta) < \gamma_2$. Предположим что $H(N,\alpha,\beta)$ выпукло. Если нет, мы можем взять $(A \cup \{\alpha,\beta\})$-определимую формулу которая определяет множество $(H(N,\alpha,\beta)^+)^-$.

По теореме компактности мы можем предположить что

(*) существует A-определимая формула $\Theta(x) \in p$ такая что для любых двух элементов $\alpha,\beta \in \Theta(N), \alpha < \beta$ если $V_{\Theta,\phi}(\alpha) < V_{\Theta,\phi}(\beta)$ то $\exists \gamma_1,\gamma_2 \in (V_{\Theta,\phi}(\alpha), V_{\Theta,\phi}(\beta))_{\Theta(N)}$, для которых $\gamma_1 \in H(N,\alpha,\beta) < \gamma_2$.

Для $k < \omega, n_1, n_2 < \omega$ таких что $n_1 + n_2 < k$ обозначим

$$S_{k,n_1,n_2}(H)(x,y) := (x < y \wedge y \notin \phi^k(x,N)) \to \exists z_1, \exists z_2 (x < z_1 < z_2 < y \wedge z_1 \notin \phi^{n_1}(x,N) \wedge$$
$$y \notin \phi^{n_2}(z_2,N) \wedge z_1 \in H(N,x,y) \wedge H(N,x,y) < z_2 \wedge z_2 \in \phi(z_1,N)).$$

Утверждение 3 *Существуют две непостоянные неубывающие фкнкции* $s_1, s_2 : \omega \to \omega$, *такие что* $\exists m < \omega, \forall k > m, \forall \alpha', \beta' \in (\alpha,\beta)_{p(N)}$ *верно следующее:*

$$N \vDash S_{k,s_1(k),s_2(k)}(H)(\alpha',\beta').$$

Доказательство утверждения 3

В противном случае, по теореме компактности, получаем противоречие с определением формулы $H(x,y,\alpha,\beta)$.

□

Обозначим $H_\varnothing(x,\alpha,\beta) := \neg H(x,\alpha,\beta) \wedge \exists y(\phi(y,x) \wedge H(y,\alpha,\beta))$. Из утверждения 3 следует, что $H_\varnothing(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \neq \varnothing$ и $H_\varnothing(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing)$ для некоторого $\gamma_\varnothing \in (V_{p,\phi}(\alpha), V_{p,\phi}(\beta))_{p(N)}$.

Далее, введём обозначения

$$G_0(x,\alpha,\beta) := \exists z(H(x,\alpha,z) \wedge H_\varnothing(z,\alpha,\beta)),$$
$$G_1(x,\alpha,\beta) := \exists z(H(x,z,\beta) \wedge H_\varnothing(z,\alpha,\beta)).$$

По (*) мы имеем $G_0(N,\alpha,\beta) < V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing)$, $V_{p,\phi}(\alpha) < G_0(N,\alpha,\beta)^+$ и $V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing) < G_1(N,\alpha,\beta)^+, G_1(N,\alpha,\beta) < V_{p,\phi}(\beta)$.

Обозначим

$$H_0(x) := \neg G_0(x,\alpha,\beta) \wedge \exists y(G_0(y,\alpha,\beta) \wedge \phi(y,x)),$$
$$H_1(x) := \neg G_1(x,\alpha,\beta) \wedge \exists y(G_1(y,\alpha,\beta) \wedge \phi(y,x)).$$

Далее, по утверждению 3 имеем

$H_0(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \neq \varnothing$ и $H_0(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_0)$ для некоторого $\gamma_0 \in (V_{p,\phi}(\alpha), V_{p,\phi}(\gamma_0)) - p(N)$.

$H_1(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \neq \varnothing$ и $H_1(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_1)$ для некоторого $\gamma_1 \in (V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing), V_{p,\phi}(\beta))_{p(N)}$

Следовательно, имеем $\alpha < H_0(N) < H_\varnothing(N) < H_1(N) < \beta$,

$$V_{p,\phi}(\alpha) < V_{p,\phi}(\gamma_0) < V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing) < V_{p,\phi}(\gamma_1) < V_{p,\phi}(\beta),$$
$$H_0(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_0), H_\varnothing(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing), H_1(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_1).$$

Далее, обозначим

$$G_{00}(x,\alpha,\beta) := \exists z(H(x,\alpha,z) \wedge H_0(z,\alpha,\beta)),$$
$$G_{01}(x,\alpha,\beta) := \exists z_1, z_2(H(x,z_1,z_2) \wedge H_0(z_1,\alpha,\beta) \wedge H_\varnothing(z_2,\alpha,\beta)),$$
$$G_{10}(x,\alpha,\beta) := \exists z_1, z_2(H(x,z_1,z_2) \wedge H_\varnothing(z_1,\alpha,\beta) \wedge H_1(z_2\alpha,\beta)),$$
$$G_{11}(x,\alpha,\beta) := \exists z(H(x,z,\beta) \wedge H_1(z,\alpha,\beta)).$$

По (*) имеем

$G_{00}(N,\alpha,\beta) < V_{p,\phi}(\gamma_0)$, $V_{p,\phi}(\alpha) < G_{00}(N,\alpha,\beta)^+$ и

$V_{p,\phi}(\gamma_0) < G_{01}(N,\alpha,\beta)^+, G_{01}(N,\alpha,\beta) < V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing)$,

$G_{10}(N,\alpha,\beta) <$ $V_{p,\phi}(\gamma_1)$, $V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing) < G_{10}(N,\alpha,\beta)^+$ и $V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing) <$ $G_{11}(N,\alpha,\beta)^+, G_{11}(N,\alpha,\beta) <$ $V_{p,\phi}(\beta)$.

Далее, по утверждению 3 имеем

$H_{00}(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \neq \varnothing$ и $H_{00}(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_{00})$ для некоторого $\gamma_{00} \in (V_{p,\phi}(\alpha), V_{p,\phi}(\gamma_0))_{p(N)}$

$H_{01}(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \neq \varnothing$ и $H_{01}(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_{01})$ для некоторого $\gamma_{01} \in (V_{p,\phi}(\gamma_0), V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing))_{p(N)}$

$H_{10}(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \neq \varnothing$ и $H_{10}(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_{10})$ для некоторого $\gamma_{10} \in (V_{p,\phi}(\gamma_\varnothing), V_{p,\phi}(\gamma_1))_{p(N)}$

$H_{11}(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \neq \varnothing$ и $H_{11}(N,\alpha,\beta) \cap p(N) \subset V_{p,\phi}(\gamma_{11})$ для некоторого $\gamma_{11} \in (V_{p,\phi}(\gamma_1), V_{p,\phi}(\beta))_{p(N)}$.

Повторив данные шаги ω раз, получаем счётное число A-определимых формул $H_\delta, \delta \in 2^{<\omega}$ таких, что для каждого $\tau \in 2^\omega, \tau(n) \in \{0,1\}$ существует $p_\tau \in S_1(A)$, один-тип над A который расширяет следующее множество A-определимых 1-формул:

$\Gamma_\tau(x) := \{x < H_{\tau(1),\dots,\tau(n)}(N,\overline{\alpha},\beta) \mid \tau(n+1) = 0\} \cup \{H_{\tau(1),\dots,\tau(n)}(N,\alpha,\beta) \mid \tau(n+1) = 1\}$.

Что противоречит тому, что теория T малая.

□

Как следствие доказательства леммы 2 получаем следующее:

Лемма 4 *Для любых* $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in (V_{p,\phi}(\alpha), V_{p,\phi}(\beta))_{p(N)}$ $(\overline{\alpha}_n :=< \alpha_1,\dots,\alpha_n >)$ *таких что* $V_{p,\phi}(\alpha_i) < V_{p,\phi}(\alpha_{i+1}), (1 \le i \le (n-1))$, *для любого* $\overline{\gamma} \in N$ *таких что* $tp(\overline{\gamma} \mid A \cup \{\overline{\alpha}, \overline{\beta}\})$ *изолированный верно следующее:* $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in (V_{p,\phi,}(\alpha_i), V_{p,\phi}(\alpha_{i+1}))$,

$$tp^c(\gamma_1 \mid A \cup \overline{\alpha}_n \cup \overline{\gamma} \cup \{\alpha,\beta\}) = tp^c(\gamma_2 \mid A \cup \overline{\alpha}_n \cup \gamma \cup \{\alpha,\beta\})$$

Из леммы 4 следует, что любой элемент $\gamma \in (V_{p,\phi,}(\alpha_i), V_{p,\phi}(\alpha_{i+1}))$ имеет неизолированный один-тип над $A \cup \overline{\alpha}_n \cup \overline{\beta} \cup \{\alpha,\beta\}$, так как является иррациональным.

Пусть $2^{<\omega}$ – множество всех конечных картежей элементов из $\{0,1\}$. Тогда для любого $\eta \in 2^{<\omega}, \eta :=< \eta(1), \eta(2), \dots, \eta(n) >$ обозначим $l(\eta) := n$. Пусть $\eta \neq \pi \in 2^{<\omega}$, тогда мы говорим, что η меньше чем π $(\eta < \pi)$, если либо $\eta \subset \pi$, либо $\exists i \le min\{l(\eta), l(\pi)\}, \forall j < i, \eta(j) = \pi(j) \wedge \eta(i) = 0 \wedge \pi(i) = 1$.

Пусть $< \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots >_{n<\omega}$ – ω-последовательность элементов из $p(N)$ таких, что

$$V_{p,\phi}(\alpha) < V_{p,\phi}(\alpha_i) < V_{p,\phi}(\alpha_{i+1}) < V_{p,\phi}(\beta), (1 \le i \le \omega).$$

Тогда для любого $\tau \in 2^\omega$ мы будем строить, используя лемму 4, счётную модель $M_\tau \prec N$ такую, что для любого $n < \omega, \alpha_n \in M_\tau$,

$\tau(n) = 0 \Leftrightarrow$ в M_τ нет элементов из $(V_{p,\phi}(\alpha_{2n}), V_{p,\phi}(\alpha_{2n+1}))_{p(N)}$ и

$\tau(n) = 1 \Leftrightarrow$ для любого $\eta \in 2^{<\omega}$, существует $\alpha_{n,\eta} \in (V_{p,\phi}(\alpha_{2n}), V_{p,\phi}(\alpha_{2n+1}))_{p(N)} \cap M_\tau$, такой, что для любых двух $\eta \neq \pi \in 2^{<\omega}$ если $\eta < \pi$, тогда $V_{p,\phi}(\alpha_{n,\eta}) < V_{p,\phi}(\alpha_{n,\pi})$.

Построение M_τ

Пусть $\tau \in 2^\omega$.

Мы будем строить M_τ как объединение увеличивающейся цепи конечных множеств:

$M_\tau = \bigcup_{m<\omega} B_m, B_{m-1} \subset A_m \subset B_m$ такие что $|B_m|, |A_m| < \omega$; $|B_m \setminus A_m| = m^2\ tp(B_m \setminus A_m \mid A_m)$ является изолированным и для любого $i \le m$ мы имеем некоторую фиксированную нумерацию $F_1(B_i)$, где $F_1(B_i)$ это множество всех B_i-определимых 1-формул.

Шаг 0

Обозначим $B_0 := A$. Фиксируем некоторую нумерацию $F_1(B_0)$.

Шаг $m+1$

По лемме 4 и используя метод выбора γ_η доказательства леммы 2 мы можем определить $A_{m+1} := B_m \cup \{\alpha_{i,\eta} \mid \eta \in 2^{<\omega}, l(\eta) \le m+1, \tau(i) = 1\}$.

Для каждого $k < m+1$ обозначим $B_{m+1,k} := A_{m+1} \cup \{\beta_{m+1,k'} \mid k' < k\}$.

Определим $\beta_{m+1,k}$. Пусть $\Theta_{k,j}(x)$ – 1-формула из $F_1(B_k)$ такая что $\Theta_{m+1,k}(N) \cap B_{m+1,k} = \varnothing$ и j минимален и данным свойством. Далее возьмём $G(x)$ – случайный атом из $F_1(B_{m+1,k})$ (то есть для любого $K(x) \in F_1(B_{m+1,k})$ если $G(N) \cap K(N) \ne \varnothing$ то $G(N) \subseteq K(N)$) такой что $G(N) \subseteq \Theta_{k,j}(N)$ и случайный элемент из $\beta_{m+1,k} \in G(N)$. Существование $G(x)$ следует из нашего предположения что T малая и потому что $B_{m+1,k}$ конечно.

Далее установим $B_{m+1} := \bigcup_{k<m+1} B_{m+1,k}$ и фиксируем некоторую нумерацию $F_1(B_{m+1})$.

Проверим, что M_τ является моделью. Рассмотрим случайную M_τ-определимую 1-формулу $\Psi(x,\bar{\gamma}), \bar{\gamma} \in M_\tau$, такую что $N\ \exists x \Psi(x,\bar{\gamma})$. Тогда существует $k < \omega$ такое что $\bar{\gamma} \cap (B_k \setminus B_{k-1}) \ne \varnothing$. Таким образом, для некоторого $m < \omega, k < m$ имеем $N\ \ \Psi(\beta_{m,k}, \bar{\gamma}), \beta \in M_\tau$. Следовательно, $M_\tau \prec N$.

Очевидно, что если $\tau \ne \tau' \in 2^\omega$, тогда в языке $L^* := L \cup A \cup \{\alpha, \beta\}, M^*_\tau \not\cong_{L^*} M^*_{\tau'}$. Так что, поскольку любая счётная модель теории T может генерировать максимально счётное число неизоморфных моделей в языке L^*, T имеет 2^ω счётных неизоморфных моделей.

Литература:

1. Baizhanov B.S., Hodges W. Countable ordered models with small theories // Preprint. - 2001.

Резюме

В докладе рассмотрена теорема о достаточном условии максимальности числа счётных неизоморфных моделей малой теории. Данным условием является наличие формулы - квази-следователя. Идея доказательства теоремы состоит в равенстве числа счётных неизоморфных моделей числу конечных картежей элементов из $\{0,1\}$, которое следует из сопоставления этим картежам различных, с точностью до изоморфизма, моделей.

Ключевые слова: число счётных моделей, малая теория, квази-следователь, выпуклая формула.

Түйіндеме

Баяндамадада кіші теория формула - изоморфты емес, максималды модельдер санының жетерлік шарты туралы теорема қарастырылған. Бұның шарты квази-тергеуші - формуладан тұрады. Теореманы дәлелдеу идеясы изоморфты емес, максималды модельдер санын соңғы картеж элементтері {0, 1}-дегі санының теңдігінен құрылады, бұл картеждерді әртүрлі изоморфизм дәлдігіне дейін модельдермен салыстырудан келіп шығады.

Кілт сөздер: саналымды модельдер саны, кіші теориясы, квази-тергеуші, дөңес формула.

Summary

The report is about the sufficient condition of the theory maximal number of countable non-isomorphic models. This condition is the existence of a formula - quasi-successor. The idea of the proof is in the equality of the number of models of the theory to the number of the finite tuples of elements from $\{0,1\}$. Which is follows matching this different tuples to different up to an isomorphism models.

Key words: number of countable models, a small theory, quasi-successor, convex formula.

УДК 510.67

ОТНОШЕНИЕ ПОЛУИЗОЛИРУЕМОСТИ НА ЯЗЫКЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ И КВАЗИ-ОКРЕСТНОСТЕЙ

Б.С. БАЙЖАНОВ, доктор физико-математических наук,
А. Д. ЕРШИГЕШОВА
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

1 Отношение полуизолируемости и (p,q)-устойчивые формулы

Определение. (А.Пиллай [1]) Пусть $\mathcal{M}$ модель теории T, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - кортежи из множества $\mathcal{M}$, A - подмножество M. Говорят, что кортеж $\bar{a}$ *полуизолирует* кортеж $\bar{b}$ над множеством A, если существует формула $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \in \mathrm{t}p(\bar{b}/A\bar{a})$ такая, что $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \vdash \mathrm{t}p(\bar{b}/A)$. При этом говорят, что формула $\varphi(\bar{a},\bar{y})$ (с параметрами из множества A) *свидетельствует о Полуизолированности* $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно множества A. Аналогичным образом, мы говорим, что кортеж $\bar{a}$ *изолирует* кортеж $\bar{b}$ над множеством A, если существует формула $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \in \mathrm{t}p(\bar{b}/A\bar{a})$ такая, что $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \vdash \mathrm{t}p(\bar{b}/A)$ и $\varphi(\bar{a},\bar{y})$ главная формула. В этом случае говорят, что формула $\varphi(\bar{a},\bar{y})$ (с параметрами из множества A) *свидетельствует об изолированности* $\bar{b}$ над кортежом $\bar{a}$ относительно множества A.

Если $\bar{a}$ (полу-)изолирует $\bar{b}$ над $\varnothing$, то просто говорим, что $\bar{a}$ (полу-)изолирует кортеж $\bar{b}$; а о формуле $\varphi(\bar{a},\bar{y})$, свидетельствующей о (полу-)изолированности $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно $\varnothing$, говорим, что $\varphi(\bar{a},\bar{y})$ свидетельствует о (полу-)изолированности $\bar{b}$ над $\bar{a}$.

Определение.(Судоплатов С.В.) Пусть $p \square p(\bar{x})$ и $q \square q(\bar{y})$ - некоторые (необязательно полные) типы над множеством $A \subseteq M$ в некоторой модели $\mathcal{M}$ теории T. Формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ с параметрами из множества A называется (p,q)-*устойчивой*, если для любой реализации $\bar{a}$ типа p, имеет место $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \vdash q(\bar{y})$. Формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ назывется $(p \leftrightarrow q)$-*формула*, если $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ является $(p \rightarrow q)$-формулой и $(p \leftarrow q)$-формулой.

Если $p = q$, то (p,q)-устойчивая формула называется p-*устойчивой* или $(p \rightarrow p)$-*формула*.

Замечание 1. (Б. С. В. [2]) *Формула* $\varphi(\bar{a},\bar{y})$ *свидетельствует о полуизолированности* $\bar{b}$ *над* $\bar{f}$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ - $(\mathrm{t}p(\bar{a}),\mathrm{t}p(\bar{b}))$-*устойчивая формула и* $\mathcal{M}\ \ \varphi(\bar{a},\bar{b})$.

Замечание 2. (А. Пилай[3]) *Отношение полуизолированности (относительно множества A) образует предпорядок (т.е. рефлексивное и транзитивное отношение) на множестве кортежей модели* $\mathcal{M}$.

Множество (p,q)-устойчивых формул $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ (с параметрами из A,в моделиl $\mathcal{M}$) обозначим через $\mathrm{P}res_{p,q}(\bar{x},\bar{y})$, а множество p-устойчивых формул $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ через $\mathrm{P}res_{p}(\bar{x},\bar{y})$. Пусть $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ - полные типы над множеством A, $\mathcal{M}\ \ p(\bar{a})$, $\mathcal{M}\ \ q(\bar{b})$, и $\mathcal{M}\ \ \varphi(\bar{a},\bar{b})$. Будем говорить, что формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ (*не-*)*симметрична относительно* (p,q)-*устойчивости*, если $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{P}res_{p,q}(\bar{x},\bar{y}) \cap \mathrm{P}res_{q,p}(\bar{y},\bar{x})$ $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{P}res_{p,q}(\bar{x},\bar{y}) \div \mathrm{P}res_{q,p}(\bar{y},\bar{x})$,где $\div$ операция симметрической разности на множествах.)

Замечание 3. (Б. С. В. [2]) Пусть $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ - полные типы над множеством A, $\mathcal{M} \models p(\bar{a})$, $\mathcal{M} \models q(\bar{b})$. Тогда и только тогда $\bar{a}$ полуизолирует $\bar{b}$ над A, но $\bar{b}$ не полуизолирует $\bar{a}$ над A, когда найдется формула $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{P}res_{p,q}(\bar{x},\bar{y})$ такая, что $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a},\bar{b})$ и не существует формулы $\psi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{P}res_{q,p}(\bar{x},\bar{y})$ с параметрами $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a},\bar{b})$ и $\vdash \psi(\bar{x},\bar{y}) \to \varphi(\bar{x},\bar{y})$.

Если $p,q \in S(A)$, то через $\mathrm{S}I_{p,q}$ (в модели $\mathcal{M}$) обозначим отношение полуизолированности (над A), связывающее реализации типов p и q:

$$\mathrm{S}I_{p,q} = \{(\bar{a},\bar{b}) \mid \mathcal{M} \models p(\bar{a}) \wedge q(\bar{b}) \text{ и } \bar{b} \text{ полуизолирует } \bar{a}\} \cup$$

$$\cup \{(\bar{b},\bar{a}) \mid \mathcal{M} \models p(\bar{a}) \wedge q(\bar{b}) \ \bar{a} \text{ полуизолирует } \bar{b}\}.$$

В соответствии с замечанием 1 несимметричность отношения $\mathrm{S}I_{p,q}$ означает, что некоторая (p,q)-устойчивая (или (q,p)-устойчивая) формула φ связывает некоторые реализации $\bar{a}$ и $\bar{b}$ типов p and q соответственно, и при этом не найдется (q,p)-устойчивой (соответственно (p,q)-устойчивой) формулы ψ, связывающей те же кортежи и такой, что $\vdash \psi \to \varphi$.

Следующие два предложения показывают, что для характеризации несимметричности отношения $\mathrm{S}I_{p,q}$, достаточно рассматривать случай, когда p и q - неглавные типы.

Предложение 4. (Б. С. В. [2]) Если $p(\bar{x}), q(\bar{y}) \in S(A)$ - главные типы, изолируемые формулами $\theta_p(\bar{x})$ и $\theta_q(\bar{y})$ соответственно, то формула $\theta_p(\bar{x}) \wedge \theta_q(\bar{y})$ $(p \leftrightarrow q)$-формула. При этом для любых реализации $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в модели $\mathcal{M}$ типов p и q соответственно, формула $\theta_p(\bar{x}) \wedge \theta_q(\bar{y})$ свидетельствует о полуизолированности $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно множества A, а также о полуизолированности $\bar{a}$ над $\bar{b}$ относительно множества A.

Предложение 5. (Б. С. В. [2]) Пусть T счетная теория. Если $p(\bar{x}) \in S(A)$ - неглавный тип, $q(\bar{y}) \in S(A)$ главный тип, изолируемой формулой $\theta_q(\bar{y})$, то формула $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \square \theta_q(\bar{y})$ несимметрично относительно (p,q)-устойчивости.При этом для любых реализации $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в моделиl $\mathcal{M}$ типов p и q соответственно, формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ свидетельствует о полуизолированности $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно множества A, и не существует формулы $\psi(\bar{x},\bar{y})$,с параметрами из A, свидетельствующей о полуизолированности $\bar{a}$ над $\bar{b}$ относительно A.

Следствие. Для любых неглавных типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ из $S(A)$, реализующиеся в счетной модели l $\mathcal{M}$ счетной теории T кортежами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соответственно, а также для любой формулы $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ с параметрами из A, удовлетворяющей условию $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a},\bar{b})$, следующие условия эквивалентны:

(1) формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ свидетельствует о полуизолированности $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно множества A, но не может свидетельствовать о полуизолированности $\bar{a}$ над $\bar{b}$ относительно множества A;

(2) выполняются следующие свойства:

(a) для любого $n' \in \omega$ существует $n \in \omega$ такое, что для любого кортежа $\bar{a}_n$ цвета $\geq n$ с условием $\mathcal{M} \models \theta_n(\bar{a}_n)$ любая реализация формулы $\varphi(\bar{a}_n,\bar{y})$ в модели $\mathcal{M}$ имеет цвет $\geq n'$;

(b) существует такое $n \in \omega$, что для любого $n' \in \omega$ найдутся кортежи $\bar{a}_n$ и $\bar{b}_{n'}$ конечных цветов $< n$ и $\geq n'$ соответственно такие, что $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_n,\bar{b}_{n'})$.

Предложение 7 (А. Пилай [4]). *Если $p \in S(T)$ - неглавный властный тип с реализацией в модели $\mathcal{M}$ of T, тогда отношение $\mathrm{S}I_p$ на множестве реализаций p в $\mathcal{M}$ несимметрична. Более того, существует реализация $\bar{a}$ и $\bar{b}$ типа p в модели $\mathcal{M}$ такая, что тип $\mathrm{t}p(\bar{b}/\bar{a})$ главный и $\bar{b}$ не полуизолирует $\bar{a}$.*

2 Предельные модели

Мы говорим, что структура A *атомная*, если для любых кортежей $\bar{a}$ из A, полный тип $\bar{a}$ в A является полным. Модель A теории T называется *простой*, если A элементарно вкладывается в каждую модель из теории T.

Предложение 7. (Б. С. В. [2]) Пусть L счетная структура первого порядка, а T полная теория в L которая имеет бесконечное число моделей.

(a) если для каждого $n < \omega$, $S_n(T)$ как максимум счетная, тогда T имеет счетное число атомных моделей.

(b) если A счетная, атомная структуры L которая является моделью T, тогда A - простая модель теории T.

Определение (С. В. Судоплатов [5]). Счетная модель M теории T называется *предельной* (соответственно *предельная над типом* $p \in S(T)$) если M не является простой над кортежами и $\mathrm{M} = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{M}(\bar{a}_n)$, , где $(\mathrm{M}(\bar{a}_n))_{n\in\omega}$ элементарная цепь простых моделей над кортежами $\bar{a}_n$ (и M $p(\bar{a}_n)$), $n \in \omega$.

Определение. (Б.С. Байжанов [6]) Пусть $p(\bar{x})$ - некоторый (необязательно полный) n-тип над множеством $A \subseteq M$ в модели M теории T, B - множество в модели M. *Квазиокрестностью множества* B *в* p называется множество $\mathrm{QV}_{p,\mathrm{M}}(B)$ всех кортежей $\bar{c} \in M$ такое, что существует кортеж $\bar{b} \in B$ и $(\mathrm{t}p(\bar{b}/A), p)$-устойчивая формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ with M $\varphi(\bar{b}, \bar{c})$.

Квазиокрестностью множества B *в* $S^n(A)$ называется множество

$$\mathrm{QV}^n_{A,\mathrm{M}}(B) \square \bigcup_{p\in S^n(A)} \mathrm{QV}_{p,\mathrm{M}}(B).$$

Квазиокрестностью множества B *в* $S(A)$ называется множество

$$\mathrm{QV}_{A,\mathrm{M}}(B) \square \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{QV}^n_{A,\mathrm{M}}(B).$$

Для кортежей $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, мы пишем $\mathrm{QV}_{p,\mathrm{M}}(\bar{a})$ (соответственно $\mathrm{QV}^n_{A,\mathrm{M}}(\bar{a})$, $\mathrm{QV}_{A,\mathrm{M}}(\bar{a})$) вместо $\mathrm{QV}_{p,\mathrm{M}}(\{a_1, \ldots, a_n\})$ ($\mathrm{QV}^n_{A,\mathrm{M}}(\{a_1, \ldots, a_n\})$, $\mathrm{QV}_{A,\mathrm{M}}(\{a_1, \ldots, a_n\})$).

Заметим, что для любых кортежей $\bar{a}$ and $\bar{b}$ в M, кортеж $\bar{a}$ полуизолирует $\bar{b}$ тогда и только тогда, когда $\bar{b} \in \mathrm{QV}_{\mathrm{t}p(\bar{b}),\mathrm{M}}(\bar{a})$. В частности, отношение $\mathrm{S}I_p$ на множестве реализаций типа p в модели l M совпадает с множеством пар $(\bar{a}, \bar{b})$ таких, что M $p(\bar{a})$ и $\bar{b} \in \mathrm{QV}_{p,\mathrm{M}}(\bar{a})$.

Предложение 9. (Б. С. В. [2]) *Отношение* $\mathrm{S}I_p$ *на множестве реализаций типа* p *в модели l* M *несимметрично тогда и только тогда, когда для любой (некоторой) реализации* $\bar{a}$ *типа* p *в модели* M *найдется кортеж* $\bar{b} \in \mathrm{QV}_{p,\mathrm{M}}(\bar{a})$ *такой, что* $\mathrm{QV}_{p,\mathrm{M}}(\bar{b}) \subset \mathrm{QV}_{p,\mathrm{M}}(\bar{a})$.

Определение. Пусть $p(\bar{x})$ некоторый (необязательно полный) n-тип над множеством $A \subseteq M$ в модели M теории T, B - множество в модели M. *Окрестностью множества* B *в типе* p называется множество $V_{p,\mathrm{M}}(B)$ всех кортежей $\bar{c} \in M$ такие, что M $p(\bar{c})$ и существует кортеж $\bar{b} \in B$ и $(\mathrm{t}p(\bar{b}/A) \leftrightarrow \mathrm{t}p(\bar{c}/A))$-формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что M $\varphi(\bar{b}, \bar{c})$.

Множество

$$V^n_{A,\mathrm{M}}(B) \square \bigcup_{p\in S^n(A)} V_{p,\mathrm{M}}(B)$$

является *окрестностью множества* B *в* $S^n(A)$

Множество

$$V_{A,\mathrm{M}}(B) \square \bigcup_{n\in\omega} V^n_{A,\mathrm{M}}(B)$$

является *окрестностью множества* B *в* $S(A)$.

Определение. Если $\bar{b}$ полуизолирует $\bar{a}$ над некоторым типом p и $\bar{a}$ тоже полуизолирует $\bar{b}$, т.е. отношение полуизолированности симметрично, тогда мы говорим, что $\bar{a}$ лежит в окрестности $\bar{b}$ и $\bar{b}$ лежит в окрестности $\bar{a}$.

$$\text{If } (\bar{b},\bar{a}) \in SI_p \text{ и } (\bar{a},\bar{b}) \in SI_p, \text{ then } \bar{a} \in V_p(\bar{b}) \text{ и } \bar{b} \in V_p(\bar{a}).$$

Определение. $\bar{b}$ полуизолирует $\bar{a}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}$ лежит в *квазиокрестности* $\bar{b}$.

$$(\bar{b},\bar{a}) \in SI_p \Leftrightarrow \bar{a} \in QV_p(\bar{b})$$

Определение. $\bar{a}$ изолирует $\bar{b}$ над некоторым типом p тогда и только тогда, когда $\bar{b}$ лежит в *атомарном квазиокрестности* $\bar{a}$.

$$(\bar{a},\bar{b}) \in I_p \Leftrightarrow \bar{b} \in AQV_p(\bar{a})$$

Следующие свойства выводятся из свойств отношений изолированности и полуизолированности:

1) Если $(\bar{b},\bar{a}) \in I_p$ тогда $(\bar{b},\bar{a}) \in SI_p$

2) $AQV_p(\bar{a}) \subset QV_p(\bar{a})$

3) Если $(\bar{a},\bar{b}) \in SI_p$ и $(\bar{b},\bar{c}) \in SI_p$, тогда $(\bar{a},\bar{c}) \in SI_p$

4) $AV_p(\bar{a}) \subseteq V_p(\bar{a})$

Теорема. Пусть $p(\bar{x})$ - полный тип малой теории T. Тогда следующие условия эививалентн:

1) существует предельная модель над типом p

2) $\forall \alpha \in p \ AQV_p(\alpha) \neq AV_p(\alpha)$

3) if $\bar{b} \in AQV_p(\bar{a})$ nad $\bar{a} \notin QV_p(\bar{b})$

Отношение SI_p несимметрично $\Rightarrow AQV_p(\bar{a}) \neq AV_p(\bar{a})$

$QV_p(\bar{a}) \neq V_p(\bar{a})$

Литература:

1. Pillay A., Countable models of stable theories, Proc. Amer. Math. Soc., (1983).
2. Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation, (2011)
3. Pillay A. Theories with exactly three countable models and theories with algebraic prime models, J.Symbolic Logic, (1980), 302--31
4. Pillay A. Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models, Ann. Pure and Appl. Logic, (1989), 147--160.
5. Sudoplatov S.V. The Lachlan problem, Edition of Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 2009.
6. Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, J.Symbolic Logic, (2001), 1382--1414.

Резюме

Статья основывается на работе Б.С.Байжанова, С.В.Судоплатова и В.В.Вербовского - "Условия для несимметричного отношения полуизолируемости". Рассматриваются отношения полуизолированности и (p,q)-устойчивые формула и их связь с понятиями как окрестности и квази-окрестности . Будет представлена новая идея атомарных окрестностей и атомарных квази-окрестностей. Написание теоремы на новом языке окрестностей и квази-окрестностей.

Ключевые слова: отношение полуизолированности, предельная модель, окрестность, квази-окрестность.

Түйіндеме

Мақала Б.С. Байжанов, С.В. Судоплатов және В.В. Вербовский жазған "Симметриялық емес жартылай изоляция қатынастары үшін жағдайлар" жұмысына негізделді. "Шекті модельдер үшін жартылай изоляция және (p,q)-сақтаушы формулалар" түсіндіріледі және ол айнала мен квази-айнала деген ұғыммен байланыстырылды. Сондай-ақ, атомдық айнала және атомдық квази-айнала деген жаңа ұғымдар еңгізілді. Теорема жаңа айнала мен квази-айнала терминдер тілінде жазылды.

Кілт сөздер: жартылай изоляция қатынастары, шекті модельдер, айнала, квази-айнала.

Summary

The report is based on the paper of B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov , V.V.Verboskiy – "Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation". We will consider the relation of semi-isolation, (p, q)-preserving formulas, and their connection with a concept as neighborhood and quasi-neighborhood. Will be introduced a new idea atomic neighborhoods and atomic quasi- neighborhoods. Writing it in terms of neighborhoods and quasi- neighborhoods.

Key words: realtion of sem-isolation, limit model, neighborhood, quasi- neighborhood.

ӘОЖ 517.12

СЫЗЫҚТЫҚ ЛИ АЛГЕБРАЛАРЫНЫҢ МЫСАЛДАРЫ

А.С.БАЗЫЛЖАНОВА, математика магистрі,
Л.ҚАСЫМОВА
Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Анықтама. K өрісінде анықталған R сызықтық векторлық ішкі кеңістігі Ли алгебрасы деп аталады, егер бұл кеңістікте коммутациялау амалы және кез келген $\overline{x}$, $\overline{y}$ векторлары үшін олардың коммутаторы болатын үшінші $[\overline{x}, \overline{y}]$ векторы анықталып, келесі аксиомалар орындалса:

а) $[\lambda_1 \overline{x_1} + \lambda_2 \overline{x_2}, \overline{y}] = \lambda_1 [\overline{x_1}, y] + \lambda [\overline{x_2}, \overline{y}]$;

б) $[\overline{x}, \overline{y}] = -[\overline{y}, \overline{x}]$;

с) $[\overline{x}, [\overline{y}, \overline{z}]] + [\overline{y}, [\overline{z}, \overline{x}]] + [\overline{z}, [\overline{x}, \overline{y}]] = 0$, $\forall\ x, y, z \in R,\ \lambda_1, \lambda_2 \in K$.

$K = C$ комплекс сандар өрісінде анықталған Ли алгебрасын қарастырайық. Егер M және N жиындары R алгебрасынан алынған векторлар жиыны болса, онда $[M, N]$ арқылы $\overline{x} \in M$, $\overline{y} \in N$ векторларының коммутаторларының құрсауын белгілейміз:

$$[M, N] = \langle [\overline{x}, \overline{y}] \mid \overline{x} \in M, \overline{y} \in N \rangle .$$

Егер M , N жиындары R сызықтық векторлық алгебрасының ішкі кеңістіктері болса, онда жоғарыдағы а), б), с) аксиомаларының орындалатындығын тексеру қиын емес.

Анықтама. R алгебрасының ішкі кеңістігі N ішкі алгебра деп аталады, егер $[N, N] \subset N$ болса, және идеал деп аталады, егер $[R, N] \subset N$ болса.

Мысал 1. Егер кез келген $\overline{x}, \overline{y} \in R$ үшін $\left[\overline{x}, \overline{y}\right] = 0$ болса, онда а), в), с) аксиомаларының орындалатындығын тексеру қиын емес. Бұл Ли алгебрасының коммутативті алгебрасы деп аталады.

Мысал 2. $L^{(m)}$ арқылы m өлшемді R сызықтық векторлық кеңістігіндегі барлық сызықтық түрлендірулер жиынын белгілейік. Кез келген $A, B \in L^{(m)}$ үшін $[A, B] = AB - BA$ деп қабылдайық. Бұл жағдайда а), в), с) аксиомалары орындалады.

$L^{(m)}$ – Лидің толық сызықтық алгебрасы деп аталады.

Егер $R = R_1 \dotplus R_2 \dotplus \ldots \dotplus R_k$, мұндағы $\left[R_i, R_i\right] \subset R_i, \left[R_i, R_j\right]$=0 (*i, j = 1,2,...,k*) болса, онда R алгебрасы $R_1, R_2, ..., R_k$ ішкі алгебраларының тура қосындысына жіктеледі деп айтамыз.

Егер N жиыны R_i ішкі алгебраларының идеалы болса, онда ол R алгебрасының да идеалы болады.

Жалпы, $[N, R] = \left[N, \sum_{j=1}^{n} R_j\right] \subset \sum_{j=1}^{n} \left[N, R_j\right] \subset N.$

R алгебрасының R' алгебрасына бейнеленуі f гомоморфизм деп аталады, егер:

1) $f\left(\lambda_1, \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x_2}\right) = \lambda_1 f\left(\overline{x_1}\right) + \lambda_2 f\left(\overline{x_2}\right)$

2) $f\left(\left[\overline{x_1, x_2}\right]\right) = \left[f\left(\overline{x}_1\right) + f\left(\overline{x_2}\right)\right]$

болса, мұндағы $\lambda_1, \lambda_2 \in C, \overline{x_1, \overline{x_2}} \in R.$

Егер $\overline{x} \neq \overline{y}$ болғанда $f\left(\overline{x}\right) \neq f\left(\overline{y}\right)$ болса, онда f бейнеленуі $\left(R \to R^{'}\right)$ изоморфизм деп аталады.

$\overline{x} \in R$ векторы үшін *R* кеңістігінің сызықтық операторы *A*-ны келесі түрде анықтайық:

$$\overline{A_x - u = \left[\overline{\overline{xy}}\right]}, \overline{\forall u \in R.}$$

Бұл жағдайда А), В), С)- аксиомалары орынды.

$\overline{x} \to A_x$ бейнеленуі гомоморфизм болады. Бұл гомоморфизм R алгебрасын толық сызықтық алгебраға ауыстырды.

$\overline{x} \to A_x$ гомоморфизмін R алгебрасының регулярлы өрнектелуі деп атайды.

Барлық $A_{\overline{x}}\left(\overline{x} \in R\right)$ операторлар жиынтығы R алгебрасының ішкі дифференциалдауының алгебрасы деп аталады.

$$A_{\overline{x}} = A_{\overline{y}} \Leftrightarrow \left[\overline{x} - \overline{y}, R\right] = 0.$$

Лемма 1. $\left[\overline{u}, R\right] = 0$ теңдігін қанағаттандыратын $\overline{u} \in R$ векторлар жиыны идеал құрайды.

Дәлелдеуі. Айталық, N – ішкі алгебра және $N = \left\{\overline{u} \middle| \left[\overline{u}, R\right] = 0\right\}$ болсын. Онда, $\forall \overline{u} \in N$ және $\left[\overline{u}, R\right] = 0$ болғандықтан $[R, N] \subset N.$

$[R, R]$ ішкі алгебрасы R алгебрасының идеалы болса, онда $[N, N]$ қайтадан идеал болады. Себебі, $[R,[N, N]] \subset [N,[N, R]] + [N,[R, N]] \subset [N, N].$

$R^{(0)} = R, R^{(n+1)} = \left[R^{(n)}, R^{(n)}\right]$ $(i = 1,2,...)$ қатарын қарастырайық.

Егер кейбір n номері үшін $R^{(n)} = 0$ $\left(R^{(n+1)} = R^{(n+2)} = \ldots = 0\right)$ болса, онда R алгебрасын өлшемді деп атаймыз.

Егер $R_0 = R,$ $R_{n+1} = \left[R_n, R\right]$ $(n = 1,2,...)$ тізбегінде нольдік емес ішкі алгебра жатса, онда R нильпотентті алгебра деп аталады.

Егер $R^{(0)} = R_0, R^{(n)} \subset R_n$ болса, онда $R^{(n+1)} = \left[R^{(n)}, R^{(n)}\right] \subset \left[R_{n,} R\right] \subseteq R_{n+1}.$

Яғни, алгебра нильпотентті болса, онда ол шешімді.

Лемма. R алгебрасының кез келген шешімді (нильпотентті) идеалы бойынша алынған фактор идеалы шешімді (нильпотентті).

Лемма. Шешімді (нильпотентті) алгебралардың тура қосындысы шешімді (нильпотентті).

Симплективтік $Sp(n)$ группасы комплекстік n өлшемді векторлық кеңістіктің барлық сызықтық түрлендірулерінен тұрады, олар ерекше емес кососимметриялы қоссызықтық форманы сақтайды. Мұндағы кеңістіктің өлшемі n; $n=2\nu$ жұп сан деп санау керек, себебі тек қана осы жағдайда кососсимметриялық форма ерекше емес болады. Базисті арнайы таңдау арқылы форманы

$$[x,y]=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\ldots+x_\nu y_{\nu+1}-x_{\nu+1}y_\nu-\ldots-x_ny_1$$

түріне келтіруге болады және онда g - матрицасының симплективтік группаға тиісті болу шарты

$$\sigma^{-1}g\sigma=g'^{-1}, \text{ мұндағы } \sigma=\begin{pmatrix}0 & -s\\ s & 0\end{pmatrix}, \quad s=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix},$$

қатынасының орындалуына келтіріледі. Онда толық сызықтық $GL(n)$ группасында Гаусс жіктеуінің базисін таңдау тікелей симплективтік

$$Sp(n)=\overline{ZDZ}$$

ішкі группасында Гаусс жіктеуін туындатады, мұндағы Z, D және Z, сәйкесінше $\mathrm{Z}(n), D(n)$ және $Z(n)$ симплективтік группалардың қиылысулары түрінде анықталады.

$Sp(2)$ группасының $SL(2)$ группасымен изоморфтылығын айта кетуге болады.

Диагональдық матрица $\delta\in D(n)$ симплективті сол уақытта, тек қана сол уақытта, егер оның өзіндік мәндері

$$\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_\nu;\delta_{\nu+1},\ldots,\delta_{n-1},\delta_n$$

қатарында кез келген екі сан, центрге қатысты симметриялы орналасқан, шамалары бойынша өзара кері болса. $\delta_1,\ldots,\delta_\nu$ сандарын тәуелсіз параметрлер деп санап, D группасының кез келген комплекс – аналитикалық характерін

$$\alpha(\delta)=\delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2}\cdots\delta_\nu^{m_\nu} \qquad (*)$$

түрінде жазайық.

Лемма. (*) характер $Sp(n)$-группасына қатысты индуктивті болады, сонда, тек сонда ғана егер барлық $m_1,\ldots,m_\nu$ параметрлері бүтін сандар болып

$$m_1\geq m_2\geq\ldots\geq m_\nu\geq 0$$

реттелу қатынасына бағынса.

Дәлелдеуі. Көрсетілген шарттардың қажеттілігі G группасында әрқайсысы Лоренц группасына изоморфты болатын $G_1,G_2,\ldots,G_\nu$ ішкі группалар жүйесінің бар болатындығынан шығады. Мысалы, G_1 ішкі группасы

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & & & & & & 0\\ \gamma & \delta & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \alpha & -\beta\\ 0 & & & & & & -\gamma & \delta\end{pmatrix}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

түріндегі барлық сызықтық түрлендірулерден тұрады. $G_2,\ldots,G_{\upsilon-1}$ ішкі группалары осыған ұқсас анықталады.

G_ν-ішкі группасы тек ғана $x_\nu, x_{\nu+1}$ координаталары өзгеретін барлық унимодулярлық түрлендруден тұрады. Егер лемманың шарты орындалғанда $(m_1,\ldots,m_\nu,0,\ldots,0)$ сигнатуралы $D(n)$ группасының характерінің толық сызықтық группаға қатысты туындалғандығын байқасақ, онда жеткіліктігі түсінікті болады.

Яғни, (*) характер $Sp(n)$ ішкі группасына қатысты туындаған. Лемма дәлелденді.

$\alpha(z,g)$ функциясын

$$\alpha(z,g)=\Delta_1^{r_1}(zg)...\Delta_\upsilon^{r_\upsilon}(zg),$$

мұндағы $r_p = m_p - m_{p+1}$ және $\Delta_i(g)$ - өрнегі $g\in Sp(n)$ матрицасының бас диагоналдық миноры, теңдігімен анықтап байқайтынымыз, барлық r_p параметрлері теріс емес сандар және симплекативтік группаның $\{r_1,\ldots,r_\upsilon\}$ сигнатурасымен көрінісі $\mathbb{Z}$ группасындағы полиномдардың кейбір $R_\tau(\mathrm{Z})$ кеңістігінде

$$\tau_g f(z)=\alpha(z,g)f(z\cdot g)$$

қарапайым формуламен анықталады.

Әдебиеттер:

1. Гото М., Гроссханс Ф. «Полупростые алгебры Ли». - Новокузнецкий физико-математический институт, 1998.
2. Жетпісов Қ., Сексенбаев Қ. «Жоғарғы алгебра», ІІ-бөлім. - Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2003.
3. Дынкин Е.Б. «Структура полупростых алгебр Ли» // УМН. – 1947. - Т.2. – В. 4(20). -С. 59-127.

Түйіндеме

Сызықтық көріністер теориясы белгілі бір абстрактылы группалар класын оқып–зерттеудің өте қуатты құралы. Сонымен қатар сызықтық көріністердің әртүрлі тектерін оқып–зерттеу өзі үлкен қызығушылық тудырады. Себебі осы сызықтық көріністі туындататын G группа белгілі бір геометриялық объектілер жүйесін туындатады (мысалға, қозғалыстар группасын анықтау). Бұл мақалада «классикалық» сызықтық группалардың ақырлы көріністерінің теориясы туралы айтылады. Біріншідіен, ақырлы өлшемді көріністердің практикалық (қосымшамалары) қолданулары үлкен рөл атқарады. Екіншіден, бұл теорияның айқын геометриялық мысалдарынан жалпы заңдылықтарды көру өте оңай.

Кілт сөздер: Ли алгебрасы, Ішкі алгебра, идеал, гомоморфизм, изоморфизм, нильпотентті алгебра.

Резюме

Теория линейных представлений является очень удобным аппаратом определенных абстрактных групп. Поэтому изучение разных типов линейных представлений представляет очень большой интерес, потому что группа G, порождающая данная линейная представления, определяет одну систему геометрических объектов. В данной статье говорится о теории конечных представлений «классических» линейных групп. Во-первых, большую роль играет практическое применение конечномерных представлений. Во-вторых, в явных геометрических примерах легко уловить общие законы данной теории.

Ключевые слова: алгебра Ли, под алгебра, идеал, гомоморфизм, изоморфизм, нильпотентная алгебра.

Summary

Theory of linear representations is very convenient apparatus of certain abstract groups. Therefore, study of different types of linear representations is very interesting, because the Group poraždaûŝaâ the

linear view defines a single system of geometric objects. This article refers to the theory of finite representations of "classical" linear groups. Firstig, the practical application of the finite-dimensional representations plays a great role. Secondly, in explicit geometric (examples easily) catch the general laws of this theories is easily caught.

Key words: algebra Lie, subalgebra, ideal, homomorphism, isomorphism, nilpotent algebra.

УДК 510.67

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ВЛОЖИМОСТЬ В КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ СЧЕТНОГО ЯЗЫКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

М.И. БЕКЕНОВ, кандидат физико-математических наук, доцент
Евразийский национальный университет имени Л.Гумилева, г.Астана,
Республика Казахстан

Пусть L счетный язык первого порядка. Рассмотрим класс K_L всех бесконечных моделей языка L. T- теория языка L. T^M множество всех моделей теории T [1,2,3].

Модель A элементарно вкладывается в модель B, если существует изоморфизм модели A на элементарную подмодель модели B. Символически это в дальнейшем будем обозначать $A \prec B$.

Определение 1. Пусть $\omega\leq\lambda\leq\mu$, A и B модели теории T языка L, $|A| = |B| =\mu$. Модели A и B назовем λ-подобными, если для любой $A' \prec A$ и $|A'| \leq \lambda$, следует модель $A' \prec B$ и для любой $B' \prec B$ и $|B'| \leq\lambda$, следует модель $B' \prec A$.

Две любые λ-подобные модели элементарно эквивалентны, то есть являются моделями одной теории.

Заметим, что если рассматривать не элементарное обоюдное вложение моделей, а изоморфное обоюдное вложение, то оно не дает элементарной эквивалентности моделей.

Отношение λ-подобия является отношением эквивалентности. Таким образом, отношение $E_{\lambda\mu}$ разбивает множество моделей класса K на непересекающиеся классы
λ-подобных моделей мощности μ.

Естественно возникает понятие спектральной функции количества этих классов в каждой конкретной мощности для теории T относительно кардинала λ.

И по аналогии, со спектральной функцией для теории T – как количество моделей мощности μ, с точностью до изоморфизма, вводится спектральная функция $B_T(\lambda, \mu)$ для теории T:

Определение 2. Пусть T теория, $\omega \leq\lambda \leq\mu$. Спектральная функция $B_T(\lambda, \mu)$ – количество классов моделей мощности μ по отношению λ-подобия теории T.

Вообще, для одной и той же теории T спектральные функции $I_T(\mu)$ и $B_T(\lambda, \mu)$ могут быть различными даже уже для $I_T(\omega)$ и $B_T(\omega,\omega,)$, что нетрудно увидеть это различие этих функций для несчетных кардиналов.

Для счетных моделей например: известный классический пример Эренфойхта теории T с тремя счетными моделями имеет $B_T(\omega, \omega) =2$.

А например, суперстабильная теория T не может иметь $B_T(\omega, \omega)$ □ ω.

Имеются теории T, у которых $I_T(\omega) = 2^\omega$, а $B_T(\omega, \omega) = \omega$, а также теории T, у которых $I_T(\omega) = \omega$, а $B_T(\omega, \omega)$ □ ω[4].

Изучение свойств спектральной функции $B_T(\lambda, \mu)$ и взаимосвязь со структурными свойствами моделей теории T вообще и конкретных теорий в частности, также представляет интерес для теории моделей.

Свойства спектральной функции $B_T(\mu, \lambda)$ теории T влияет на свойства теории T. Свойства спектральной функции $B_T(\lambda, \mu)$ теории T также влияет и на структуру некоторых моделей теории T [4].

В данной статье рассмотрим отношения $E\mu\mu$ в каждой мощности μ.

Факторизуем класс K_L по отношению $E\mu\mu$, и будем говорить просто о b-подобии в каждой бесконечной мощности μ. Ограничимся рассмотрением картины для достаточно большого кардинала $\varkappa$. Этот факторкласс обозначим через K_L^b.

Отношение элементарной вложимости моделей естественно индуцирует частичный b-порядок на факторклассе K_L^b . Обозначим эту факторалгебраическую систему через $[K_L^b, \leq_b]$.

Существуют интересные связи подсистем этой алгебраической системы со свойствами соответствующих теорий классов моделей [4].

На этой факторалгебрической системе также естественно индуцируются ультрапроизведения по различным ультрафильтрам.

Пусть $s \in [\ K_L{}^b{}_, \leq_b\ ]$. Возьмем множество всех ультрастепеней элемента s и замкнем его относительно b-порядка. Полученную подсистему назовем B_s-деревом, порожденным элементом s. Таким образом $[\ K_L{}^b{}_, \leq_b\ ]$ множество различных непересекающихся
B-деревьев.

Теорема 1. Любой элемент B-дерева является его порождающим.

Следствие 1. Множество всех моделей B-дерева – множество всех моделей некоторой полной теории T.

Множество всех моделей B-дерева назовем B^M -деревом.

На множестве B-деревьев также индуцируется ультрапроизведения по различным ультрафильтрам, то есть:

Теорема 2. Ультрапроизведение заданных B-деревьев по заданному ультрафильтру это тоже будет B-дерево, полученное ультрапроизведениями элементов, выбранных из заданных B-деревьев по заданному ультрафильтру.

Следствие 2. Ультрапроизведение заданных B^M -деревьев по заданному ультрафильтру это тоже будет B^M -дерево, полученное ультрапроизведениями элементов, выбранных из заданных B^M -деревьев по заданному ультрафильтру.

Аналогично все модели произвольной теории T, которое мы обозначили через T^M разбивается отношением b-подобия на непересекающиеся классы моделей теории T.

Множество этих классов обозначим через T_b . T_b есть подсистема K_b.

Таким образом каждой полной подсистеме(B-дереву) соответствует полная теория T, у которой $T^M = B^M$.

Следствие 3. Если теория T аксиоматизируемая, то T^M есть объединение некоторых
B^M –деревьев.

Следствие 4. Замыкание объединения некоторых B^M –деревьев относительно всевозможных ультрапроизведений будет давать аксиоматизируемую теорию T.

Определение 3. Подсистема ${}_1K^b$ системы $[\ K_L{}^b{}_, \leq_b\ ]$, называется аксиоматизируемой, если она замкнута относительно ультрапроизведений B-деревьев (полных подсистем).

Теорема 3. Если теория T аксиоматизируемая, то T_b есть объединение некоторых полных подсистем.

Теорема 4. Подсистема ${}_1K^b$ аксиоматизируемая, является объединением полных подсистем

Не все объединения полных подсистем являются аксиоматизируемыми подсистемами, но если подсистема аксиоматизируема, то она есть объединение полных подсистем.

Также, не каждое объединение аксиоматизируемых подсистем будет аксиоматизируемой подсистемой.

Однако, если рассматривать конечные объединения, то:

Теорема 5. Объединение конечного числа полных подсистем будет аксиоматизируемой подсистемой, и фактически является пересечением, соответствующих теорий заданных полных подсистем.

Пример: Аксиоматизируемая подсистема плотного линейного порядка, является объединением четырех полных подсистем, то есть пересечением четырех полных расширений теории плотного линейного порядка, каждое из которых получается введением одной из четырех дополнительных аксиом:

не существует концевых точек;

существует левая, но не существует правой концевой точки;

существует правая, но не существует левой концевой точки:

существует правая и левая концевая точка.

Что же касается пересечений аксиоматизируемых подсистем (в частности непротиворечивости объединения теорий), то:

Теорема 6. Пусть ${}_1T_b$, ${}_2T_b$ аксиоматизируемые подсистемы (соответствующие им
${}_1T$, ${}_2T$ теории). Пересечение ${}_1T_b \cap {}_2T_b$ есть аксиоматизируемая подсистема (фактически ${}_1T \cup {}_2T$ непротиворечивая теория) тогда и только тогда , когда ${}_1T_b \cap {}_2T_b \neq \varnothing$, то есть содержит хотя бы одну полную подсистему.

Вообще, объединение теорий $_1T \cup {}_2T$ может быть непротиворечивой теорией, но пересечение этих теорий не является полной теорией.

Следствие 5. Пересечение аксиоматизируемых подсистем либо аксиоматизируемая подсистема, либо пустое множество.

Определение 4. Аксиоматизируемая подсистема называется n-аксиоматизируемой подсистемой, если она есть объединение конечного числа полных подсистем.

Теорема 7. Множество всех n-аксиоматизируемых подсистем образует решетку.

Литература:

1. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. - М.: Наука, 1987. – 336 с.
2. Кейслер Г., Чен Ч.Ч. Теория моделей. - М.: Мир,1977.
3.Дж.Сакс. Теория насыщенных моделей. - М.: Мир, 1976.
4. Бекенов М.И. Мальцевские чтения. - Новосибирск, 2012.

Резюме

В статье исследуется класс бесконечных моделей счетного языка первого порядка относительно элементарной вложимости моделей. Различным теориям ставятся в соответствие алгебраические подсистемы с одним отношением порядка. Приводятся некоторые свойства этих подсистем.

Ключевые слова: Модель, теория, язык,элементарная вложимость.

Түйіндеме

Бұл мақалада бірінші реттегі есеп тілінің шексіз модельдер класын модельдердің бір-біріне салынын салыстырулын қарастырады. Бір қатынастық ретті алгебра жүйесінің әртүрлі теорияға сәйкестігі таңдалады. Бұл жүйешенің кейбір қасиеттері көрсетілген.

Кілт сөздер: Модель, теория, тіл, элементарлық бір-біріне салыну.

Summary

The article deals with a class of infinite models of first-order language of elementary embedding of models. Various theories is given algebraic subsystems with an attitude. Some properties of these subsystems are tiken.

Key words: Models, theories, language, elementary embedding.

УДК 517.925

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Ш.БИЛАЛ, кандидат физико-математических наук
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

1. Введение. Пусть $J=(a,b),\ -\infty\le a<b\le\infty$. На интервале J рассмотрим линейное дифференциальное уравнение Штурма – Лиувилля

$$\left(\rho(t)\,y'(t)\right)' + v(t)\,y(t) = 0, \tag{1}$$

ρ, v – непрерывные функции на J и $\rho(t)>0,\ t\in J$.

2. Постановка задачи. Пусть $J=(a,b),\ -\infty\le a<b\le\infty$ и на J задано линейное дифференциальное уравнение Штурма – Лиувилля (1) с соответствующими условиями на весовые функции. Требуется установить условия сопряженности и осцилляторности данного уравнения.

3. Методы решения задачи. Для решения задачи приведем вспомогательные утверждения, служащие основанием для доказательства теорем, лемм и следствий – основных фактов нашего исследования.

Пусть $A^0C_{2,\rho}\left(J\right)$ совокупность локально абсолютно непрерывных на J функций f с компактными носителями $suppf < J,$ для которых $\int\limits_a^b \rho\left(t\right)\left|f^{'}\left(t\right)\right|^2 dt < \infty.$

Из определения сопряженности и осцилляторности уравнения (1) в силу теоремы Штурма [1] о чередовании нулей решений уравнения (1) легко вытекает:

Теорема А. Уравнение (1) осцилляторно при $t = b\left(t = a\right)$, тогда и только тогда, когда для любого $T \grave{o} J$ уравнение (1) сопряжено на $\left[T,b\right)\left(\left(a,T\right]\right).$

Из вариационного принципа [1] в качественно теории линейных дифференциальных уравнений следует:

Лемма А. Пусть $a \le \alpha < \beta \le b.$ Уравнение (1) сопряжено на (α,β) тогда и только тогда, когда существует функция $f_0 \grave{o} A^0C_{2,\rho}\left(J\right)$ такая, что

$$\int\limits_\alpha^\beta \left[\rho\left(t\right)\left|f_0^{'}\left(t\right)\right|^2 - v(t)\left|f_0(t)\right|^2\right]dt \le 0.$$

Введем следующие обозначения. Для $a \le \alpha < \beta \le b$ и $c,d \grave{o}(\alpha,\beta)$ положим

$$\Phi^-\left(\alpha,c\right) = \inf_{\alpha<z<c}\left[\left(\int\limits_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-1} - \left(\int\limits_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-2}\int\limits_z^c v(t)\left(\int\limits_z^t \rho^{-1}ds\right)^2 dt\right],$$

$$\Phi^+\left(d,\beta\right) = \inf_{d<z<\beta}\left[\left(\int\limits_d^z \rho^{-1}ds\right)^{-1} - \left(\int\limits_d^z \rho^{-1}ds\right)^{-2}\int\limits_d^z v(t)\left(\int\limits_t^z \rho^{-1}ds\right)^2 dt\right],$$

$$\varphi^-\left(\alpha,c\right) = \inf_{\alpha<z<c}\left[\left(\int\limits_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-1} + \int\limits_z^c v_-(t)dt\right],$$

$$\varphi^+\left(d,\beta\right) = \inf_{d<z<\beta}\left[\left(\int\limits_d^z \rho^{-1}ds\right)^{-1} + \int\limits_d^z v_+(t)dt\right],$$

где $v_\pm\left(t\right) - max\left\{0,\pm v(t)\right\}$.

Теорема 1. Пусть $a \le \alpha < \beta \le b$. Если существует точки $c,d : \alpha < c < d < \beta$ такие, что

$$\int\limits_c^d v\left(t\right)dt > \Phi^-\left(\alpha,c\right) + \Phi^+\left(d,\beta\right), \tag{2}$$

то уравнение (1) сопряжено на (α,β).

Следствие 1. Пусть $a \le \alpha < \beta \le b$. Если $\exists$ точки $c,d : \alpha < c < d < \beta$ такие, что

$$\int\limits_c^d v\left(t\right)dt > \varphi^-\left(\alpha,c\right) + \varphi^+\left(d,\beta\right), \tag{3}$$

то уравнение (1) сопряжено на (α,β).

Доказательство теоремы. Пусть $\alpha < c < d < \beta$ и выполняется (3). Тогда по определению $\exists$ точки $z^- \in \left(\alpha,c\right)$ и $z^+ \in \left(d,\beta\right)$ такие, что имеет место неравенство

$$\int\limits_c^d v\left(t\right)dt \ge \left(\int\limits_{z^-}^c \rho^{-1}ds\right)^{-1} - \left(\int\limits_{z^-}^c \rho^{-1}ds\right)^{-2}\int\limits_{z^-}^c v\left(t\right)\left(\int\limits_{z^-}^t \rho^{-1}ds\right)^2 dt +$$

$$+\left(\int_d^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^{-1}-\left(\int_d^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_d^{z^+}v(t)\left(\int_t^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^2 dt$$

или

$$\left(\int_{z^-}^{c}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_{z^-}^{c}v(t)\left(\int_{z^-}^{t}\rho^{-1}ds\right)^2 dt+$$

$$+\int_c^d v(t)\,dt+\left(\int_d^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_d^{z^+}v(t)\left(\int_t^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^2\geq$$

$$\geq\left(\int_{z^-}^{c}\rho^{-1}ds\right)^{-1}+\left(\int_d^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^{-1}, \tag{4}$$

Введем функцию

$$f_0(t)=\begin{cases}0, & \alpha<t<z^-,\\ \left(\int_{z^-}^{c}\rho^{-1}ds\right)^{-1}\int_{z^-}^{t}\rho^{-1}ds, & z^-\leq t<c,\\ 1, & c<t<d,\\ \left(\int_d^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^{-1}\int_t^{z^+}\rho^{-1}ds, & d\leq t\leq z^+,\\ 0, & z^+<t<\beta.\end{cases} .$$

Очевидно, что $f_0\grave{o}A^0C_{2,\rho}(\alpha,\beta)$.

Вычислим интегралы

$$\int_\alpha^\beta\rho(t)\left|f_0^{'}(t)\right|^2 dt \quad u \quad \int_\alpha^\beta v(t)\left|f_0(t)\right|^2 dt;$$

$$\int_\alpha^\beta\rho(t)\left|f_0^{'}(t)\right|^2 dt=\int_{z^-}^{c}\rho(t)\left|f_0^{'}(t)\right|dt+\int_c^d\bar{a}(t)\left|f_0^{'}(t)\right|^2 dt+\int_d^{z^+}\rho(t)\left|f_0^{'}(t)\right|dt=$$

$$=\left(\int_{z^-}^{c}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_{z^-}^{c}\rho(t)\rho^{-2}(t)\,dt+\left(\int_d^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_d^{z^+}\rho(t)\rho^{-2}(t)\,dt=$$

$$=\left(\int_{z^-}^{c}\rho^{-1}ds\right)^{-1}+\left(\int_d^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^{-1}, \tag{5}$$

$$\int_\alpha^\beta v(t)\left|f_0(t)\right|^2 dt=\int_{z^-}^{c}v(t)\left|f_0(t)\right|^2 dt+\int_c^d v(t)\left|f_0(t)\right|^2 dt+\int_d^{z^+}v(t)\left|f_0(t)\right|^2 dt=$$

$$=\left(\int_{z^-}^{c}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_{z^-}^{c}v(t)\left(\int_{z^-}^{t}\rho^{-1}ds\right)^2 dt+$$

$$+\int_c^d v(t)dt+\left(\int_d^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_d^{z^+}v(t)\left(\int_t^{z^+}\rho^{-1}ds\right)^2 dt.$$

Из (4),(5) и (6) следует, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} v(t)\left| f_0(t)\right|^2 dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \rho\left(t\right)\left| f_0'(t)\right|^2 dt, \tag{6}$$

то есть

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[\rho\left(t\right)\left| f_0^{'}(t)\right|^2 - v(t)\left| f_0(t)\right|^2\right]dt \leq 0$$

для f_0ò$A^0C_{2,\rho}\left(\alpha,\beta\right)$.

Поэтому по лемме А уравнение (1) имеет сопряженные точки на $\left(\alpha,\beta\right)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. $\forall z \in \left(\alpha, c\right)$ имеем

$$\left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-1} + \int_z^c v_-\left(t\right)dt \geq \left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-1} +$$

$$+\left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_z^c v_-\left(t\right)\left(\int_z^t \rho^{-1}ds^{-1}\right)^2 dt \geq$$

$$\geq \left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-1} - \left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_z^c v_+\left(t\right)\left(\int_z^t \rho^{-1}ds\right)^2 dt + \left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_z^c v_-\left(t\right)\left(\int_z^t \rho^{-1}ds\right)^2 dt = \left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-1} - \left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_z^c\left(v_+\left(t\right) - v_-\left(t\right)\right)\left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^2 dt =$$

$$= \left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-1} - \left(\int_z^c \rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_z^c v\left(t\right)\left(\int_t^c \rho^{-1}ds\right)^2 dt.$$

Следовательно, $\varphi^-\left(\alpha, c\right) \geq \Phi^-\left(\alpha, c\right)$, аналогично, $\varphi^+\left(\alpha, c\right) \geq \Phi^+\left(\alpha, c\right)$. Поэтому из (3) следует (2), тогда по теореме 1 уравнение (1) сопряжено на $\left(\alpha,\beta\right)$. Следствие 1 доказано.

Теорема 2. Пусть $\int_d^b \rho^{-1}ds < \infty,\ d \in I,$ и существует

$$\lim_{y\to b}\int_d^y v(t)\left(\int_t^y \rho^{-1}ds\right)^2 dt = \int_d^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{-1}ds\right)^2 dt. \tag{7}$$

Если для любого $c \in J$

$$\lim_{d\to b} sup\left[\left(\int_d^b \rho^{-1}ds\right)\int_c^d v(t)dt + \left(\int_d^b \rho^{-1}ds\right)^{-1}\int_d^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{-1}ds\right)^2 dt\right] > 1, \tag{8}$$

то уравнение (1) осцилляторно при $t = b.$

Доказательство. Для $c \in J$ по определению *limsup* существует последовательность $\left\{d_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left(c, b\right)$ сходящаяся к b такая, что при $k \geq k_0 \geq 1$

$$\left(\int_{d_k}^b \rho^{-1}ds\right)\int_c^{d_k} v(t)dt + \left(\int_{d_k}^b \rho^{-1}ds\right)^{-1}\int_{d_k}^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{-1}ds\right)^2 > 1. \tag{9}$$

Берем k_0 столь большим, чтобы для $\alpha \in \left(a, c\right)$ еще выполнялось неравенство

$$\left(\int_{d_k}^b \rho^{-1}ds\right)\int_c^{d_k} v(t)dt + \left(\int_{d_k}^b \rho^{-1}ds\right)^{-1}\int_{d_k}^b v\left(t\right)\left(\int_t^b \rho^{-1}ds\right)^2 dt >$$

$$>1+\left(\int_{d_k}^{b}\rho^{-1}ds\right)\Phi^{-}(\alpha,c)$$

при $k\geq k_0$, так как

$$\lim_{d\to b}\int_{d}^{b}\rho^{-1}ds=0.$$

Откуда

$$\int_{c}^{d_k}v(t)\,dt>\left(\int_{d_k}^{b}\rho^{-1}ds\right)^{-1}-\left(\int_{d_k}^{b}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\times$$

$$\times\int_{d_k}^{b}v(t)\left(\int_{t}^{b}\rho^{-1}ds\right)^{2}dt+\Phi^{-}(\alpha,c). \tag{10}$$

В силу условия

$$\int_{d_k}^{b}\rho^{-1}ds<\infty \quad и\ (7) имеем$$

$$\left(\int_{d_k}^{b}\rho^{-1}ds\right)^{-1}-\left(\int_{d_k}^{b}\rho^{-1}ds\right)^{-2}\int_{d_k}^{b}v(t)\left(\int_{t}^{b}\rho^{-1}ds\right)^{2}dt\geq\Phi^{+}(d_k,b).$$

Поэтому из (10) следует

$$\int_{c}^{d_k}v(t)\,dt>\Phi^{-}(\alpha,c)+\Phi^{+}(d_k,b),\quad k\geq k_0.$$

В силу произвольности $c\in J$ и $\alpha\in(a,c)$ это означает, что уравнение (1) в силу теоремы 1 имеет сопряженные точки на (α,b) для любого $\alpha\in J,$ следовательно, по теореме А уравнение осцилляторно при $t=b.$ Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай

$$\int_{d}^{b}\rho^{-1}ds=\infty,\qquad d\in J. \tag{11}$$

Положим

$$\lim_{d\to b}\int_{c}^{d}v(t)dt=\int_{c}^{b}v(t)dt,\qquad c\in J. \tag{12}$$

Теорема 3. Пусть выполнено условие (11), а также существует и конечно пределы (7) и (12). Если

$$\lim_{\alpha\to b}\sup_{b>c>\alpha}\left[\left(\int_{\alpha}^{c}\rho^{-1}ds\right)\int_{c}^{b}v(t)\,dt+\left(\int_{\alpha}^{c}\rho^{-1}ds\right)^{-1}\int_{\alpha}^{c}v(t)\left(\int_{\alpha}^{t}\rho^{-1}ds\right)^{2}dt\right]>1, \tag{13}$$

то уравнение (1) осцилляторно при $t=b.$

Литература:

1. Dosly O., Rehak P. Half-Linear Differential Equations, North – Holland, Math.Studies 202, 2005.

2. Oinarov R., Rakhimova S. Y. Weighted Hardy inequalities and their application to oscillation theory of half-linear differential equation, Eurasian Math. J., 2010, V.1, №42, P.99 – 110.

3. Oinarov R., Rakhimova S. Y. Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order, E.J. Qualitative Theory of Diff.Equ., Hungary, 2010, №49, P.1 – 15.

4. Кудабаева С.Е., Ойнаров Р. Сопряженность и осцилляторность полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Математический журнал. – 2011. - Т.11. - №2(40). – С.42-49.

Резюме

С помощью вариационного метода получен критерий сопряженности дифференциального уравнения Штурма – Лиувилля. Тем же методом установлен осцилляторность уравнения Штурма – Лиувилля. Установлена сопряженность уравнения при ограниченности потенциала снизу. Доказана теорема об осцилляторности при существовании пределов от интегральных выражений.

Ключевые слова: Сопряженность, осциллярность, уравнение Штурма – Лиувилля, вариационный принцип, компактный носитель.

Түйіндеме

Вариациалық әдіс көмегімен Штурм – Лиувилль дифференциалдық теңдеуінің түйіндестігі критериі алынды. Сол әдіспен Штурм – Лиувилль теңдеуінің осцилляторлығы белгіленді. Потенциалдың төменнен шенелген жағдайында түйіндестігі орнықтырылды. Интегралды өрнектердің шегі болған жағдайда осцилляторлық туралы теорема дәлелденді.

Кілт сөздер: Қарсыластық, осциляторлық, Штурм-Лиувилль теңдеуі, вариациялық бірінсеп, ықшам тұтынушы.

Summary

The criterion of an conjugation of the differential equation of sturm – Liouville is received. By the same method it is established an oscillator of the equation of Storm – Liouville. The equation associativity is established at limitation of potential from below. The theorem of an oscillator is proved at existence of limits from integrated expressions.

Key words: conjugatien, oscillator, the shturm equation – Liouville, the variation principle, the compact carrier.

УДК 517.925

О МОДЕЛЬНЫХ РАССТОЯНИЯХ И СТЕПЕНЯХ НЕДОСТОВЕРНОСТИ В МНОГОЗНАЧНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЯХ ЭКСПЕРТОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ПРОБЛЕМАХ РАСПОЗНАВАНИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИИ

А. А. ВИКЕНТЬЕВ, кандидат физико-математических наук, доцент,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия

1. Введение

В данной работе для формул n-значной логики предлагаются способы задания мер близости (расстояний, метрик) и степеней недостоверности с помощью многозначных моделей. Степень недостоверности возникла как аналог меры опровержимости. В многозначном случае промежуточные значения истинности можно рассматривать как степени достоверности, а через число таких моделей и тех, в которых формула ложна, выражается степень недостоверности. Этот подход расширяет и обобщает ранее рассмотренные в [1-3,9,14] случаи для $n = 2;3$. Значения истинности формул можно (в частности) рассматривать как доли истинности, как их возможные (в частности, субъективные) вероятности, согласованные с таблицами истинности. Наконец, как значения оценки ошибочности формулы-высказывания (полученного от эксперта) в интерпретации, которую предложил и изучал Д. Скотт и другие [4]. Выбор интерпретации зависит от решаемой задачи. В статье рассматриваются подробно формулы многозначной логики Лукасевича для любого натурального n>2 [4]. Заметим, что не все доказанные в [1,9] результаты переносятся на общий случай. Числа n-s, k и другие определяемые ниже параметры можно рассматривать как коэффициенты для адаптации и оптимизации вводимых расстояний и мер недостоверности. Для привлечения вероятностных логических высказываний экспертов к построению решающих функций нужны способы вычислений расстояний между такими знаниями. В настоящее время проявляется большой интерес к построению решающих функций [1-2,13,15], а также на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний нескольких экспертов, реализации процессов адаптации и согласования высказываний [1,2, 4-12, 15]. Если высказывания экспертов представлены в виде формул n-значной табулированной логики (например, логики Лукасевича и других из [4]), то полученные результаты применимы к ним. Предлагаемые здесь расстояния и меры недостоверности могут быть использованы для решения различных проблем в области распознавания образов и искусственного интеллекта. Проведен анализ причин возникновения аварийных ситуаций при автоматической заправке емкости. Для формул (конкретных отказах) исследовано поведение расстояний и указана работоспособность степени недостоверности на формулах—высказываниях.

2 **Постановка задачи и предварительные сведения**

В монографии Г.С. Лбова и Н.Г. Старцевой [1], работах Н.Г. Загоруйко [2] и первоначальной статье [9] рассматривался и решался вопрос об определении расстояния между формулами исчисления высказываний (ИВ) с помощью привлечения малой теории моделей в [1-3, 9, 14]. В данной работе будут рассмотрены способы введения расстояний на n-значных (с n значениями истинности) формулах, для которых можно (точнее, для классов эквивалентных формул) доказать свойства метрики. Хотелось бы иметь характеристику информативности формул для ранжирования многозначных высказываний как в [1, 9]. Для этой цели прозвольной многозначной формуле будет сопоставлена мера (степень) ее недостоверности, отражающая частость ложности формулы в моделях или недостаточную истинность формулы (высказывания эксперта) в используемых моделях. Изучаются и устанавливаются полезные свойства меры недостоверности. При этом представляют интерес модели, в которых формулы истинны или ложны. Введенная мера позволит, в частности, по ее значению на формуле косвенно судить о наличии и количестве моделей данной теории, в которых они будут ложными.

Пусть p, q, r с индексами или без них суть пропозициональные переменные; $\neg$, $\to$ -- логические связки, а скобки (,) – вспомогательные символы. Определим понятие формулы. Элементарными формулами будем считать

p, q, r, …; если A и B – формулы, то 1) $\neg$A --формула и 2) $A \to B$ - формула;

Никакие другие конечные последовательности исходных символов, кроме тех, что построены в соответствии с пунктами 1) - 2), не являются формулами.

Посредством исходных связок определяются другие логические связки:

$$p \vee q = (p \to q) \to q \qquad \text{(дизъюнкция)},$$

$$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad \text{(конъюнкция)},$$

$$p \equiv q = (p \to q) \wedge (q \to p) \qquad \text{(эквивалентность)}.$$

Матрица вида $M_n^L = < V_n, \neg, \to, \{1\} >$ называется n-значной матрицей Лукасевича ($n \in N, n \geq 2$), где $V_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., \frac{n-2}{n-1}, 1\}$; $\neg$ есть унарная и $\to$ бинарная операция импликации, определенные на множестве V_n следующим образом:

$\neg x = 1 - x,$ $\quad x \to y = \min(1x,$ Операции дизъюнкции и конъюнкции вводятся следующим образом: $x \vee y = (x \to y) \to y = \max(x; y),$ $\quad x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = \min(x, y).$

Далее для упрощения обозначений, рядом с формулой (подстрочно) будем указывать ее значение истинности в подходящей модели [9].

3 **Определение расстояния на n-значных формулах**

Дадим сначала необходимые определения и обозначения.

Определение 1. Множество элементарных высказываний $S^n(\varphi)$, используемых при написании формулы (многозначной логики) φ, назовем *носителем формулы* φ.

Определение 2. Объединение носителей формул ($S^n(\Sigma)$), входящих в множество формул Σ, назовем *носителем совокупности формул* Σ, т.е. $S^n(\Sigma) = \bigcup\limits_{\varphi \in \Sigma} S^n(\varphi)$.

Определение 3. Совокупность $Q^n(\Sigma) = \{\varphi_{\frac{k}{n-1}} \mid \varphi \in S(\Sigma), k = 1,.., n-1\}$ назовем *множеством возможных значений (истинности) носителей* формул. Нижний индекс у элементарной формулы указывает ее значение истинности в n-значной логике.

Определение 4. *Моделью* М назовем любое подмножество $Q^n(\Sigma)$ такое, что М не содержит одновременно формул $\varphi_{\frac{k}{n-1}}$ и $\varphi_{\frac{l}{n-1}}$ для всех различных k, l и любого носителя $\varphi \in S(\Sigma)$.

Множество всех моделей будем обозначать $P^n(S(\Sigma))$.

Для упрощения записи, верхний индекс в обозначения, означающий значность высказывания, будем часто опускать, когда из контекста ясно чему оно равно.

Лемма 1 . (о мощности множества моделей $P^n(S(\Sigma))$). Общее число моделей n-значной логики с конечным множеством носителей равно $|P(S(\Sigma))| = n^{|S(\Sigma)|}$.

Доказательство. Докажем лемму методом математической индукции.

Пусть $S(\Sigma) = \{A\}$; $|S(\Sigma)| = 1$. Тогда $P(S(\Sigma)) = \{\{A\}, \{A_{\frac{n-2}{n-1}}\}, .., \{A_{\frac{1}{n-1}}\}, \varnothing\}$ и $|P(S(\Sigma))| = n$.

Пусть утверждение леммы верно для $S(\Sigma) = \{A^1, A^2, .., A^{k-1}\}$, $|S(\Sigma)| = k-1$. Тогда $|P(S(\Sigma))| = n^{|S(\Sigma)|}$.

Докажем утверждение леммы для $S(\Sigma') = \{A^1, A^2, ...A^k\}$, $|S(\Sigma')| = k$. Из того, что верно равенство

$$P(S(\Sigma')) = P(S(\Sigma)) \cup$$

$$\cup \{M \cup \{A_1^k\} \mid M \in P(S(\Sigma))\} \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma)) \cup .. \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma))\}\},$$

получим включение $P(S(\Sigma')) \supseteq P(S(\Sigma)) \cup$

$\cup \{M \cup \{A_1^k\} \mid M \in P(S(\Sigma))\} \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma)) \cup .. \cup \{M\{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma))\}\}$. Докажем обратное включение. Пусть $M \in P(S(\Sigma'))$, тогда если $A_l^k \in M$, где $l \in \{\frac{n-1}{n-1}, \frac{n-2}{n-1}, ..., 0\}$, то $M \setminus A_l^k \in P(S(\Sigma))$; если $A_l^k \notin M$, то $M \in P(S(\Sigma))$. Следовательно, $P(S(\Sigma')) \subseteq P(S(\Sigma)) \cup$ $\cup \{M \cup \{A^k\} \mid M \in P(S(\Sigma))\} \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma))\} \cup .. \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma))\}\}$. Значит, верны равенства

$$|P(S(\Sigma'))| = |P(S(\Sigma))| + |P(S(\Sigma))| + ... + |P(S(\Sigma))| =$$

$$= n|P(S(\Sigma))| = n * n^{|S(\Sigma)|} = n^{|S(\Sigma)|+1} = n^{|S(\Sigma')|}$$

Что и требовалось доказать.

Дадим определения значений истинности формул на модели.

Определение 5 . Элементарная формула--переменная A *принимает на модели* M *значение* $\frac{k}{n-1}$, где $k = 1, ..., n-1$, если $A_{\frac{k}{n-1}} \in M$, т.е. $M \models A_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow A_{\frac{k}{n-1}} \in M$.

Определение 6 . Элементарная формула--переменная A *принимает на модели* M *значение* 0, если $A_{\frac{k}{n-1}} \notin M$ для всех $k = 1, .., n-1$.

Далее, используя определения истинностных значений формул для логики Лукасевича, получаем:

3) $M \models (A \& B)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow (M \models A_{\frac{p}{n-1}}$ и $M \models B_{\frac{q}{n-1}})$, где $\min(p, q) = k$

4) $M \models (A \vee B)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow (M \models A_{\frac{p}{n-1}}$ и $M \models B_{\frac{q}{n-1}})$, где $\max(p, q) = k$

5) $M \models (\neg A)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow M \models A_{\frac{n-1-k}{n-1}}$

Во всех остальных случаях формулы принимают значения 0.

Для формулировки других свойств, введем обозначения:

$Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} = \{M \mid M \in P(S(\Sigma)), M \models A_{\frac{k}{n-1}}\}$ -- подмножество моделей, на которых формула A принимает значение k/(n-1) и

$Mod_{S(\Sigma)}(A_0) = \{M \mid M \in P(S(\Sigma)), M \not\models A_{\frac{k}{n-1}}, для k = 1,...,n-1\}$ -- подмножество моделей, на которых формула A ложна.

Сформулируем важные для дальнейшего теоретико-модельные свойства:

Лемма 2 .

1) $Mod_{S(\Sigma)}((A \& B)_{\frac{k}{n-1}}) =$

$$= \bigcup_{p=k}^{n-1}((Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{p}{n-1}} \cap Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{k}{n-1}}) \cup (Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} \cap Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{p}{n-1}});$$

2) $Mod_{S(\Sigma)}((A \vee B)_{\frac{k}{n-1}}) =$

$$= \bigcup_{p=0}^{k}((Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{p}{n-1}} \cup Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{k}{n-1}}) \cup (Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} \cup Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{p}{n-1}};$$

3) $Mod_{S(\Sigma)}(\neg A)_{\frac{k}{n-1}} = Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{n-1-k}{n-1}};$

4) $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} = P(S(\Sigma)) \setminus Mod_{S(\Sigma)}(\neg A)_1$

Таким образом, любой формуле φ такой, что $S(\varphi) \subseteq S(\Sigma)$ соответствует совокупность $Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}$, $k = 1,...,n-1$ -- моделей из $P(S(\Sigma))$, на которых формула φ принимает значения $\frac{k}{n-1}$, $k = 1,...,n-1$ соответственно.

Определение 7 . Назовем формулы φ и ψ *эквивалентными* (далее коротко $\varphi \equiv \psi$), если $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}$. Это отношение на формулах будет *отношением эквивалентности*. У таких эквивалентных формул всегда совпадают множество моделей, где они принимают значение 0. Очевидно, что формулы будут эквивалентны, если они имеют одно и тоже множество моделей для каждого k (более тонкая эквивалентность). И в этом случае можно ввести расстояние с весами для каждого k, слегка модифицируя (см. ниже замечание 1) следующее определение.

Определение 8. ***Расстоянием*** между формулами φ и ψ (при условии $S(\varphi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$) на множестве моделей $P(S(\Sigma))$ n-значной логики назовем нормированную обобщенную симметрическую разность, т.е. величину

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Замечание 1. Это расстояние является естественным обобщением расстояния для 2-значной логики. Поясним смысл первого слагаемого в числителе формулы. В нем подсчитывается число моделей формулы φ с различными ненулевыми истинностными значениями, а формула ψ при этом должна быть ложной. Аналогично интерпретируется второе слагаемое с заменой индексов у формул φ и ψ. По сути своей сумма в числителе выражения дает некоторую симметрическую разность всех моделей для этих двух формул.

Очевидно, что нижнее значение k в объединении можно варьировать: заменить его на подходящее разумное с точки зрения экспертов число s: n-1>s>1, при этом формулируемые далее свойства расстояний и их доказательства не изменятся. Ввиду громозкости общего случая далее приводим только случай k=s=1. Этот подход применим и к случаю когда рассматриваются не только ложные значения для второй из формул в модели, а и с маленькими значениями истинности (близкими к 0). Аналогичное замечание для параметров справедливо при определении меры недостоверности. Более общее расстояние получится, если вводить расстояние как выше, но с коэффициентами- весами a(i), определяемые экспертом

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a(k)\,|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)\,|+\sum_{k=1}^{n-1}a(k)\,|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})\,|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Тот факт, что это расстояние следует из других соображений, но в такой формуле более адекватно учитывается вес моделей соответственно значению истинности на ней формулы. Далее здесь, для простоты, рассматриваем случай, когда все коэффициенты, как в определении 8, равны 1.

4 Свойства расстояния

Теорема **1.** (о свойствах расстояния $\rho_{S(\Sigma)}$). Для любых формул φ,ψ таких, что $S(\varphi)\cup S(\psi)\subseteq S(\Sigma)$ справедливы следующие утверждения:

1) $0\le\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)\le 1$;

2) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=\rho_{S(\Sigma)}(\psi,\varphi)$;

3) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=0\Leftrightarrow\varphi\equiv\psi$;

4) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=1\Leftrightarrow\bigcup_{l=1}^{n-1}\bigcup_{k=1}^{n-1}(Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\oplus Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}})=P(S(\Sigma))$, где $\oplus$ -- прямое объединение;

5) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)\le\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\chi)+\rho_{S(\Sigma)}(\chi,\psi)$;

6) Если $\varphi^1\equiv\varphi^2$, то $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi^1,\psi)=\rho_{S(\Sigma)}(\varphi^2,\psi)$.

Доказательство проводим для каждого пункта.

1) Очевидно, что $0<\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)<1$. Верхняя и нижняя границы достижимы. Приведем примеры формул, на которых они достигаются:

- $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\varphi)=0$;

- Пусть φ - формула, не принимающая промежуточные значения $\frac{k}{n-1},\quad k=1,\dots,n-2$, то $\neg\varphi$ - также не принимает значения $\frac{k}{n-1},\quad k=1,\dots,n-2$. Тогда $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\neg\varphi)=1$.

2) Данное свойство следует из определения расстояния и симметричности связок.

3) Докажем необходимость. Нетрудно понять, что

$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=0\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\,|+|\,Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}\,|)-2\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{p}{n-1}}\&\psi_{\frac{q}{n-1}})\,|=0,\ \text{или}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\,|+|\,Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}\,|=2\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{p}{n-1}}\&\psi_{\frac{q}{n-1}})\,|;\tag{1}$$

Очевидно, что $\sum_{k=1}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\,|=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{s}{n-1}})\,|$; аналогично

$$\sum_{k=1}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}\,|=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{s}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})\,|;$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}(|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\,|+|\,Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}\,|)=2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{s}{n-1}})\,|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)\,|+\sum_{k=1}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})\,|.\tag{2}$$

Вычитая (1) из (2), получим $\sum_{k=1}^{n-1}(|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)\,|+|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})\,|)=0$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}|\,Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)\,|=0\quad\Rightarrow\quad\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\subseteq\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}},\tag{3}$$

по симметрии имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{s(\Sigma)}(\varphi_0 \,\&\, \psi_{\frac{k}{n-1}})|=0 \;\Rightarrow\; \bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \supseteq \bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}}\ . \tag{4}$$

Следовательно из (3), (4) получаем необходимое $\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}=\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{s(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}} \Rightarrow \varphi\equiv\psi$.

Докажем обратное: если $\varphi\equiv\psi$, то $\rho(\varphi,\psi)=0$. По определению $\varphi\equiv\psi$ означает, что $\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}=\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}$. Тогда $\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\subseteq\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}} \Rightarrow$ $Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_0)=\varnothing$. Очевидно, что справедливы импликации

$|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_0)|=0$ для любых $k \Rightarrow |Mod(\varphi_0\,\&\,\psi_{\frac{k}{n-1}})|=0$ для любых k;

$$\Rightarrow \rho(\varphi,\psi)=\frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_0)|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\varphi)|}{n^{|S(\Sigma)|}}=0.$$ Что и требовалось.

4) Ясно, что $$\rho(\varphi,\psi)=1 \Leftrightarrow |\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_0)|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\,\&\,\psi_{\frac{k}{n-1}})|=n^{|S(\Sigma)|} \tag{5}$$

и, рассматривая всевозможные случаи для определения числа всех моделей, имеем

$$n^{|S(\Sigma)|}=|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_0)|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\varphi_0)|+$$
$$+|\bigcup_{p=1}^{n-1}\bigcup_{q=1}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{p}{n-1}}\,\&\,\psi_{\frac{q}{n-1}})|+|Mod(\varphi_0\,\&\,\psi_0)|\ . \tag{6}$$

Из (5)-(6) получаем, что: $\bigcup_{p=1}^{n-1}\bigcup_{q=1}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{p}{n-1}}\,\&\,\psi_{\frac{q}{n-1}})|+|Mod(\varphi_0\,\&\,\psi_0)|=0$,

т.е. φ и ψ одновременно не принимают значение 0. Если φ принимает значение не 0, то значение ψ обязательно равно 0, поэтому, $\bigcup_{l=1}^{n-1}\bigcup_{k=1}^{n-1}(Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\oplus Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}})=P(S(\Sigma))$. То есть модели $Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}$ для $k=1,...,n-1$ и модели $Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}}$ для $l=1,...,n-1$ образуют непересекающие множества, причем их объединение заполняет все рассматриваемое пространство моделей.

5) Докажем неравенство треугольника. По определению расстояний, простыми преобразованиями над выражениями, получим верные импликации и, в конце, требуемое

$$\rho(\varphi,\chi)=\frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\chi_0)|+\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_0\,\&\,\chi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$

$$\rho(\varphi,\psi)=\frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_0)|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_0\,\&\,\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$

$$\rho(\varphi,\chi)=\frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\chi_0)|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi_0\,\&\,\chi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$

$Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\chi_0)=\bigcup_{l=0}^{n-1}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\chi_0\,\&\,\psi_{\frac{l}{n-1}})$. Следовательно

$$\rho(\varphi,\chi)n^{|S(\Sigma)|}=|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\chi_0\,\&\,\psi_{\frac{l}{n-1}})|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\varphi_0\,\&\,\chi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_{\frac{l}{n-1}})|\ ,$$

$$\rho(\varphi,\psi)n^{|S(\Sigma)|}=|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0\&\chi_{\frac{l}{n-1}})|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_{\frac{l}{n-1}})|,$$

$$\rho(\psi,\chi)n^{|S(\Sigma)|}=|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\varphi_{\frac{l}{n-1}})|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\psi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\varphi_{\frac{l}{n-1}})|,$$

$$\rho(\varphi,\chi)n^{|S(\Sigma)|}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\psi_{\frac{l}{n-1}})|+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\varphi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{l}{n-1}})|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\psi_0)|+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\varphi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|,$$

$$\rho(\varphi,\psi)n^{|S(\Sigma)|}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0\&\chi_{\frac{l}{n-1}})|+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_{\frac{l}{n-1}})|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0\&\chi_0)|+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\varphi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|,$$

$$\rho(\psi,\chi)n^{|S(\Sigma)|}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\varphi_{\frac{l}{n-1}})|+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\psi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\varphi_{\frac{l}{n-1}})|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\varphi_0)|+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\psi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\varphi_0)|.$$

Неравенство $\rho(\varphi,\chi)\le\rho(\varphi,\psi)+\rho(\psi,\chi)$ легко следует из полученных равенств;

6) Эквивалентность $\varphi^1\equiv\varphi^2$ означает, что $\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi^1)_{\frac{k}{n-1}}=\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi^2)_{\frac{k}{n-1}}$ $\Rightarrow$(ограничивая на одно и то же множество) имеем $\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi^1_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)=\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi^2_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)$, оставшееся аналогично и равенство расстояний доказано.

Замечание 2. Из Теоремы 1 следует, что на классах эквивалентности n-значных формул можно задать метрику. Введенное расстояние рассматривается на множестве $P^n(S(\Sigma))$ всех моделей. Так как доказательства не используют свойств всего множества моделей, то расстояние можно рассматривать на любом осмысленном подмножестве всех моделей, если это необходимо или вытекает из условий конкретной задачи. Вычисление расстояний можно упростить, поскольку носители формул—высказываний часто составляют небольшое подмножество всех носителей формул. Работая с моделями над этим подмножеством носителей, упростятся необходимые подсчеты. Следующая теорема доказывает возможность упрощения.

Теорема 2 (об инвариантности расстояния при расширении носителей). Для любых $S(\Sigma_0)$ и $S(\Sigma_1)$ таких, что $S(\varphi)\cup S(\psi)\subseteq S(\Sigma_0)\subseteq S(\Sigma_1)$ имеет место равенство $\rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi)=\rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi)$.

Доказательство. Рассмотрим $S(\Sigma_1)=S(\Sigma_0)\cup\{\chi\},\quad \chi\notin S(\Sigma_0)$. При этом

$$P(S(\Sigma_1))=P(S(\Sigma_0))\cup(\bigcup_{k=1}^{n-1}\{M\cup\{\chi_{\frac{k}{n-1}}\}\,|\,M\in P(S(\Sigma_0))\})\ \text{ и }\ |P(S(\Sigma_1))|=n\,|P(S(\Sigma_0))|.$$

Также верно $|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi)|=n\,|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|$. Таким образом, верна

$$P(S(\Sigma_1))=\overbrace{\underbrace{P(S(\Sigma_0))}_{1}\cup\underbrace{\bigcup_{k=1}^{n-1}\underbrace{\{M\cup\{\chi_{\frac{k}{n-1}}\}\,|\,M\in P(S(\Sigma_0))\}}_{1}}_{n-1}}^{n}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi)=\frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_0)|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_0\,\&\,\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma_1)|}}=$$

$$=\frac{n|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\,\&\,\psi_0)|+n|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_0\,\&\,\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n\cdot n^{|S(\Sigma_0)|}}=\rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi).$$

Пусть теперь $|S(\Sigma_1)\setminus S(\Sigma_0)|=|\{A^1,...,A^m\}|=m\geq 1$. Тогда

$\rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi)=\rho_{S(\Sigma_0)\cup\{A^1\}}(\varphi,\psi)=...=\rho_{S(\Sigma_0)\cup\{A^m\}}(\varphi,\psi)=\rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi)$,

что и требовалось доказать.

Замечание 3. Упрощение вычисления расстояний состоит в уменьшении числа носителей и числа рассматриваемых моделей. При поиске способов задания расстояния было рассмотрено большое количество других вариантов, отличные от предложенных, но для них свойства метрики не выполнялись. Заметим, что если использовать более тонкое определение эквивалентности, в формуле расстояния можно вместо индекса 0 взять и другие значения истинности, и, соответственно, поменяв множество индексов суммирования, получим другое расстояние между формулами, по выделенному этому значению. Затем, взяв усредненную сумму всех таких расстояний с подходящими весами, получим новое расстояние, более полно учитывающее все значения истинности формул. Эту метрику тоже можно использовать при кластеризации множеств таких высказываний.

5. Определение меры недостоверности n-значных формул

Истинная формула на модели является достоверной и поэтому не может быть недостоверной. Ложная формула на модели не является достоверной и значит недостоверна. Формула с промежуточным значением истинности является частично недостоверной. Это согласовывается также с интерпретацией промежуточных значаний истинности М. Берда- А. Карпенко [4] через 0 и 1. Из сказанного следует, что вводимая степень недостоверности определяется частью моделей, где значения формулы не являются истинными. Подход к определению меры недостоверности в n-значном случае отражает вклад (в недостоверность) значений истинности формулы, не включая 1. Он основан на свойстве таких значений истинности формулы: чем больше (частота) моделей на которых данное высказывание принимает не истинное (не равное 1) значение, то тем меньше (частота) моделей, где оно истинно (в данной изучаемой теории) . При условии истинности формулы (а это нам важно) на некоторой модели (некоторой теории), и чем больше моделей на которых она недостоверна, тем меньше моделей где она истинна. Если на многих моделях формула недостоверна, то число моделей у нового расширения теории (теории с добавленной этой формулой) будет существенно меньше. Тогда мера недостоверности будет, естественно, выше. Частоты моделей, в которых значения истинности формулы не равны 1, предлагается учитывать с весами, пропорциональными ее ложности (неверности). Поэтому число моделей с меньшими значениями истинности формулы следует учитывать с большим коэффициентом-весом. Перейдем к формальному определению. Меру недостоверности $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$ для формулы из $\Phi(\Sigma)=\{\varphi\,|\,S(\varphi)\subset S(\Sigma)\}$ n-значной логики зададим в виде

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Параметры α_i в формуле (в общем случае) монотонно не возрастают с ростом индекса суммирования. Например, при нечетном n можно взять такими:

$$\begin{cases}0\leq\alpha_i\leq 1;\\ \alpha_i+\alpha_{n-1-i}=1\,для любых i=0,...,\dfrac{n-1}{2};\\ \alpha_k\geq\alpha_i\ для любых k\leq i.\end{cases}$$

Существование таких параметров очевидно. Отмеченные соотношения вытекают, например, из свойств интерпретаций для n-значной логики Лукасевича.

Замечание 4. В случае n=2 и α_i=1 получаем меру опровержимости как в [1, 9] . В общем случае вместо n-2 можно рассматривать n-s (s вместо 2-ки), где s больше 1, но меньше n-1 (что соответствует равенству 0 соответствующих весов для моделей с большим (например, 0.6) значением истинности формулы (пренебрегая, если это допустимо, малым числом моделей, где она не истинна). В приведенном определении s=2. В приложениях все фигурирующие в определении параметры являются адаптируемыми и оптимизируемыми по найденным критериям качества в конкретной задаче. Возможен и другой специальный выбор параметров в формуле, при котором введенная мера недостоверности будет равна расстоянию от истинной формулы, но об этом будет другая работа.

6 Свойства меры недостоверности

Теорема **3.** (о свойствах меры $I_{S(\Sigma)}$). Для любых формул $\varphi, \psi \in \Phi(\Sigma)$ верно

1) $0 \le I_{S(\Sigma)}(\varphi) \le 1$;
2) $I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\varphi) = 1$;
3) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi) \ge \max\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
4) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \le \min\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
5) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) + I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi) = I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\psi)$.

Доказательство проводится для каждого пункта при s=2.

1) Неравенство очевидно, т.к. $Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})$ попарно не пересекаются, а в объединении дают все множество $P(S(\Sigma))$. Свойство 1) доказано.

2) $I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\varphi) =$ (расписывая и переставляя слагаемые)

$$= \alpha_0 \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0)|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \alpha_{n-1} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_1)|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \sum_{i=1}^{n-2}(\alpha_i + \alpha_{n-1-i}) \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} = \frac{|P(S(\Sigma))|}{n^{|S(\Sigma)|}} = 1$$

.

3) Распишем по определению степени недостоверности для $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$, $I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi)$ и получим равенства:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}((\varphi \& \psi)_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i (\sum_{k=i}^{n-1} (\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}})) - \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$$

. (7)

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=i}^{n-1} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=0}^{i} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} -$$

$$-\alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}. \qquad (8)$$

Вычитая (8) из (7), получаем:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi) - I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=i}^{n-1} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} - \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=i}^{n-1} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$$

=

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{i}(\alpha_k-\alpha_i)\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=i}^{n-1}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}\geq 0.$$

Получили, что $I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi)\geq I_{S(\Sigma)}(\varphi)$. Аналогичное неравенство можно получить для формулы ψ: $I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi)\geq I_{S(\Sigma)}(\psi)$. Следовательно $I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi)\geq \max\{I_{S(\Sigma)}(\varphi),I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$. Свойство 3) доказано.

4) Расписывая по определению меры недостоверности $I_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)$, получаем справедливые равенства:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}((\varphi\vee\psi)_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i(\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+$$
$$+\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}})-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}. \qquad (9)$$

Распишем подробно выражение $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=i}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}-$$
$$-\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}. \qquad (10)$$

Используя полученные равенства, вычитая (9) из (10) получаем:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi)-I_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=i}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{k}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}-\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{i}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}\geq$$
$$\geq\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{i}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}\geq 0.$$

Откуда следует, что $I_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)\leq I_{S(\Sigma)}(\varphi)$. Аналогичное неравенство получим для формулы ψ: $I_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)\leq I_{S(\Sigma)}(\psi)$ => $I_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)\leq \min\{I_{S(\Sigma)}(\varphi),I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$. Свойство 4) доказано.

5) Из формул (7)-(10) непосредственно следует формула:
$I_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)+I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi)=I_{S(\Sigma)}(\varphi)+I_{S(\Sigma)}(\psi)$.

Замечание 5. Конечно, меру недостоверности формулы можно было ввести через истинностные значения отрицания формулы, с монотонно неубывающими коэффициентами, но это по существу и сделано. Связь введенной степени недостоверности формулы с приведенными выше расстояниями между ее компонентами и их недостоверностью не такая простая как в случае логических исчислений при $n=2$, n=3 [1, 9]. Можно также предположить, что в любом другом случае нет простой связи между расстоянием между компонентами формулы и степенью недостоверности компонент (подформул) формулы с ее недостоверностью.

7. Аппробация подхода. В качестве примера нами рассмотрено дерево событий, используемого для анализа причин возникновения аварийных ситуаций при автоматизированной заправке емкости. Структура дерева событий включает одно головное событие (авария, инцидент), которое соединяется с набором соответствующих нижестоящих событий (ошибок, отказов, неблагоприятных внешних воздействий), образующих цепи причин (сценарии аварий).

Проанализированы записанные по дереву (отказов) различные сложные высказывания экспертов (формулы) о конкретных отказах заправочной станции и найдены расстояния между различными формулами и степени их недостоверности при различных n. Результаты вычислений показали адекватность (согласованность с мнениями специалистов и экспертов и нашими предыдущими исследованиями) предлагаемого подхода, но большую корректность результатов по сравнению со случаями $n=2$ и $n=3$, а также быструю стабилизацию вычисляемых величин с увеличением числа n. Упорядочение формул по степени (возрастания) недостоверности согласуется не только с мнениями опытных экспертов автоматизированной заправки, но и результатами, полученными для n=2 и n=3 [9].

8. Заключение. В задачах и алгоритмах распознавания образов важным инструментом является возможность вычислять расстояния между изучаемыми объектами. Наличие подходящей геометрии (метрики) позволяет улучшать распознавание и кластеризацию. Нахождение нужной метрики для лучшей кластеризации – проблема в распознавании образов. Предложенные расстояния позволяют адаптивно подобрать нужные метрики и даже выбрать из них лучшую в конкретной задачи. При этом на знания экспертов можно смотреть как на дополнительные данные, позволяющие более адекватно вскрыть имеющиеся причинно-следственные связи между переменными задачи и построить решающую функцию.

Предложенные расстояния и меры недостоверности обладают полезными свойствами [1, 9]. И поэтому могут быть использованы при создании баз знаний, анализе, кластеризации знаний и их пополнении. Различные степени недостоверности высказываний и расстояния между ними позволят находить нужные метрики как для кластеризации знаний баз знаний, так и в алгоритмах распознавании образов, а также для согласований знаний экспертов. Введенные понятия могут применяться при построении логических решающих функций на основе согласованных экспертных высказываний.

В настоящее время возрос интерес к построению решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний нескольких экспертов, реализации процессов адаптации и согласования высказываний [1, 4-7, 10-15]. Если высказывания экспертов представлены в виде формул произвольной n-значной табулированной логики (например, как логика Лукасевича [4]), то полученные выше результаты также применимы к ним. Изменитс только класс моделей (точнее определение на них значений истинности формул). Предлагаемый подход расширяет и обобщает случаи n=2, n=3 и отличается от вероятностного подхода [10-12], поскольку в указанных работах отсутствуют таблицы истинности [3]. Промежуточные значения истинности формул можно также рассматривать как нечеткие (вероятностные) значения истинности или как значения ошибочности высказывания (по интерпретации Д. Скотта). Еще раз отметим, что приведенные доказательства проходят как и для других n-значных табулированных логик (также в нечеткой логике по Заде и по таблицам Балдвина для нечетких значений истинности), так и произвольных вероятностных высказываний (с конечным числом принимаемых вероятностных значений!) . Это так поскольку изменится только определение значений истинности формул на модели либо и сам класс рассматриваемых моделей.

Ясно, что различные высказывания экспертов (и соответствующие им формулы) содержат различное количество информации, поэтому возникает вопрос о ранжировании высказываний экспертов. В исследуемом случае можно провести ранжирование по степени недостоверности, упорядочивая рассматриваемый ансамбль формул по этому параметру. Кроме того можно рассмотреть вопрос о совместности множеств высказываний.

9 Благодарности. Автор выражает благодарность Р.А. Викентьеву и Д.В.Новикову за помощь при наборе первой версии текста, в создании начальных версий программ и таблиц, обеспечивших проверку правильности вычислений расстояний и степеней недостоверности формул в прикладной задаче, и кластеризации знаний, А. С. Морозову за консультации и поддержку, Г.С. Лбову (пионеру этого направления) и сотрудникам лаборатории анализа данных за интерес, поддержку исследований, за ценные замечания по статье, указания ссылок на имеющиеся работы в этом направлении, позитивную критику первоначального варианта статьи, а также Витяева Е.Е. за консультации по тексту и анонимного рецензента за тщательное прочтение и замечания, улучшившие изложение.

Литература:

1. Лбов Г.С., Старцева Н.Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.

2. Zagoruiko N.G. Applied Methods of Data and Knowledge Analysis (Inst. Math. SD RAN, Novosibirsk, 1999 [in Russian**]**

3. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика - М.: Физматлит, 2011.

4. Карпенко А.С. Логики Лукасевича и простые числа. – Москва: Наука, 2000.

5. Lbov G.S., Gerasimov M.K. Constructing of a Consensus of Several Experts Statements. In: Proc. of XII Int. Conf. ”Knowledge-Dialogue-Solution”, 2006. - P. 193-195.

6. Lbov G.S., Gerasimov M.K. Interval Prediction Based on Experts’ Statements. In: Proc. of XIII Int. Conf. ”Knowledge-Dialogue-Solution”, 2007. - Vol. 2. - P. 474-478.

7. Lbov G.S., Gerasimov M.K. Determining of Distance Between Logical Statements in Forecasting Problems. In: Artificial Intelligence, 2’2004 [in Russian]. Institute of Artificial Intelligence, Ukraine.

8. Vikent’ev A. Measure of Refutation and Metrics on Statements of Experts (Logical Formulas) in the Models for Some Theory. In: Int. Journal ”Information Theories & Applications”, 2007. - Vol. 14. - No.1. - P. 92-95.

9. Викентьев А.А., Новиков Д.В. Расстояние и Информативность на формулах-высказываниях экспертов и мера опровержимости (информативности) высказываний экспертов на моделях 3-значной логики. // Вестник Карагандинского госуниверситета. Сер. Математическая. – 2007. - N 1(45). - С. 8- 18.

10. Смердов С.О., Витяев Е.Е. Синтез логики, вероятности и обучения: формализация предсказания. // Сибирские Электронные Математические Известия. Институт математики им.С.Л. Соболева СО РАН, 2009. – Т.6. - С. 340-365.

11. Lukasiewicz T. Probabilistic logic programming with conditional constraints. ACM Transactions on Computational Logic (TOCL), 2(3), 2001. pp. 264-312.

12. Kern-Isberner G. and Lukasiewicz T. Combining Probabilistic Logic Programming with the Power of Maximum Entropy. Artificial Intelligence, 157(1-2), August 2004, pp. 139-202.

13. Zhuravlev Yu. I. An Algebraic Approach to Recognition or Classification Problems, Pattern Recognition and Image Analysis, 8(10), 59-100 (1988).

14. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. - М.: Мир, 1977.

15. G.S. Lbov Methods of Polytypic Experimental Data Processing, Nauka, Novosibirsc, 1981[in Russian].

Резюме

В статье рассматриваются формулы n-значной логики, впервые введенные и изученные Лукасевичем, имеющие различные применения, в частности для записи многозначных высказываний экспертов. С использованием методов математической логики и введенной теории моделей для n-значной логики, находятся <<расстояния>> на формулах (высказываниях) и степени (меры) недостоверности формулы, как характеристика неверности формулы на классе рассматриваемых моделей (возможных миров). Изучены свойства введенных расстояний и мер недостоверности формул.

Ключевые слова: расстояния на формулах, метрики, меры недостоверности, кластеризация, распознавание образов.

Түйіндеме

Жұмыста алғашқы рет Лукасевич енгізген n – мәнді логиканың формулалары қарастырылады. Математикалық логиканың әдістерін және модельдер теориясындағы n – мәнді логиканы қолдану арқылы формулалардағы «қашықтық» және формуланың шынайылық өлшемі еңгізіледі, сонымен қатар олардың қасиеттері зерттеледі.

Кілт сөздер: формулалардағы «қашықтық» өлшемі, метрикалар, сенімсіздік өлшемі, кластерлеу, бейнелерді тану.

Summary

The article consider formulas of n-valued logic. These formulas intrigued and studied by nukaseevich and they could be used as records of experts' judgments. We use of mathematical logic and model theory methods for n-valued logic to define metrics on formulas (propositions) and uncertainty (unauthentic) measures. We study properties of such metrics and measures. The propties of this paper are the definition of the equivalent formulas of metrics on the classes and the definition of unauthentic (uncertainty, unreliability) measures together with finding their good inter rals . We also note their importance for cluster analysis, creating of deciding functions and patterns recognition.

Key words: distances on formulas, metrics, unauthentic (uncertainty) measures, cluster analysis, pattern recognition.

УДК 512.554

ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О БАЗИСЕ ДЛЯ ZINBIEL АЛГЕБР

А. С.ДЖУМАДИЛЬДАЕВ, доктор физико-математических наук, профессор,
К. М.ТУЛЕНБАЕВ, кандидат физико-математических наук
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

В данной статье доказывается, что для класса почти кососимметрических алгебр типа Zinbiel не выполняется теорема Гильберта о базисе. Поэтому решить задачу нахождения конечного базиса идеала кососимметрических алгебр в общем случае невозможно.

Для любой свободной неассоциативной алгебры от конечного числа порождающих можно исследовать задачу конечности порождающих произвольного идеала в данной неассоциативной алгебре, которая является аналогом следующей теоремы немецкого математика Давида Гильберта.

Теорема (Гильберта о базисе) Пусть A – коммутативное, ассоциативное, *нётерово кольцо* и $A\ [X_1, \ldots, \ldots, X_n]$- кольцо многочленов от $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами в A, то и $A\ [X_1, \ldots, X_n]$- нётерово кольцо. В частности, в кольце многочленов от конечного числа переменных над полем или над кольцом целых чисел любой идеал порождается конечным числом элементов (имеет конечный базис).

Именно в такой форме теорема была доказана Д. Гильбертом и играла вспомогательную роль в доказательстве основной *Гильберта теорема* об инвариантах. Впоследствии данная теорема получила широкое распространение в коммутативной алгебре. Первой неассоциативной алгеброй для изучения математиками начала двадцатого века стала алгебра Ли.

Алгеброй Ли (иначе лиевой алгеброй) называется векторное пространство $\mathfrak{L}$над полем K, снабжённое билинейным отображением

$$\mathfrak{L}^2 \to \mathfrak{L}, \quad (x,y) \mapsto [x,y],$$

удовлетворяющим следующим двум аксиомам:

- $[x,x] = 0$;
- $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$(тождество Якоби).

Другими словами, в алгебре Ли задана антикоммутативная операция, удовлетворяющая тождеству Якоби. Эта операция называется коммутатор или скобка Ли. Известным результатом является тот факт, что теорема Гильберта не верна для алгебр Ли. В моей статье доказывается, что теорема Гильберта не верна для почти кососимметрических алгебр типа Zinbiel. Алгебра Zinbiel задается тождеством (a*b)*c=a*(b*c+c*b)

Теорема. Пусть A является свободной алгеброй Zinbiel от двух переменных x,y. Идеал I порождается всеми левонормированными произведениями (n+2) элементами типа x*(y*(y*(…*(y*x)))). Тогда I не является нетеровым идеалом.

Доказательство: Покажем, что элемент u=x*(y*(y*(…*(y*x)))), где y берется n раз, не может лежать в I_{n-1}=<$u_1, u_2,…,u_{n-1}$ >, где u_k= x*(y*(y*(…*(y*x)))), где y берется k раз и k<n.

Действительно, так как количество вхождений x равно двум, то умножать u_k можно только на y слева или справа.

Рассмотрим u_k*y= =(x*(y*(y*(…*(y*x)))))*y=x*((y*(y*(…*(y*x)))))*y+y*(y*(y*(…*(y*x)))))=

= (x*((y*(y*(…*(y*x)))))*y)+ $u_{k+1.}$ Тогда если $u_n \in I_{n-1}$ элемент v=(x*((y*(y*(…*(y*x)))))*y)$\in I_{n-1}$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Литература:

1. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра -М.:Наука, 1976
2. Зарисский О., Самюэль Р. Коммутативная алгебра -М.:ИЛ, 1963
3. Ленг С. Алгебра -М.:Мир, 1968
4. *Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли,* — М.: Мир, 1969.
5. *Номидзу К.* Группы Ли и дифференциальная геометрия. — М.: ИЛ, 1960.

Резюме

В данной статье доказывается, что для класса почти кососимметрических алгебр типа Zinbiel не выполняется теорема Гильберта о базисе. Поэтому решить задачу нахождения конечного базиса идеала кососимметрических алгебр в общем случае невозможно.

Ключевые слова: теорема Гильберта о базисе, идеал, Zinbiel алгебра.

Түйіндеме

Мақалада Zinbiel алгебралар үлгісінің Гильберттің теоремасы туралы базиста орындалмайтыны дәлелденді. Сол себептен кососимметриқалық алгебралардың идеалының ақырғы базисының мақсатын жалпы жағдайда табу мүмкін емес.

Кілт сөздер: Гильберт базис теоремасы, идеал, Zinbiel алгебрасы.

Summary

Our article is devoted to the proof of Hilbert basis theorem. It does not work in case of Zinbiel algebras. It is impossible to find finite basis of an ideal of skew-symmetric algebra in general case.

Key words: Hilbert basis theorem, ideal, Zinbiel algebra.

ӘОЖ 512.547.23

ЕГЕМЕН ОҢ-КОММУТАТИВТІ АЛГЕБРА S_n -МОДУЛЬ РЕТІНДЕ

А.С. ЖҰМАДІЛДАЕВ, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор
Б.К. ЖАХАЕВ, магистр
Сулейман Демирел атындағы Университет, Алматы қ., Қазақстан Республикасы

Егер A алгебрасында

$$(a*b)*c=(a*c)*b$$

теңбе-теңдігі орындалса, онда бұл алгебраны оң-коммутативті дейміз. Бұл жұмыста оң-коммутативті алгебраның базисі [1] жұмыста көрсетілгендей түбірлі ағаштармен құрылған, яғни әр жақшаға бір түбірлі ағаш жауап береді. Айталық, t n төбеден тұратын түбірлі ағаш болсын, олардың жиынын T_n деп белгілейік. Егер, $t \in T_n$ түбірлі ағашының ең болмағанда бір төбесінен теңдей ішкіағаштар шықпаса, онда бұл түбірлі ағашты асимметриялы дейміз, олардың жиынын $Asym(T_n)$ деп белгілейік. Айталық, $F(X)$ $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ тудырғыштарынан құралған егемен оң-коммутативті алгебраның мультисызықты бөлігі болсын. Жұмыста $F(X)$-ті S_n-модуль ретінде қараймыз. Әрбір $t \in T_n$ $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ үстінде M_t кеңістігін құрайды, сонымен қатар, $F(X)$-тің ішкікеңістігі, әрі S_n алмастыру тобы әсер еткенде пайда болған M_t модулі $F(X)$-тің S_n-ішкімодулі болады. Ал S_n алмастыру тобының CS_n алгебралық тобы регулярлы CS_n -модуль екені белгілі.

Онда төмендегі теорема орынды.

Теорема: *Егер,* $t \in Asym(T_n)$ *болса, онда*

$$M_t \cong CS_n.$$

Әдебиеттер:

1. A. Dzhumadil’daev, C. Lofwall, *Trees, free Right –symmetric algebras, free Novikov algebras and identities,* Homology, Homotopy and Applications, vol. 4(2), 2002, pp. 165-190.

Кілттік сөздер: егемен оң-коммутативті алгебра, түбірлі ағаш, S_n -модуль

Ключевые слова: свободная право-коммутативная алгебра, корневое дереве, S_n -модуль

Key words: free right-commutative algebra, rooted tree, S_n -module

УДК 512.562

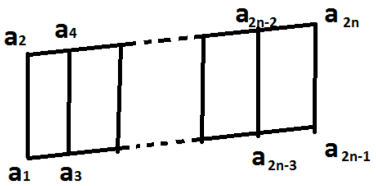
ІШІНАРА РЕТТЕЛГЕН ЖИЫННЫҢ ДЕРБЕС ЖАҒДАЙЫ

А.С. ЖҰМАДІЛДАЕВ, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор,
А.Н. КАСИНОВ, Е.Ә. БАҒДАРОВ
ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы

P ішінара реттелген жиыны берілсін (Poset). Біз P жиынының келесідегідей дербес түрін қарастырамыз.

Анықтама 1.1 $m, n \in Z^+$

1) $a_i \in [m] = \{1,2,\dots,m\}$
2) $a_1 \le a_3 \le a_5 \le \dots \le a_{2n-1}$
3) $a_2 \le a_4 \le a_6 \le \dots \le a_{2n}$
4) $a_i < a_j$, егер i – тақ, j – жұп және $i < j$;



Егер бізге m берілген болса, онда барлық мүмкін жағдайларының санын анықтауға болады. Оны $\Omega\ (P, n, m)$ деп белгілейміз.

Теорема 1.2.

$\Omega\ (P, n, m) = N(n+m, m)$

Мұндағы $N(n,i) = \frac{1}{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i-1}$ Нараяна сандары(Narayana numbers).

Әдебиеттер:

1. Brenti, Francesco, Unimodal, Log-concave and Pólya Frequency Sequences in Combinatorics, viii+106pp., Memoirs Amer. Math. Soc., no.413, 1989

Түйіндеме

Ішінара реттелген жиынның дербес түрі барлық жерде кездеседі. Атап айтсақ “Kekule structure” атты химияның бөлімінде қатты қолданысқа ие.

Кілт сөздер: ішінара реттелген жиын, Нараяна сандары.

Резюме

Именно этот poset частного случая возникает везде. Особенно имеет очень глубокий интерес в химии под названием “Kekule structure”.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, числа Нараяна.

Summary

There is a poset everywhere it this particular case is. It especially has a very deep interest in chemistry called "Kekule structure".

Key words: poset, Narayana numbers.

УДК 510.67

К ВОПРОСУ А.Д.ТАЙМАНОВА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЗИТИВНЫХ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ В ОБОГАЩЕНИИ

А.Р. ЕШКЕЕВ, доктор физико-математичемких наук, доцент
Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова,
Р.М.ОСПАНОВ,
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва, г.Астана,
О.И.УЛЬБРИХТ,
Институт прикладной математики МОН РК, г.Караганда, Республика Казахстан

В данной работе рассмотрен позитивный аналог вопроса А.Д.Тайманова для булевых алгебр в рамках решёток экзистенциальных формул рассматриваемого позитивного языка. Впервые подобной проблематикой занимался Т.Г.Мустафин, в частности, в связи с этим вопросом он получил ответы на некоторые частные случаи. Сформулируем вопрос А.Д.Тайманова, учитывая, что данная проблема была определена для полных теорий.

А именно, при изучении свойств моделей полных теорий первого порядка полезными являются сведения о булевых алгебрах (алгебрах Линденбаума-Тарского) $F_n(T)$, $n \in \omega$, теории T [1]. В связи с этими булевыми алгебрами $F_n(T)$, $n \in \omega$, хорошо известен вопрос А.Д. Тайманова T (можно ознакомиться в работах [2]):

(*) Какими свойствами должны обладать булевы алгебры $B_n, n \in \omega$ чтобы существовала полная теория T, такая, что B_n была изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$?

В [2] Т.Г.Мустафиным были даны ответы на частные случаи этого вопроса. Им были получены следующие результаты:

Теорема 1. [2] Для любой булевой B существует такая полная теория T, что:

а) $B \cong F_1(T)$,

б) если B конечная, то T категорична в счетной мощности,

в) если стоуновское пространство алгебры B счетно, то T тотально трансцендентна.

Теорема 2. [2] Для того, чтобы для конечных булевых алгебр B_1, B_2 существовало такая категоричная в счетной мощности теория T, что $F_1(T) \cong B_1, F_2(T) \cong B_2$ необходимо и достаточно, чтобы число атомов B_2 было больше квадрата числа атомов B_1.

Естественным обобщением вопроса А.Д.Тайманова было бы рассмотрение этой проблематики в рамках неполных теорий, в частности, в йонсоновских теориях и их позитивных обобщениях. Проследим развитие теории моделей относительно видов формул (синтаксис), которые изучаются и морфизмов моделей (семантика). Для этого мы можем обратиться к известной статье Дж.Кейслера о развитии теории моделей в [3].

Им выделено два направления в развитии теории модели. Их называют западной и восточной теорией моделей, так как один из основоположников теории моделей А.Тарский жил на западном побережье США с 1940г., а другой основоположник А.Робинсон – на восточном. Западная теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множества, и в ней используются все формулы логики первого порядка.

Восточная теория моделей развивается в традициях Мальцева и Робинсона. Она мотивировалась проблемами в абстрактной алгебре, где формулы теорий обычно имеют самое большее два блока кванторов. Она делает ударение на множества бескванторных формул и экзистенциальных формул. В отличии от западной теории моделей, которая изучает полные теории, восточная теория моделей вообще говоря имеет дело с неполными ториями. В частности, в качестве морфизмов в восточной теории моделей рассматриваются изоморфные вложения и гомоморфизмы, а в западном варианте в основном рассматривают элементарные вложения. Класс неполных теорий достаточно широк, поэтому можно ограничится индуктивными теориями ($\forall\exists$-аксиоматизируемыми). В смысле полноты рассматриваемой теории максимальное требование, как правило - $\forall\exists$-полнота. Всем этим условиям удовлетворяют йонсоновские теории. Таким образом сделаем вывод, что изучение йонсоновских теорий относится по своей сути к проблематике восточной теории моделей. Теперь мы можем переопределить вопрос А.Д.Тайманова в рамках восточной теории моделей. Прежде всего запишем следующую договорённость, которая играет важную роль в дальнейшем.

Мы будем говорить, что вопрос (*) решается положительно для теории T, если существует такая последовательность булевых алгебр B_n, $n \in \omega$, что B_n изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$.

В данной статье мы рассмотрим выше указанный вопрос в рамках изучения неполных теорий, а именно в классе йонсоновских теорий. Напомним основные определения.

Определение 1. Теория T называется йонсоновской, если:

1) Теория T имеет бесконечные модели;

2) Теория T индуктивна;

3) Теория T обладает свойством совместного вложения (JEP)

4) Теория T обладает свойством амальгамы (AP)

Теория индуктивна, если она устойчива относительно объединения цепей. Известна следующая теорема:

Теорема 3 (Чэн-Лось-Сушко). Теория T устойчива относительно объединения цепей, если и только если она $\forall\exists$-аксиоматизируема, т.е. эквивалентна множеству $\forall\exists$ – предложений.

Теория T обладает свойством совместного вложения, если для любых моделей U, B теории T существует модель M теории T и изоморфные вложения $f: U \to M$, $g: B \to M$.

Теория T обладает свойством амальгамы, если для любых моделей U, B_1, B_2 теории T и изоморфных вложений $f_1: U \to B_1$, $f_2: U \to B_2$ существуют такие $M \models T$ и изоморфные вложения $g_1: B_1 \to M$, $g_2: B_2 \to M$, такие что $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

Следующие теории являются примерами йонсоновских теории:

1) группы;

2) абелевые группы;

3) булевы алгебры;

4) линейные порядки;

5) поля характеристики p (p – простое число либо нуль);

6) упорядоченные поля.

Из этих примеров видно, насколько широка область применения данной проблематики в различных разделах математики.

Рассмотрим теорию T счетного языка первого порядка L.

Следующий результат является главным при описании теоретико-модельных свойств совершенных йонсоновских теорий.

Теорема 4. Пусть T йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T^* - модельный компаньон T;

Определение 2. Пусть T - йонсоновская теория. Компаньоном йонсоновской теории T, называется такая теория $T^\#$ той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(T^\#)_\forall = T_\forall$;

2) для любой йонсоновской теории T', если $T_\forall = T'_\forall$, то $T^\# = (T')^\#$.

3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^\#$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^{\#}$ являются T^{*}, T^{0}, T^{f}, T^{M}, T^{e}. где T^{0}-компаньон есть оболочка Кайзера, T^{*}-компаньон есть центр, T^{M}-компаньон есть модельный компаньон, T^{f}-компаньон есть конечный форсинг компаньон в смысле Робинсона, T^{e}-компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории T.

Факт 1. Для любой йонсоновской теории T следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T^{*} модельно полна.

Факт 2. Для любой полной для $\exists$-предложений йонсоновской теории T следующие условия эквивалентны:

1) T^{*} модельно полна;

2) для каждого $n<\omega$ $E_n(T)$ - булева алгебра, где $E_n(T)$ - есть решетка $\exists$-формул с n свободными переменными.

Теорема 5. Пусть T йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T^{*} - $\forall\exists$ - аксиоматизируема.

Теорема 6. Пусть T йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) $T^{*}=T^{0}$.

Теорема 7. Пусть T йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T имеет модельный компаньон.

Следующие леммы есть лёгкий результат применения вышеуказанных теорем.

Лемма 1. Если $T^{\#}$ компаньон йонсоновской теории T и T^{M} модельный компаньон T, то $T^{\#}=T^{M}$.

Лемма 2. Пусть T_1 и T_2 йонсоновские теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T_1 и T_2 взаимно модельно совместны;

2) $T_1^{\#}=T_2^{\#}$.

Хорошо известно, что работая с йонсоновскими теориями в некоторых случаях мы имеем возможность ограничить себя экзистенциальными формулами и экзистенциально-замкнутыми моделями рассматриваемой йонсоновской теории. В этом случае вместо алгебр Линденбаума-Тарского $F_n(T)$, $n\in\omega$, следует рассматривать решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$, $n\in\omega$. Таким образом выше указанный вопрос А.Д.Тайманова можно сформулировать следующим образом:

(**) Какими свойствами должны обладать решетки E_n, $n\in\omega$, чтобы существовала йонсоновская теория T, такая, что E_n была изоморфна $E_n(T)$, $n\in\omega$?

Аналогично, мы будем говорить, что вопрос (**) решается положительно для йонсоновской теории T, если существует такая последовательность решеток E_n, $n\in\omega$, что E_n изоморфна $E_n(T)$, $n\in\omega$.

В связи с этими вопросоми (*), (**) получены следующие результаты:

Следующая часть этой работы посвящена вопросу А.Д.Тайманова в рамках Δ-позитивно мустафинской ($\Delta-M$)-теории.

Напомним следующее определение. Теория T называется Δ-позитивно мустафинской ($\Delta-M$)-теорией, если в качестве морфизмов рассматриваются только погружения и верны следующие условия:

1) теория T имеет бесконечные модели,

2) теория T является Π_{n+2}^{+}-аксиоматизируемой,

3) теория T допускает $\Delta - JEP$,

4) теория T допускает $\Delta - AP$.

В последнее время появились работы по позитивной теории моделей. Отметим некоторые из них [4], [5]. Хотя позитивность в обоих случаях определяется по-разному, но в частном случае, когда Δ является минимальным фрагментом из [4], то он совпадает с $B^{+}(At)$ из [5].

Определим позитивность в рамках работы [5].

Пусть L язык первого порядка. At – есть множество атомарных формул данного языка. $B^{+}(At)$ – замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^{+}(At))$ – есть множество формул в пренексном нормальном виде полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^{+}(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^{+}(At))$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^{+})$ – это произвольная булева комбинация формул из L^{+}. Таким образом в дальнейшем мы в качестве морфизмов имеем только погружения.

Когда $\Delta = B(At)$ мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$-аксиомы.

В дальнейшем все определения понятий касающихся йонсоновских теорий (в обычном смысле) считаются известными и их можно извлечь, например, в [5].

Определим понятие Δ-йонсоновских теорий(Δ-J-теории).

В том случае, если при некотором фиксированном Δ, в определении $\Delta - PJ$ теории (см. определение в [5]) заменить все Δ-продолжения на Δ-погружения, то мы получим определение Δ-йонсоновских теорий(Δ-J-теории).Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличии от (Δ-PJ) теорий, которые могут быть вообще говоря и нейонсоновскими. В нашем случае это не так, так как продолжения всегда являются вложениями.

Легко заметить, что Δ-йонсоновская теория является частным случаем Δ-мустафинской теории.

Пусть T – произвольная $\Delta - M$-теория в языке сигнатуры σ. Пусть C – семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_{\Gamma}(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$. Рассмотрим следующую теорию

$$T_{\Gamma}^{PgM}(A) = Th_{\Pi_{\alpha+2}^{+}}(C, a)_{a \in A} \cup \{g(a) = a \mid a \in A\} \cup g(c) \cup T_g \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\},$$ где T_g - выражает тот факт, что для любой модели $(M, g^M) \models T_g$ имеет место:

1) g^M - автоморфизм M;

2) $\{m \in M \mid g^M(m) = m\}$ есть универсум некоторой экзистенциально замкнутой подмодели M, для любой модели M сигнатуры σ.

Для предиката P мы записываем выражение $\{"P \subseteq"\}$, что по своей сути есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. В силу неполноты мы не записываем точную связь между элементами $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$, но предполагается их согласованность в рамках теории $T_{\Gamma}^{PgM}(A)$. Данное обогащение сигнатуры рассмотрено для $\Delta - M$-теории, в случае $\Delta - J$-теории в записи предложений из $T_{\Gamma}^{PgM}(A)$ участвуют предложения только преникса длины 2.

Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра T^{*} теории T в новой сигнатуре σ_{Γ}, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - M$-ности теории T^{*}, существует её центр и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ, теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории *T*.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 8. Пусть T совершенная, полная для экзистенциальных предложений Δ-J-теория языка сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) положительное решение вопроса (**) относительно теории T^*;
2) положительное решение вопроса (*) относительно теории T^c, где T^c является центром теории T^*;

Если множество универсальных следствий йонсоновской теории также является йонсоновской теорией (что вообще говоря не всегда так), то тогда мы получим следующий результат.

Теорема 9. Пусть *T* – совершенная, полная для экзистенциальных предложений $\Delta - M$-теория в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$ и теория $T^*_{\Pi^+_{\alpha+2}}$ является $\Delta - M$-теорией, где $T^*_{\Pi^+_{\alpha+2}}$ -множество позитивных универсально-экзистенциальных предложений преникса длины α+2 выводимых из T^*.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) положительное решение вопроса (*) относительно теории T^c;
2) положительное решение вопроса (**) относительно теории $T^*_{\Pi^+_{\alpha+2}}$, где T^* является центром теории T.

Все неопределенные в этой статье и определения понятий можно прочитать в [5].

Литература:

1. Сикорский Р. Булевы алгебры. – М.:Наука, 1969. – 376 с.
2. Мустафин Т.Г. О булевых алгебрах теорий // Математика и физические исследования. – Караганда: КарГУ, 1974. – Выпуск 1. – С. 80-84.
3. Под ред. Дж. Барвайса. Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/ – Ч.1. Теория моделей: Пер. с англ. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982 г. –393с.
4. Itay Ben-Yaacov. Positive model theory and compact abstract theories.- Journal of Mathematical Logic 3 (2003), no. 1, 85-118.
5. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. – Караганда: КарГУ,2009. – 250с.

Резюме

Основной целью данной работы является переопределение вопроса А.Д.Тайманова для полных теорий в сферу позитивных йонсоновских теорий. В рамках сформулированных понятий было показано, что положительное решение вопроса А.Д.Тайманова совпадает как для центрального типа такой теории, так и для центра этой теории.

Ключевые слова: позитивная мустафинская теория, позитивная йонсоновская теория, совершенность позитивной йонсоновской теории, обогащение сигнатуры, центральный тип, компаньоны йонсоновской теории.

Түйіндеме

Осы жұмыстың негізгі мақсаты толық теориялар үшін А.Д.Тайманов сұрағын позитивті йонсондық теориясы аясында жаңадан анықтау. Берілген анықтамалар аясында Таймановтың сұрағының оңды шешімі централдық типтер үшін және центр үшін бірдей екендігі көрсетілген.

Кілт сөздер: позитивті мұстафиндық теория, позитивті йонсондық теория, позивтік йонсондық теорияның кемелділігі, сигнатура байытуы, орталық тип, йонсондық теорияның компаньондары.

Summary

The main purpose of this article is to redefine the question of A.D.Taimanov for complete theories in the frame of positive Jonsson theories. Under the terms it was set out that a positive solution of the issue of A.D. Taimanov is the same as for the central type of such a theory, and for the center of this theory.

Key words: Mustafinien positive theory, positive Jonsson theory, perfect positive Jonsson theory, enriching of signatures, the central type, companions of Jonsson theory.

УДК 510.67

СТАБИЛЬНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ПОЗИТИВНЫХ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ

А.Р.ЕШКЕЕВ, доктор физико-математичемких наук, доцент,
Н.К.МЕДЕУБАЕВ, Д.Н.НУРЛАН
Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова,
Республика Казахстан

Хорошо известно, что с помощью понятия форкинга выдающемуся математику-логику С.Шелаху удалось решить проблему классификации полных теорий относительно спектра. Для неполных теорий такая задача в общем виде абсолютно неподъемна, и как правило, для классификации неполных теорий относительно рассматриваемой теоретико-модельной специфики математики выделяют некоторые естественные ограничения. Например, рассматривают данную проблематику в рамках изучения индуктивных теорий. Это оправдано хотя бы тем, что основные алгебраические объекты как правило задаются универсально-экзистенциальными аксиомами. Среди индуктивных особую роль играют йонсоновские теории, для которых существует метод исследования – семантический. Суть этого метода заключается в транслировании элементарных свойств первого порядка, присущих центру йонсоновской теории на саму теорию. Наибольший прогресс достигнут в описании совершенных йонсоновских теорий. Основной идеей данной статьи является определение понятия форкинга в классе $\Delta - M$ -теорий с помощью семантического метода. Суть этого метода заключается в транслировании элементарных свойств некоторой полной теории (центра йонсоновской теории) на саму йонсоновскую теорию. Идея центрального типа восходит к различным обогащениям сигнатуры и выражениям типов через их обеднения в старой сигнатуре. И в первом и во втором случаях эти идеи позволяют перенести основные теоретико-модельные понятия, определенные для полных теорий, на йонсоновские теории и их позитивные обобщения, которые вообще говоря неполны. Описаны стабильностные свойства $\Delta - M$ - теорий и определен аксиоматическим путем форкинг для $\Delta - M$ теорий и доказано что в классе совершенных $\Delta - M$ теорий введенное понятие эквивалентно форкингу в обычном смысле для стабильного ее центра. Доказано, что синтаксическое подобие двух совершенных йонсоновских $\Delta - M$ -теорий эквивалентно синтаксическому подобию их центров в обогащенной сигнатуре.

Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть Π_n^+ – множество всех формул языка L^+ вида $\forall\exists\ldots\varphi$ (т.е. формулы из L^+ с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Pi_n^+ \subseteq L^+$. Определим новый класс теорий, который является обобщением теорий, рассмотренных в [1]. В частности, если $n = 0$, то мы получим частный случай $\Delta - PJ$ -теорий, рассмотренных в [2]. И в

[2], и в [3] рассматриваемые теории являются обобщением йонсоновских теорий, при этом надо требовать, чтобы они таковыми были, так как существуют $\Delta - PJ$ -теории, которые не йонсоновские.

Напомним следующее определение [4] Теория T называется Δ -позитивно мустафинской ($\Delta - M$)-теорией, если в качестве морфизмов рассматриваются только погружения и верны следующие условия:

1) теория T имеет бесконечные модели,

2) теория T является Π^{+}_{n+2} -аксиоматизируемой,

3) теория T допускает $\Delta - JEP$,

4) теория T допускает $\Delta - AP$.

Полученные результаты в данной статье отличаются от аналогичных исследований в этой области тем, что мы рассмотрим $\Delta - M$ теории и их центры в обогащённой сигнатуре автоморфизмом, константой и предикатом. До этого первым автором рассматривались позитивные йонсоновские теории в [1], [2], [3], [4] и в более простом обогащении.

Пусть T – произвольная $\Delta - M$ -теория в языке сигнатуры σ. Пусть C – семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_{\Gamma}(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$. Рассмотрим следующую теорию $T_{\Gamma}^{PgM}(A) = Th_{\Pi^{+}_{\alpha+2}}(C, a)_{a \in A} \cup \{g(a) = a \mid a \in A\} \cup g(c) \cup T_g \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где T_g - выражает тот факт, что для любой модели $(M, g^M) \models T_g$ имеет место:

1) g^M - автоморфизм M;

2) $\{m \in M \mid g^M(m) = m\}$ есть универсум некоторой экзистенциально замкнутой подмодели M, для любой модели M сигнатуры σ.

Для предиката P мы записываем выражение $\{"P \subseteq"\}$, что по своей сути есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. В силу неполноты мы не записываем точную связь между элементами $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$, но предполагается их согласованность в рамках теории $T_{\Gamma}^{PgM}(A)$.

Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_{Γ}, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - M$ -ности теории T^*, существует её центр и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ, теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T. Пусть T – произвольная $\Delta - M$ -теория вышеуказанной сигнатуры , тогда $E^{+}(T) = \bigcup_{n,m<\omega} E^{+}_{n,m}(T)$, где $E^{+}_{n,m}(T)$ - есть решетка позитивных экзистенциальных формул с n_свободными переменными и с m-переменами кванторов.

Через S_{Γ}^{M} обозначим множество всех $\Sigma^{+}_{\alpha+1}$-пополнений теории $T_{\Gamma}^{PgM}(A)$. Теория T будет λ-стабильна, если $\left|S_{\Gamma}^{M}\right| \leq \lambda$ для любого A, такого, что $\left|A\right| \leq \lambda$.

Итак нашей задачей является определение аксиоматическим путем понятие форкинга для совершенной $\Delta - M$ -теории в рамках условий обогащения сигнатуры. .

Определение 1. Пусть M - $\Sigma^{+}_{\alpha+1}$-насыщенная Δ-позитивно $\alpha + 1 -$экзистенциально замкнутая модель мощности к (к достаточно большой кардинал) $\Delta - M$ -теории T ($\Sigma^{+}_{\alpha+1}$-насыщенность означает насыщенность относительно $\Sigma^{+}_{\alpha+1}$-типов в своей мощности). Напомним, что модель M теории T называется Δ -позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого Δ -гомоморфизма $f : M \xrightarrow[\Delta]{} N$ и каждого $\overline{a} \in M$, и $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta : N \models \exists \overline{y} \varphi(f(\overline{a}), \overline{y}) \Rightarrow M \models \exists \overline{y} \varphi(\overline{a}, \overline{y})$.

Пусть T $\Delta - M$ -теория, $S^M(X)$-множество всех позитивных $\Sigma^+_{\alpha+1}$ полных n-типов над X, совместных с T, для каждого конечного n.

Пусть A -класс всех подмножеств M, P-класс всех $\Sigma^+_{\alpha+1}$ -типов (не обязательно полных), пусть $PJNF \subseteq P \times A$-некоторое бинарное отношение. Мы накладываем на $PJNF$ (позитивно йонсоновский неforкинг) следующие аксиомы:

Аксиома 1. Если $(p, A) \in PJNF,\ f \in Aut(M),\ f(A) = B,$ то $(f(p), B) \in PJNF$.

Аксиома 2. Если $(p, A) \in PJNF, q \subseteq p$, то $(q, A) \in PJNF$.

Аксиома 3. Если $A \subseteq B \subseteq C, p \in S^{PM}(C),$ то $(p, A) \in PJNF \Leftrightarrow (p, B) \in PJNF$ и $(p|B, A) \in PJNF.$

Аксиома 4. Если $A \subseteq B, dom(p) \subseteq B, (p, A) \in PJNF,$ то $\exists q \in S^{PM}(B)$ $(p \in q$ и $(q, A) \in PJNF).$

Аксиома 5. Существует кардинал μ такой, что если $A \subseteq B \subseteq C, p \in S^M(B), (p, A) \in PJNF$, то $\left|\{q \in S^M(C) : p \subseteq q \text{ и } (q, A) \in PJNF\}\right| < \mu$.

Аксиома 6. Существует кардинал ρ такой, что $\forall p \in P, \forall A \in A$, если $(p, A) \in PJNF,$ то $\exists A_1 \subseteq A, (|A_1| < \rho$ и $(p, A_1) \in PJNF).$

Аксиома 7. Если $p \in S^M(A)$, то $(p, A) \in PJNF$.

Классическое понятие форкинга принадлежит Шелаху.

Определение 2. Множество формул $\left\{\varphi\left(\bar{x}, \bar{a}_i\right) : i < k\right\} = p$ называется $k-$несовместным для некоторого положительного целого k, если каждое конечное подмножество p мощности k несовместно, т.е. $\models \neg \bar{x}(\varphi(\bar{x}, \bar{a}_{i_1}) \wedge ... \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{a}_{i_k}))$ для каждого $i_1 < ... < i_k < k.$

Частичный тип делится над множеством относительно $k \in \omega$, если существует формула $\varphi\left(\bar{x}, \bar{a}\right)$ и последовательность $\left\langle \bar{a}_i : i \in \omega \right\rangle$ такая, что

1) $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$,

2) $tp(\bar{a} / A) = tp(\bar{a}_i / A)$ для всех i,

3) $\left\{\varphi\left(\bar{x}, \bar{a}_i\right) : i \in \omega\right\}$ $k-$несовместно.

Также p делится над A относительно некоторого k. Кроме того, p форкуется над A в T, если существуют формулы $\varphi_0(\bar{x}, \bar{a}_0), ..., \varphi_n(\bar{x}, \bar{a}_n)$ такие, что:

(i) $p \models \bigcup_{0 \le i \le n} \varphi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$,

(ii) $\varphi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ делится над A для каждого i.

Следующая договоренность является важной. Фактически, мы будем говорить о семантическом аспекте $\Delta - M$ теории. Если $\Delta - M$ -теория T является $\alpha-$йонсоновской, то с $ModT$ мы работаем как с классом моделей некоторой йонсоновской теории. Если же $\Delta - M$ -теория T не является $\alpha-$йонсоновской, то в качестве $ModT$ мы будем рассматривать класс ее позитивно экзистенциально замкнутых моделей $\Sigma^+_{\alpha+1}T$. Такой подход для класса $\Sigma^+_{\alpha+1}T$-класса экзистенциально замкнутых моделей произвольной универсальной теории T был рассмотрен в [3]. Так как относительно йонсоновских теорий возможны два случая: совершенный и несовершенный, то мы будем придерживаться следующего. Хорошо известно, что если йонсоновская теория T совершенна, то класс ее экзистенциально замкнутых моделей элементарен и совпадает с $ModT^*$, где T^* -ее центр. В противном случае, т.е. если теория T несовершенна, мы поступаем аналогично [3], только вместо $ModT$работаем с классом $\Sigma^+_{\alpha+1}T$. Этот класс рассматривается как расширение E_T -класса экзистенциально замкнутых моделей (оба класса всегда существуют), и в зависимости от совершенности и несовершенности теории T теоретико-модельные свойства класса $\Sigma^+_{\alpha+1}T$ представляют особый интерес. В данной статье при рассмотренном Δ рассматриваемые $\Delta - M$ -теории являются $\Delta - M$ -совершенными, что является естественным обобщением совершенности в йонсоновском смысле.

Определение 3. Следуя [5], мы говорим, что модель $A \in K$ является simple в классе K, если для любого $B \in K$ такого, что существует гомоморфизм $h: A \to B$, следует, что h является вложением. Мы говорим, что теория T удовлетворяет условию (S), если каждая модель $A \in K$ является simple в классе K. В [5] замечено, что (S) эквивалентно следующему синтаксическому свойству: (S') Каждая экзистенциальная формула в L эквивалентна в T некоторой позитивной экзистенциальной формуле.

Легко заметить, что не йонсоновская $\Delta - M$ -теория T в силу договоренности о $ModT$ удовлетворяет свойству (S').

Мы будем использовать в доказательстве теоремы 2 следующие результаты:

Теорема 1 (Ramsey F.P.) Пусть I -бесконечное множество, $n < \omega, |I|^n$ -семейство всех подмножеств множества I, которые состоят точно из n элементов. Если $|I|^n = A_0 \cup ... \cup A_{k-1}, k < \omega, A_i \cap A_j = \varnothing$ с $i < j < k$, то существует бесконечное $J \subset I$ такое, что $|J|^n \subset A_i$ для некоторого $i < k$.

Лемма 1. [6, лемма 14.9] Пусть T стабильная теория, M насыщенная модель мощности μ^+, типы $p_1, p_2 \in S(M)$ не форкуется над A. Тогда если $p_1 \upharpoonright A = p_2 \upharpoonright A$, то существует тождественный на A элементарный мономорфизм f такой, что $f(d_1) \sim d_2$, где d_1, d_2 -схемы, определяющие p_1, p_2 соответственно.

Класс всех Δ-позитивно $\alpha+1$ экзистенциально замкнутых моделей теории T обозначим через $\Sigma^+_{\alpha+1}T$.

Определение 4. Мы, говорим что $\Delta - M$ -теория T $M - \lambda$ стабильна, если для любой модели $A \in \Sigma^+_{\alpha+1}T$, для любого подмножества X множества A, $|X| \le \lambda \Rightarrow |S^M(X)| \le \lambda.$ $\Delta - M$ -теория T M -стабильна, если она $M - \lambda$-стабильна
для некоторого λ.

Вопросы, касающиеся стабильности $\Delta - M$ -теорий в более общей ситуации, но в более бедной сигнатуре , рассмотрены в [7], [8], [9], [10].

Мы получили следующие результаты относительно таких теорий.

Теорема 2. Пусть T $\Delta - M$ -теория, α -йонсоновская, совершенная, полная для $E_{\alpha+1}$-предложений, $\lambda \ge \omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T - $M - \lambda$-стабильна;

2) $T^* - \lambda$ -стабильна, где T^* -центр йонсоновской теории T.

Теорема 3. Пусть $T - \Delta - M$ -теория, α -йонсоновская, совершенная, полная для $\Sigma_{\alpha+1}$-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) отношение $PJNF$ удовлетворяет аксиомам 1-7 относительно теории T;

2) T^* стабильна и для любых $p \in P, A \in A((p, A) \in PJNF \Leftrightarrow p$ не форкуется над A в смысле Шелаха).

Формулировка следующей теоремы на языке центральных типов в обогащенной сигнатуре , выглядит следующим образом:

Теорема 4. Пусть T $\Sigma_{\alpha+1}$-полная, совершенная $\Delta - M$ теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Теория $T^{c}-P-\lambda$ -стабильна в смысле [11];

2) Теория $T^{*}-J-P-\lambda$ -стабильна.

Остановимся на том, что означает выделенный предикат. В свое время известный французский математик Б.Пуаза определил понятия элементарной пары моделей. По сути это модель, в которой в качестве элементарной подмодели рассматривается реализация одноместного предикатного символа. В дальнейшем Мустафиным Т.Г. было введено понятие T -стабильности, которое обобщает вышеуказанное понятие элементарной пары. Последним достижением в связи с этим вопросом является понятие E -стабильности, введенное и рассмотренное Палютиным Е.А. Понятие E -стабильности отличается от понятия T -стабильности в том смысле, что оно устойчиво относительно определимости. Напомним, что в классическом случае если теория стабильна, то любой тип определим.

Заметим, что вышеуказанное обогащение сигнатуры сохраняет определимость полученной стабильности.

Замечание. Заметим, что так как теория, полная для экзистенциальных предложений, удовлетворяет свойству совместного вложения (JEP), но обратное не верно условие $\Sigma_{\alpha+1}$-полноты в теореме снять нельзя. В связи с тем, что существует континуум не элементарно эквивалентных между собой экзистенциально замкнутых групп, а теория групп является йонсоновской, то можно сделать вывод, что в условии теоремы нельзя убрать требование совершенности.

А теперь мы приведем результаты связанные с подобиями $\Delta-M$ теорий в обогащенной сигнатуре. Аналогичные вопросы рассмотрены в [12], [13], [14], [15].

Пусть T - произвольная $\Delta-M$ -теория, тогда $E^{+}(T)=\bigcup_{n,m<\omega}E^{+}_{n,m}(T)$, где $E^{+}_{n,m}(T)$-решетка позитивных экзистенциальных формул с n свободными переменными и с m-переменами кванторов.

Определение 5. Пусть T_1 и T_2 $\Delta-M$ -теории. Мы будем говорить, что T_1 и T_2 $\Delta-M$ синтаксически подобны, если существует биекция $j:E^{+}(T_1)\to E^{+}(T_2)$ такая, что

1) ограничение f до $E^{+}_{n,m}(T_1)$ есть изоморфизм решеток $E^{+}_{n,m}(T_1)$ и $E^{+}_{n,m}(T_2)$, $m, n<\omega$,

2) $f(\exists v_{n+1}\varphi)=\exists\varphi_{n+1}f(\varphi), \varphi\in E^{+}_{n}(T), n<\omega$

3) $f(v_1=v_2)=(v_1=v_2)$.

Один из полученных результатов в рамках выше указанных определений выглядит следующим образом:

Теорема 5. Пусть T_1 и T_2 -Σ^{+}_{m+1}-полные, совершенные, йонсоновские $\Delta-M$ -теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T_1^{*} и T_2^{*} $\Delta-M$ -синтаксически подобны,

2) T_1^{c} и T_2^{c} - синтаксически подобны (в смысле [13]).

Вообще говоря, в определении синтаксического подобия не предполагается совпадения сигнатур рассматриваемых теорий. Если в дальнейшем предположить, что все теории одной сигнатуры и не различать между собой изоморфные модели, то мы имеем следующие результаты.

Теорема 6. Пусть T_1 и T_2 -$\Delta-M$ -теории, которые совершенные, йонсоновские, Σ^{+}_{m+1}-полные, Тогда если они $\Delta-M$ -синтаксически подобны, то их центры $\Delta-PJ$ -косемантичны между собой.

Все неопределенные в данной статье понятия можно прочитать в [16].

Литература:

1. Ешкеев А.Р., О центральных типах Δ-PM -теорий. // Вестник КарГУ. Серия математика. - 2009. - №4 (56). – С. 34 -39.

2. Ешкеев А.Р. Категоричные позитивные теории. Синтаксис и семантика логических систем: Материалы российской школы-семинара, посвященной 100-летию со дня рождения Курта

Геделя, (23-27 август).- Иркутск: Институт математики СО РАН, Изд-во гос. пед. ун-т, 2006. - С. 28-32.

3. Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно йонсоновских теорий булевых алгебр// Математические труды. – Новосибирск, 1998. – Т.1. - №1. – С. 135-197.

4. Ешкеев А.Р. Счетная категоричность $\Delta - PM$-теорий. // Тезисы докладов 12-ой Межвузовской конференции по математике, механике и информатике (10-14 сентября 2008г.). - Алматы: Изд. «Қазақ университеті», 2008. – С.67.

5. Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/Под ред. Дж.Барвайса. Теория моделей: пер. с англ. - М.:Наука, Ллавная редакция физико-математической литературы, 1982.- 126 с.

6. Мустафин Т.Г. Стабильные теории. – Караганда, 1981. – 92 с.

7. Ешкеев А.Р. PM - стабильность Δ-PM -теорий.// Тезисы докладов. Вычислимость и модели: Материалы международной научной конференции, (30 августа- 1 сентября). - Усть-Каменогорск, 2009. - С.12-13.

8. Ешкеев А.Р., Бегетаева Г.С. Стабильность $\Delta - PM$ теории и её центра. // Вестник КарГУ. Серия математика, - 2009. – №4 (56). – С. 29-34.

9. Ешкеев А.Р. О форкинге для $\Delta - PM$ теории и стабильность центральных типов $\Delta - PJ$-теорий в обогащённой сигнатуре. // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. - 2009. - № 3(62). – С. 8-15.

10. Yeshkeyev A.R. On Jonsson stability and some of its generalizations. - Journal of Mathematical Sciences. – Springer New York, Volume 166, 2010. – Number 5. – P. 646 - 654

11. Мустафин Т.Г., Нурмагамбетов Т.А. О P-стабильности полных теорий// Структурные свойства алгебраических систем. // Сборник научных трудов. - Караганда: Изд. КарГУ, 1990. - С. 88-100.

12. Ешкеев А.Р. Подобие теорий предметных областей. Знания – Онтологии-Теории: (ЗОНТ-09) ИМ СО РАН: // Материалы Всероссийской конференции (22-24 октября). - Новосибирск, 2009. – С. 207-212.

13. Ешкеев А.Р. О косемантичности центральных типов $\Delta - PJ$-теорий. //Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления, посвящённой 60-летию д.т.н., проф., академика Нац.инж.акад. Биярова Т.Н. // Материалы Международной научно-практической конференции (19-20 ноября).- Алматы, 2009. – С. 442-443.

14. Ешкеев А.Р. О подобии и косемантичности центральных типов в позитивных обобщениях йонсоновских теорий // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. - 2009.- № 5(64). – С.7-14.

15. Yeshkeyev A.R., Begetayeva G.S. On similarities of Jonsson's theories and it's generalizations Education and Science without borders, Journal, Volume 1, Prague, Czech Republic, 2010.- № 1.- P.128-130.

16. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. (Учебное пособие). - Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. – 250с.

Резюме

При изучении стабильностных свойств теорий, важную роль играет понятие форкинга, введенное С.Шелахом при изучении спектральных вопросов полных теорий. Йонсоновские теории вообще говоря неполны. В данной статье приведены некоторые результаты относительно аксиоматического задания форкинга на случай $\Delta - M$-теорий, которые являются позитивным обобщением йонсоновских теорий. Также были рассмотрены понятие центрального типа при некотором обогащении сигнатуры и связь центрального типа с самой теорией. С помощью синтаксического подобия рассмотрены инвариантные относительно семантического подобия некоторые стабильностные свойства в классе $\Delta - M$-теорий.

Ключевые слова: йонсоновская теория, экзистенциально замкнутая модель, форкинг, центральный тип, синтаксическое и семантическое подобие йонсоновских теорий.

Түйіндеме

Теориялардың стабилдік қасиеттерін зерттегенде форкинг деген ұғым өте маңызды роль ойнайды. Бұл ұғымды С.Шелах толық теориялардың спектралды сұрақтарды зерттегенде енгізген. Йонсондық теориялар жалпы айтқанда толық емес. Бұл мақалада аксиомалық түрде форкинг анықтау проблемамен $\Delta - M$ -теориясының аясында кейбір нәтижелер келтірілген. Бұл теориялар йонсондық теориялардың позитивті жалпыламалары болып табылады. Сигнатураның кейбір байытуда централдық типтің ұғымы қарастырылған, сонымен қатар осы типтің теориямен байланыстары көрсетілген. Синтактикалық ұқсастық бойынша семантикалық ұқсастық арқылы инвариантты кейбір стабилді қасиеттер $\Delta - M$ -теорияларының кластар аясында қарастырылған.
Кілт сөздер: йонсондық теория, экзистенциалды тұйық модель, форкинг, централдық тип, йонсондық теориялардың синтактикалық және семантикалық ұқсастығы.

Summary

The concept of forking plays an important role in investigating stable feafures of theories, introduced by S.Shelah in the study of spectral problems of complete theories. Some stabie invariant properties are considered under the $\Delta - M$ theory classes.

Jonsson theories in general are incomplete. In this article we present some results concerning the axiomatic forking on tasks case of $\Delta - M$ -theories, lohich are positive generalization of Jonsson theories. The article also deals with central type concept for some enrichment of signature and connection with the central type of this theory.
Key words: Jonsson theory, existentially closed model, forking, central type, the syntactic and semantic similarity of Jonsson theories.

УДК 510.67

РЕШЁТКИ ПОЗИТИВНО ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМУЛ Δ-ЙОНСОНОВСКОЙ ТЕОРИИ В ДОПУСТИМЫХ ОБОГАЩЕНИЯХ СИГНАТУРЫ

А.Р. ЕШКЕЕВ, доктор физико-математичемких наук, доцент,
Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова,
Р.М.ОСПАНОВ
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва, г.Астана,
Республика Казахстан

Введение. В данной статье рассматриваются позитивные йонсоновские теории счетного языка первого порядка, а именно Δ-йонсоновские теории. Получен ряд результатов, устанавливающих связь между свойствами йонсоновской теории, центрального пополнения данной йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории. В терминах решетки формул, введенных в работе [1], (дополняемость, псевдо-дополняемость, слабая дополняемость, алгебра Стоуна) найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории, позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории, совершенности йонсоновской теории, йонсоновости центрального пополнения йонсоновской теории.

При изучении полных теорий одним из основных методов является метод использования свойств топологического пространства $S_n(T)$ ультрафильтров булевой алгебры $F_n(T)$ фиксированной теории T. С помощью этого метода исследуются такие классические понятия теории моделей, как стабильность модели и теории, насыщенность модели, однородность модели, диаграмма модели и т.д. В случае неполной теории мы можем рассмотреть решетку $E_n(T)$ экзистенциальных формул, которая является подрешеткой булевой алгебры $F_n(T)$. В силу незамкнутости экзистенциальных формул в общем случае относительно булевых логических операций свойства топологического пространства экзистенциальных типов существенно отличается от полного случая. Понятно, что такой подход (ограничение $F_n(T)$ до $E_n(T)$) является обобщением случая, когда мы имеем дело с полными теориями. Так как йонсоновские теории являются, вообще говоря, неполными, было бы интересно рассмотреть свойства решетки экзистенциальных формул в связи с выше указанным контекстом (например, как в [1]). Основным инструментом исследования йонсоновской теории является семантический метод, предложенный в свое время профессором Т.Г.Мустафиным, суть которого заключается в трансляции свойств центрального пополнения на йонсоновский прообраз. В данной работе помимо семантического метода [2] и других общих результатов о йонсоновских теориях [3],[4],[5] используются понятия и результаты из работы [1] В. Вайспфеннинга.

Работа состоит из двух параграфов. В первом параграфе приводятся перечень тех определений и результатов из работ [1],[6],[7],[8],[9], которые необходимы для получения основных результатов данной работы. Во втором параграфе непосредственно рассматриваются позитивные йонсоновские теории вобогащенном языке и на языке центральных типов для них доказываются «позитивные йонсоновские» аналоги теорем из [1] на основе результатов авторов данной статьи из [3],[4],[5].

Параграф 1. Решетки экзистенциальных формул. Введем определения понятий и дадим связанные с ними результаты относительно решеточных свойств экзистенциальных формул, основываясь на [1],[6],[7],[8],[9].

Пусть L - язык первого порядка. Пусть T – индуктивная теория языка L. Обозначим через $E_n(L)$ множество всех экзистенциальных формул языка L с n свободными переменными, $E(L) = \bigcup\limits_{n<\omega} E_n(L)$. Пусть $E_n(T)$ - дистрибутивная решетка классов эквивалентности $\varphi^T = \{\psi \in E_n(L) \mid T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$, $\varphi \in E_n(L)$, $E(T) = \bigcup\limits_{n<\omega} E_n(T)$.

Определение 1.1. [1] Пусть $\varphi^T, \psi^T \in E_n(T)$ и $\varphi^T \cap \psi^T = 0$. Тогда ψ^T называется дополнением φ^T, если $\varphi^T \cup \psi^T = 1$; ψ^T называется псевдо-дополнением φ^T, если для всех $\mu^T \in E_n(T)$ $\varphi^T \cap \mu^T = 0 \Rightarrow \mu^T \le \psi^T$; ψ^T называется слабым дополнением φ^T, если для всех $\mu^T \in E_n(T)$ $(\varphi^T \cup \psi^T) \cap \mu^T = 0 \Rightarrow \mu^T = 0$.

Определение 1.2. [1]

1) φ^T называется дополняемым, если φ^T имеет дополнение.

2) φ^T называется слабо дополняемым, если φ^T имеет слабое дополнение.

3) φ^T называется псевдо-дополняемым, если φ^T имеет псевдо-дополнение.

4) $E_n(T)$ называется дополняемой, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ дополняем.

5) $E_n(T)$ называется слабо дополняемой, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ слабо дополняем.

6) $E_n(T)$ называется псевдо-дополняемым, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ псевдо-дополняем.

Далее рассмотрим формулы, устойчивые относительно расширений моделей и подмоделей.

Определение 1.3. [7] Формула $\varphi(x_1,..., x_n)$ называется устойчивой относительно расширений моделей в $ModT$, если для любых моделей A и B теории T таких, что $A \subset B$, и для любых $a_1,..., a_n \in A$ из того, что $A \models \varphi[a_1,..., a_n] \Rightarrow B \models \varphi[a_1,..., a_n]$.

Теорема 1.1. [7] Формула φ устойчива относительно расширений моделей в $ModT$ тогда и только тогда, когда существует экзистенциальная формула ψ такая, что $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Определение 1.4. [7] Формула $\varphi(x_1,..., x_n)$ называется устойчивой относительно подмоделей в $ModT$, если для любых моделей A и B теории T таких, что $A \subset B$, и для любых $a_1,..., a_n \in A$ из того, что $B \models \varphi[a_1,..., a_n] \Rightarrow A \models \varphi[a_1,..., a_n]$.

Теорема 1.2. [7] Формула φ устойчива относительно подмоделей в $ModT$ тогда и только тогда, когда существует универсальная формула ψ такая, что $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Рассмотрим понятие инвариантной формулы и связь между инвариантностью экзистенциальной формулы и дополняемостью её класса в $E(T)$.

Определение 1.5. [1] Формула φ называется инвариантной в $ModT$, если она устойчива одновременно относительно расширений моделей в $ModT$ и относительно подмоделей в $ModT$.

Теорема 1.3. [1] Экзистенциальная формула φ инвариантна в $ModT$ тогда и только тогда, когда φ^T дополняем в $E(T)$.

Теорема 1.4. [1] Экзистенциальная формула φ инвариантна в $Mod(Th_{\forall\exists}(E_T))$, где E_T - класс экзистенциально замкнутых моделей теории T, тогда и только тогда, когда φ^T слабо дополняем в $E(T)$.

Введем необходимые определения и сформулируем известные результаты, которые устанавливают связь между модельной полнотой, элиминацией кванторов, позитивной модельной полнотой теории T и свойствами решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$.

Определение 1.6. [7] Теория T называется модельно полной, если $T \cup \Delta_A$ полна в языке L_A для любой модели A теории T.

Теорема 1.5. [7]

1) Теория T модельно полна тогда и только тогда, когда каждая формула устойчива относительно подмоделей в $ModT$.

2) Теория T модельно полна тогда и только тогда, когда каждая формула устойчива относительно расширений моделей в $ModT$.

Определение 1.7. [7] Говорят, что теория T допускает элиминацию кванторов в L, если для каждой формулы $\varphi(x_1,..., x_n)$ языка L существует бескванторная формула $\psi(x_1,..., x_n)$ такая, что $T \vdash \forall x_1 ... \forall x_n (\varphi(x_1,..., x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,..., x_n))$.

Теорема 1.6. [6]

1) Пусть T' – модельный компаньон теории T, где T – универсальная теория. В этом случае T' – модельное пополнение T, если и только если теория T допускает элиминацию кванторов.

2) Пусть T' – модельный компаньон теории T. В этом случае T' – модельное пополнение T, если и только если теория T обладает свойством амальгамируемости.

Определение 1.8. [7] Теория T называется подмодельно полной, если $T \cup \Delta_A$ полна в L_A для любой подмодели A модели теории T.

Теорема 1.7. [7] Теория T подмодельно полна тогда и только тогда, когда T допускает элиминацию кванторов.

Теорема 1.8. [1] Теория T подмодельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение.

Определение 1.9. [9] Теория T называется позитивно модельно полной, если она модельно полна и каждая экзистенциальная формула языка L эквивалентна в T позитивной экзистенциальной формуле.

В следующих теоремах, полученных в работе [1], устанавливается связь между выше определенными понятиями и свойствами решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$

Теорема 1.9. [1] Теория T позитивно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.

Теорема 1.10. [1] Теория T имеет модельный компаньон тогда и только тогда, когда $E_n(T)$ слабо дополняема.

Определение 1.10. [8] Решетка называется алгеброй Стоуна, если для любого её элемента верно следующее: псевдо-дополнение от псевдо-дополнения элемента равно самому элементу.

Теорема 1.11. [1] Теория T имеет модельное пополнение тогда и только тогда, когда $E_n(T)$ - алгебра Стоуна.

Теорема 1.12. [1] Теория $T_\forall$ имеет модельное пополнение тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое бескванторное дополнение.

Параграф 2. Позитивные йонсоновские теории, их центры и их связь на языке свойств решеток экзистенциальных формул этих теорий. Рассмотрим позитивные йонсоновские теории и установим связь между свойствами позитивной йонсоновской теории, центрального пополнения позитивной йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории. Для этого мы будем использовать результаты из [3],[4],[5].

Дадим вначале следующие определения и результатами, связанные просто с йонсоновскими теориями и соответственно их решетками формул.

Определение 2.1. Теория T называется йонсоновской, если

1) T имеет бесконечную модель;

2) T $\forall\exists$- аксиоматизируема;

3) T обладает свойством совместного вложения (JEP), то есть любые две модели $A \models T$ и $B \models T$ изоморфно вкладываются в некоторую модель $C \models T$;

4) T обладает свойством амальгамируемости (AP), то есть если для любых $A, B, C \models T$ таких, что $f_1 : A \to B$, $f_2 : A \to C$ - изоморфные вложения, существуют $D \models T$, изоморфные вложения $g_1 : B \to D$, $g_2 : C \to D$ такие, что $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

Определение 2.2. [4] Семантической моделью C_T йонсоновской теории T называется ω^+-однородная - универсальная модель теории T (в смысле [10]).

Следующие определения даны в [10].

Определение 2.3. [10] Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель M теории T называется

- κ-универсальной для T, если каждая модель T мощности строго меньше κ изоморфно вкладывается в M;

- κ-однородной для T, если при любых двух моделях A и A1 теории T, являющихся подмоделями M мощности строго меньше κ, и изоморфизме f:A$\to$A1, для каждого расширения B модели A, являющегося подмоделью M и моделью T мощности строго меньше κ, существуют расширение B1 модели A1 , являющееся подмоделью M, и изоморфизм g:B$\to$B1, продолжающий f.

Определение 2.4. [10] Однородной-универсальной для T моделью называется κ-однородная-универсальная для T модель мощности κ, где $\kappa \geq \omega$.

Определение 2.5.[4] Центром (центральным пополнением) йонсоновской теории T называется T*=Th(C_T).

Определение 2.6.[4] Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель C_T является насыщенной моделью T*.

В работе [6] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и существованием её модельного компаньона. В дальнейшем нам будут необходимы следующие утверждения.

Теорема 2.1. [4] Пусть T - йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;
2) T имеет модельный компаньон.

В работах [3], [4] была установлена связь между полнотой и модельной полнотой йонсоновской теории.

Теорема 2.2. Пусть T - йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T полна;
2) T модельно полна.

В работе [5] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и свойствами решетки $E_n(T)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть T - полная для $\exists$-предложений йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;
2) T* модельно полна;
3) $E_n(T)$ - булева алгебра,

где полнота теории для $\exists$-предложений означает, что любые две модели этой теории относительно экзистенциальных предложений не отличаются друг от друга.

В связи с выше указанными результатами относительно введенных понятий нами получены результаты, связывающие понятия из [1] с йонсоновскими теориями.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории Т и позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории Т.

Теорема 2.4. Пусть Т – полная для $\exists$-предложений йонсоновская теория, Т* - центр теории Т. Тогда

1) Т* допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение;

2) Т* позитивно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия совершенности йонсоновской теории Т.

Теорема 2.5. Пусть Т – йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Т - совершенна;

2) $E_n(T)$ слабо дополняема;

3) $E_n(T)$ - алгебра Стоуна.

В следующей теореме в терминах решетки формул найдены необходимые и достаточные условия йонсоновости центра йонсоновской теории.

Теорема 2.6. Пусть Т – йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Т* - йонсоновская теория;

2) каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение.

Теперь мы хотим перейти к одному из позитивных случаев и в частности рассмотреть свойства позитивных решеток в этом случае.

Для этого определим язык формул с которыми нам предстоит работать.

Пусть *L* язык первого порядка. *At* – есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ – замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ – есть множество формул в пренексном нормальном виде полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At))$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ – это произвольная булева комбинация формул из L^+. Таким образом в дальнейшем мы в качестве морфизмов имеем только погружения.

Когда $\Delta = B(At)$ мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$-аксиомы.

В дальнейшем все определения понятий касающихся йонсоновских теорий (в обычном смысле) считаются известными и их можно извлечь, например, в [11].

Определим понятие Δ-йонсоновских теорий(Δ-J-теории).

В том случае, если при некотором фиксированном Δ, в определении $\Delta - PJ$ теории (см. определение в [11]) заменить все Δ-продолжения на Δ-погружения, то мы получим определение Δ-йонсоновских теорий(Δ-J-теории).Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличии от (Δ-PJ) теорий, которые могут быть вообще говоря и нейонсоновскими. В нашем случае это не так, так как продолжения всегда являются вложениями.

Следующим новым шагом в рассмотрении нашей задачи будет обогащение сигнатуры языка.

Пусть T – произвольная $\Delta - R$-теория в языке сигнатуры σ. Пусть C – семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$. Рассмотрим следующую теорию $T_\Gamma^{PgM}(A) = Th_{\forall^+}(C,\ a)_{a \in A} \cup \{g(a) = a \mid a \in A\} \cup g(c) \cup T_g \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где T_g - выражает тот факт, что для любой модели $(M,\ g^M) \models T_g$ имеет место:

1) g^M - автоморфизм M;

2) $\{m \in M \mid g^M(m) = m\}$ есть универсум некоторой экзистенциально замкнутой подмодели M, для любой модели M сигнатуры σ.

Для предиката P мы записываем выражение $\{"P \subseteq"\}$, что по своей сути есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. В силу неполноты мы не записываем точную связь между элементами $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$, но предполагается их согласованность в рамках теории $T_\Gamma^{PgM}(A)$.

Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - M$-ности теории T^*, существует её центр и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ, теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T.

И основным результатом данной работы мы считаем следующее утверждение, полученное на языке центрального типа рассматриваемой теории.

Теорема 2.7.

Пусть теория T есть полная для экзистенциальных предложений Δ-J-теория в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T^* - совершенна;

2) $E_n(T)$ - алгебра Стоуна.

3) $E_n(T^c)$- булева алгебра.

Литература:

1. Volker Weispfenning. The model-theoretic significance of complemented existential formulas. - The Journal of Symbolic Logic, Volume 46, Number 4, Dec. 1981, p.p. 843 – 849.
2. Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр. // Математические труды. - Новосибирск: Изд. Инстит. Мат., 1998. - Т.1. - №2. -С.135-197.
3. Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М. Связь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрема. // Труды V-Казахско-Французского коллоквиума по теории моделей. Сборник научных трудов. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2001. - С. 65-75.
4. Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М. Йонсоновские теории и их компаньоны. // Материалы 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. –Алматы: 2005. - Т.1. – С.185-190.
5. Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М. Некоторые свойства решетки формул йонсоновских теорий. // Материалы международной конференции «Проблемы современной математики и механики» (20-22 сентября). - Алматы, 2005. - С.134.
6. Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/ Под ред. Дж.Барвайса.-Ч.1. Теория моделей: пер. с англ. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. - С. 126.
7. Кейслер, Чэн. Теория моделей. – пер. с англ. - М.: Мир, 1977.
8. Биркгоф Г. Теория решеток. – пер. с англ. Салий В.Н. - М.:Наука, 1984.
9. Macintyre A. Model-completeness for sheaves of structures. – Fundamenta Mathematicae, vol.81 (1973), pp.73-89.
10. Yerulan Mustafin. Quelques proprietes des theories de Jonsson. - The Journal of Symbolic Logic, Volume 67, Number 2, June 2002, p.p. 528 – 536.
11. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. - Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. – 250 с.

Резюме

Основной целью данной работы является описание структуры решетки экзистенциальных формул некоторого позитивного класса йонсоновских теорий в некотором обогащении сигнатуры. Для них дан критерий совершенности этой теории на языке рассматриваемых решеток формул центрального типа этой теории.

Ключевые слова: позитивная йонсоновская теория, решетка экзистенциальных формул, обогащение сигнатуры, совершенность теории.

Түйіндеме

Айтылмыш жұмыстың негізгі мақсаты ол кейбір сигнатураны байытуда йонсондық теориялардың кейбір позитивті кластың экзистенциалды формулалар торының сипаттамасын беру. Олар үшін осы теорияның орталық түрдегі формулалар торы арқылы кемелділігінің критерийі беріледі.

Кілт сөздер: позитивті йонсондық теория, экзистенциалдық формулалар торы, сигнатураны байыту, теорияның кемелділігі.

Summary

The main purpose of this work is to describe texistentail formulas lattice structure of some positive class of the Jonsson theories in a certain signature benefication. In this case the criteria of the theory perfection is given in the language of rearding formulas lattices of a theory central type.

Key words: Jonsson positive theory, lattice of existential formulas, benefication of a signature, a perfection of a theory.

УДК 510.67

КОНЕЧНЫЙ α - ФОРСИНГ ДЛЯ ПОЗИТИВНЫХ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ

А.Р. ЕШКЕЕВ, доктор физико-математичемких наук, доцент,
И.А.РЕПКИНА
Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова,
Республика Казахстан

Основной целью данной работы является дать основные понятия и результаты в связи с понятием конечного форсинга Робинсона [1], [2] для позитивных йонсоновских теорий. Все основные сведения о позитивных йонсоновских теориях можно найти в источнике [3].

Напомним, как строятся базисные множества для произвольных счетных теорий с помощью некоторого обобщения в смысле кванторов конечного форсинга Робинсона в [3], [4]. В связи с результатами работы [5], мы можем с помощью позитивной морлизации выше указанные понятия свести к $B^{+}(At)$. Существенным является то, что во всех определениях, касающихся как моделей, так и формул мы будем иметь дело в качестве морфизмов лишь с погружениями. В [6] был введен класс теорий, который в пересечении с классом йонсоновских теорий, обобщает его, а также содержит обобщенные йонсоновские теории, введенные в [4]. Интересно рассмотреть связь форсинга для таких классов теорий, когда мы рассматриваем только погружения. Напомним определение этого класса.

Определение 1. Теория T называется Δ-позитивно мустафинской (Δ-PM)-теорией, если

1) теория T имеет бесконечные модели,

2) теория T является Π_{n+2}^{+}–аксиоматизируемой,

3) теория T допускает Δ-JEP,

4) теория T допускает Δ-AP.

Назовем теорию Δ- мустафинской (Δ-M)-теорией, если в определении 1 рассматриваются только погружения.

Пусть L - язык первого порядка. At – есть множество атомарных формул данного языка. $B^{+}(At)$ – замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^{+}(At))$ – есть множество формул в пренексном нормальном виде полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^{+}(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^{+}(At)) = L^{+}$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^{+})$ – это произвольная булева комбинация формул из L^{+}.

Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть Π_n^+ - множество всех формул языка L^+ вида $\forall\exists\ldots\varphi$ (т.е. формулы из L^+ с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Sigma_{n+1}^+ \subseteq L^+$. Пусть, далее C обозначает фиксированное счетное бесконечное множество новых константных символов, Т – произвольная $\Delta - M$ теория счетного языка L^+. В качестве основных логических связок возьмем $\exists, \wedge, \vee, \neg$. Через $AL^{+}(C)$ обозначим множество всех атомарных предложений языка $L^{+}(C), \neg AL^{+}(C) = \{\neg\varphi : \varphi \in AL^{+}(C)\}$.

Определение 2.

1) Если φ - атомная формула, то $sub(\varphi) = \{\varphi\}$;

2) $sub(\neg\varphi) = sub(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$;

3) $sub(\exists x\, \varphi(x)) = sub(\varphi(x)) \cup \{\exists x\, \varphi(x)\}$;

4) $sub(\varphi \wedge \psi) = sub(\varphi) \cup sub(\psi) \cup \{\varphi \wedge \psi\}$;

5) $sub(\varphi \vee \psi) = sub(\varphi) \cup sub(\psi) \cup \{\varphi \vee \psi\}$.

Определение 3. Множество $Б \subseteq L^{+}(C)$ предложений языка $L^{+}(C)$ называется базисным, если:

1) $\varphi \in Б \,\&\, \psi \in sub(\varphi) \,\&\, \psi$ - предложение влечет $\varphi \in Б$;

2) $\varphi \in Б \,\&\, \psi(\bar{x}) \in sub(\varphi) \,\&\, \bar{c} \in C \,\&\, L(\bar{c}) = L(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{c}) \in Б$;

3) Если $\varphi \in Б$ и не начинается с $\neg$ то $\neg\varphi \in Б$;

4) $AL^{+}(C) \subseteq Б$.

Определение 4. Пусть $Б$ - некоторое базисное множество. Тогда $p \subseteq Б$ называется $Б$ - условием, если

1) $|p| < \omega$;

2) $T \cup p$ совместно;

3) $\varphi \wedge \psi \in p \Rightarrow \varphi \in p \;\&\; \psi \in p$;

4) $\varphi \vee \psi \in p \Rightarrow \varphi \in p$ или $\psi \in p$;

5) $\exists x\, \varphi(x) \in p \Rightarrow$ существует такое $\bar{c} \in C$, что $\varphi(\bar{c}) \in p$.

Лемма 1. Если $Б$ - базисное множество, $p \subseteq Б$, $|p| < \omega$ и $T \cup p$ совместно, то существует такое $Б$-условие q, что $p \subseteq q$.

Определение 5. Индукцией по длине формул для любой пары (p, φ), где $p - Б$ - условие, φ - предложение $L^{+}(C)$ определим отношение $P \,|\!-^{Б} \varphi$ (“$Б$-условие p форсирует φ”):

1) $\varphi \in AL^{+}(C) \Rightarrow (p \,\|\!-^{Б} \varphi = \varphi \in p)$;

2) $p \Vdash^{Б} \varphi \wedge \psi = \left(p \Vdash^{Б} \varphi \,\&\, p \Vdash^{Б} \varphi\right)$;

3) $p \Vdash^{Б} \varphi \vee \psi = \left(p \Vdash^{Б} \varphi \text{ или } p \Vdash^{Б} \varphi\right)$;

4) $p \Vdash^{Б} \exists x\, \varphi(x) = \left(\exists \bar{c} \in C,\ p \Vdash^{Б} \varphi(\bar{c})\right)$;

5) $p \Vdash^{Б} \neg\varphi = \forall q \left(q \supseteq \bar{c} \,\&\, q - Б - \text{условие} \Rightarrow \text{не} \quad q \Vdash^{Б} \varphi\right)$;

Лемма 2. 1) Если $p, q - Б - \text{условия}, p \subseteq q, p \Vdash^{Б} \varphi, \text{ то } p \Vdash^{Б} \varphi$;

2) Если $p - Б$ условие, φ - предложение $L^{+}(C)$, то либо не $p \Vdash^{Б} \varphi$, то либо не $p \Vdash^{Б} \neg\varphi$;

3) Если $\varphi \in Б$ и $\varphi \in p$, то $p \Vdash^{Б} \varphi$;

4) Если $\varphi \in Б$ и $p \Vdash^{Б} \varphi$, то $p \cup \{\varphi\} \subseteq q$ для некоторого $Б$-условие q.

Определение 6. 1) Если $G \subseteq Б$, то $G \Vdash^{Б} \varphi$ означает, что существует такое $Б$-условия p, что $p \subseteq G$ и $p \Vdash^{Б} \varphi$;

2) Если $G \subseteq Б$, то G называется $Б$-генерическим множеством, если;

а) если $\varphi \in Б$ и $G \Vdash^{Б} \varphi$, то $\varphi \in G$;

б) $\forall\ p \subseteq G \quad \left(|p| < \omega \Rightarrow \exists\, q\ \left(q - Б - \text{условие} \,\&\ p \subseteq q \subseteq G\right)\right)$;

в) Для любого φ из $L^{+}(C)$ либо $G \Vdash^{Б} \varphi$, либо $G \Vdash^{Б} \neg\varphi$.

Лемма 3. Если $G - Б$-генерическое множество, то $T \cup G$ совместно и для любого предложения φ из $L^{+}(C)$ имеет место в точности одно из соотношений $G \Vdash^{Б} \varphi$ либо $G \Vdash^{Б} \neg\varphi$.

Лемма 4. Любое $Б$-условие содержится в некотором $Б$-генерическом множестве.

Теорема 1. Пусть $G - Б$-генерическое множество. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма счетная модель $M(G)$ языка $L^{+}(C)$ такая, что для любого предложения φ языка $L^{+}(C)$ имеет место $M(G) \models \varphi \Leftrightarrow G \Vdash^{Б} \varphi$.

Лемма 5. Пусть $G - Б$-генерическое множество, $\varphi, \psi \in Б$ и $\varphi \leftrightarrow \psi$ в логике первого порядка. Тогда $\varphi \in G \Leftrightarrow \psi \in G$.

Лемма 6. Для любого множества Q предложений языка $L^{+}(C)$ пересечение всех базисных множеств, содержащих Q, является базисным множеством (такое базисное множество обозначим через $[Q]$).

Примеры базисных множеств:

1). $R = AL(C) \cup \{\neg\varphi : \varphi \in AL(C)\}$ - робинсоновское базисное множество.

2). $Б_{\alpha} = \left[\Sigma_{\alpha}\left(L(C)\right)\right],\ 0 \le \alpha \le \omega$.

Теорема 2. Пусть Т – произвольная $\Delta - M$ теория счетного языка L^{+}. Тогда каждая $Б_{\alpha}$-генерическая модель является $\Sigma_{\alpha+1}$-замкнутой моделью T (позитивный аналог экзистенциальной замкнутости).

Лемма 7. Пусть Т – произвольная $\Delta - M$ теория счетного языка L^{+}, $\Phi_n \subseteq \Sigma_{\alpha+1}$ и $\Phi_n = \left\{\Phi_i^n\left(x_1,\ldots,x_{m_n}\right) : i < \omega\right\},\ n < \omega$.

Пусть для любого $n<\omega$, любых $c_1,\ldots,c_m \in C$, любого $Б_\alpha$-условия p существует такое $i<\omega$, что $T\cup p\cup\left\{\Phi_i^n\left(c_1,\ldots,c_{\substack{m\\n}}\right)\right\}$ совместно. Тогда существует генерическая модель M теории T, в которой выполнено бесконечное предложение

$$\bigwedge_{n<\omega}\forall x_1,\ldots,x_m \bigvee_{i<\omega}\psi_i^m\left(x_1,\ldots,x_m\right)$$

Стандартно определяется форсинг компаньон $\Delta - M$ теории.

T^f - есть форсинг компаньон теории T. $T^f=\{\varphi : T \Vdash \neg\neg\varphi\}$

Приведем некоторые определения и связанные с ними результаты относительно стабильности в йонсоновском и в позитивном смыслах, полученные ранее. Все эти понятия и результаты можно найти в [3].

Пусть T – йонсоновская теория, $S^J(X)$ – множество всех экзистенциональных полных n-типов над X, совместных с T, для каждого конечного n.

Определение 7. Мы говорим, что йонсоновская теория T $J-\lambda$-стабильна, если для любой T-экзистенционально замкнутой модели A, для любого подмножества X множества A, $|X|\le\lambda \Rightarrow |S^J(X)|\le\lambda$.

Следующий результат показывает, что стабильность в выше указанном смысле хорошо согласовывается с классическим понятием стабильности.

Теорема 3. Пусть T – полная для экзистенциональных предложений совершенная йонсоновская теория, $\lambda\ge\omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T - $J-\lambda$-стабильна;

2) T^* - λ-стабильна, где T^* - центр теории T.

Рассмотрим некоторые обогащения сигнатуры. Будем обогащение называть допустимым, если в этом случае получаемая стабильность будет гарантировать определимость рассматриваемых типов. В дальнейшем все рассматриваемые обогащения допустимы. Пусть T - произвольная йонсоновская теория сигнатуры σ, C - ее семантическая модель, A - подмножество модели C, P-новый одноместный предикатный символ. Рассмотрим в сигнатуре $\sigma_P(A)=\sigma_A\cup\{P\}$ следующую (вообще говоря, неполную) теорию $T_P^J(A)=Th_{\forall\exists}(C,a)_{a\in A}\cup\{P(c_a)\mid a\in A\}\cup\{"P\subseteq"\}$, где $\{"P\subseteq"\}$- бесконечное множество предложений, выражающие тот факт, что интерпретация символа P-это экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. Требование экзистенциальной замкнутости от подмодели существенно в том смысле, что она не должна быть конечной. Через S_P^J обозначим множество всех $\exists$-пополнений теории $T_P^J(A)$. Пусть λ - произвольный кардинал.

Рассмотрим понятие стабильности в обогащении.

Определение 8. Йонсоновская теория T называется йонсоновской P-λ-стабильной (в дальнейшем, $J-P-\lambda$-стабильной), если $|S^J(X)|\le\lambda$ для любого множества A мощности $\le\lambda$.

Определение 9. Йонсоновская теория T называется $J-P$-стабильной, если T является $J-P-\lambda$-стабильной для некоторого λ.

Следующие понятия связаны с йонсоновским обобщением понятия элементарной пары.

Пусть A,B - экзистенциально замкнутые модели йонсоновской теории T и выполняется включение $A\underset{\neq}{\subseteq}B$. Пусть $\sigma_P=\sigma\cup\{P\}$. И интерпретация одноместного предикатного символа P в B есть A.

Определение 10. Модель (A,B) называется йонсоновской элементарной парой теории T.

Теорией йонсоновских элементарных пар называется теория T_P^J класса K, где K - множество всех йонсоновских элементарных пар теории T.

Лемма 8. Если T - совершенная йонсоновская теория, то $T_P^J(A)$ - совершенная йонсоновская теория.

Теорема 4. Пусть T - совершенная йонсоновская $\exists$-полная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) центр теории T $P-\lambda$-стабилен (в смысле [7]),

2) теория T $J-P-\lambda$-стабильна.

Следствие 1. Пусть T-несчетно-категорическая йонсоновская $\exists$-полная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) теория йонсоновских элементарных пар T_P^J является $\exists$-полной теорий,

2) теория элементарных пар центра теории T полна (в смысле [8]).

Напомним определение стабильности в рамках $\Delta-PM$ теории. Пусть T-произвольная $\Delta-PM$-теория в языке сигнатуры σ. Пусть C-семантическая модель теории T. $A\subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A)=\sigma\cup\{c_a\mid a\in A\}\cup\Gamma$, где $\Gamma=\{P\}\cup\{c\}$. Рассмотрим следующую теорию $T_\Gamma^{PM}(A)=Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C,a)_{a\in A}\cup\{P(c)\}\cup\{"P\subseteq"\}$, где $\{"P\subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. Эта теория на обязательно полная. Через S_Γ^{PM} обозначим множество всех $\Sigma^+_{\alpha+1}$-пополнений теории $T-P-\lambda$-стабильна, если $\left|S_\Gamma^{PM}\right|\le\lambda$ для любого A. Такого, что $|A|\le\lambda$.

Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma=\{c\}$. В силу $\Delta-PM$-ности теории T^*, существует ее центр и мы обозначим его так T^C. При ограничения T^C до сигнатуры σ, теория T^C становится полным типом. Этот тип мы назовем центральным типом теории T.

Легко заметить, что выше указанное определение можно рассмотреть в рамках $\Delta-M$ теории. Мы получили следующий результат.

Теорема 5. Пусть λ произвольный бесконечный кардинал, T совершенная $\Delta-M$ теория, полная для позитивных экзистенциальных предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $T^*-P-\lambda$-стабильна;
2. $(T^*)^F$ - λ - стабильна в классическом смысле, где $(T^*)^F$ – форсинг компаньон теории T^* в обогащенной сигнатуре;
3. T^C - λ - стабильна в классическом смысле.

И в заключении хочется отметить, что выше указанная связь стабильности центрального типа совершенной $\Delta-M$ теории в рамках изучения форсинг компаньона данной теории естественно порождает серию вопросов относительно выше указанных результатов первого автора (Теорема 3, Теорема 4, Следствие 1).

Литература:

1. Barwise K.J., Robinson A. Completing theories by forcing, Ann. Math. Logic 2 (1970) 119-142.
2. Keisler H.J. Forsing and omitting tupes theorem. M.A.A. Studies. 1973, 8, p. 96-133.
3. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. - Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. – 250с.
4. Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические труды. – 1998. - Т.1. - №2. - С. 135-197.
5. Itay Ben-Yaacov. Positive model theory and compact abstract theories.- Journal of Mathematical Logic 3 (2003), no. 1, 85-118.

6. Ешкеев А.Р. Счетная категоричность $\Delta\text{-}PM$-теорий. // Тезисы. 12-ая Межвузовская конференция по математике, механике и информатике. - Алматы, 2008.
7. Мустафин Т.Г. Новые понятия стабильности теорий. В сб. "Труды советско- французского коллоквиума по теории моделей". - Караганда, 1990. - С.112 – 125.
8. Poizat B. Paires des structures stables// J.Symbolic Logic. –1983. – №48. - p. 239-249.

Резюме

В данной работе рассмотрен позитивный аналог конечного α - форсинга для $\Delta\text{-}M$ теории. Показана эквивалентность стабильности центрального типа такой теории с её форсинг компаньоном при условии совершенности и позитивной экзистенциальной полноты.

Ключевые слова: йонсоновская теория, позитивно-йонсоновская теория, форсинг, форсинг компаньон, центральный тип.

Түйіндеме

Осы жұмыста $\Delta - M$ - теория үшін шекті α–форсингтің позитивті аналогы қарастырылған. Стабильділік және позитивті экзистенциалды толықтылығы арқылы берілген теорияның централдық типтің және теорияның форсинг компаньондық парапарлығы көрсетілген.

Кілт сөздер: йонсондық теория, позитивті-йонсондық теория, форсинг, форсинг компаньон, централдық тип.

Summary

In the given paper we consider the positive analog of finite α – forcing for the $\Delta - M$ theory. The equivalence of stability of the central type of the such theory with the forcing companion under condition of stability and positive existential completeness was showed.

Key words: Jonsson theory, positive Jonsson theory, forcing, forcing companion, central type.

УДК 510.67

СВОЙСТВА МАЛЫХ МОДЕЛЕЙ ВЫПУКЛЫХ Δ - РОБИНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ В ДОПУСТИМЫХ ОБОГАЩЕНИЯХ СИГНАТУРЫ

А.Р. ЕШКЕЕВ, доктор физико-математичемких наук, доцент,
Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова,
О.И.УЛЬБРИХТ
Институт прикладной математики МОН РК, г.Караганда, Республика Казахстан

Данная работа связана с понятиями выпуклости теории в классе позитивных робинсоновских теорий. Понятие выпуклости теории было введено в книге А.Робинсона [1] и в дальнейшем развивалось в различных направлениях, следует отметить работу [2].

В данной работе мы получаем позитивные аналоги работы [2] в допустимых обогащениях сигнатуры.

Дадим необходимые определения, связанные с позитивностью йонсоновских теорий и обогащением сигнатуры.

Напомним определение в рамках которого будут рассмотрены все наши вопросы.

Теория T называется йонсоновской, если:

1) Теория T имеет бесконечные модели;

2) Теория T индуктивна;

3) Теория T обладает свойством совместного вложения (JEP)

4) Теория T обладает свойством амальгамы (AP)

Определение 1. Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T^*.

Определение 2. Пусть T - йонсоновская теория. Компаньоном йонсоновской теории T, называется такая теория той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(T^{\#})_{\forall} = T_{\forall}$;

2) для любой йонсоновской теории T', если $T_{\forall} = T'_{\forall}$, то $T^{\#} = (T')^{\#}$.

3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^{\#}$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^{\#}$ являются T^*, T^0, T^f, T^M, T^e, где T^* - центр йонсоновской теории T, T^0 - оболочка Кайзера йонсоновской теории T, T^f - форсинг компаньон йонсоновской теории T, T^M - модельный компаньон теории T, $T^e = Th(E_T)$, где E_T – есть класс экзистенциально замкнутых моделей теории T.

Определение 3. Йонсоновская теория T называется робинсоновской, если она универсально-аксиоматизируема.

Пусть L язык первого порядка. At – есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ – замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ – есть множество формул в пренексном нормальном виде полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At))$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ – это произвольная булева комбинация формул из L^+. Определим Δ-морфизмы между структурами.

Пусть M и N структуры языка, $\Delta \subseteq B(L^+)$. Отображение $h: M \to N$ называется Δ-гомоморфизмом (символически $h: M \xrightarrow[\Delta]{} N$), если для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$, $\forall \bar{a} \in M$ из того, что $M \models \varphi(\bar{a})$, следует, что $N \models \varphi(h(\bar{a}))$.

Модель M называется началом в N и мы говорим, что M продолжается в N, при этом $h(M)$ называется продолжением M. Если отображение h инъективно, то говорят, что отображение h погружает M в N (символически $h: M \xleftrightarrow[\Delta]{} N$). В дальнейшем мы будем использовать термин Δ-продолжение и Δ-погружение. В рамках этого определения (Δ-гомоморфизма), легко заметить, что изоморфное вложение и элементарное вложение являются Δ-погружениями, когда $\Delta = B(At)$ и $\Delta = L$, соответственно.

Определение 4. Если C - класс L-структур, то мы говорим, что элемент M из C Δ-позитивно экзистенционально замкнут в C, если каждый Δ-гомоморфизм из M в любой элемент из C является Δ-погружением. Класс всех Δ-позитивно экзистенционально замкнутых моделей обозначим через $(E_C^{\Delta})^+$; если $C = ModT$ для некоторой теории T, то под E_T, $(E_T^{\Delta})^+$ мы понимаем, соответственно, класс экзистенционально замкнутых и Δ-позитивно экзистенционально замкнутых моделей данной теории.

Определение 5. Говорим, что теория T допускает $\Delta - JEP$, если для любых двух $A, B \in ModT$ существует $C \in ModT$ и Δ-гомоморфизмы $h_1: A \xrightarrow[\Delta]{} C$, $h_2: B \xrightarrow[\Delta]{} C$.

Определение 6. Говорим, что теория T допускает $\Delta - AP$, если для любых $A, B, C \in ModT$ таких, что $h_1: A \xrightarrow[\Delta]{} C$, $g_1: A \xrightarrow[\Delta]{} B$, где h_1, g_1 – Δ-гомоморфизмы, существует $D \in ModT$ и $h_2: C \xrightarrow[\Delta]{} D$, $g_2: B \xrightarrow[\Delta]{} D$, где h_2, g_2 – Δ-гомоморфизмы, такие, что $h_2 \circ h_1 = g_2 \circ g_1$.

Определение 7. Теория T называется Δ-позитивной йонсоновской (Δ-PJ) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) T имеет бесконечную модель;
2) T позитивно $\forall\exists$-аксиоматизируема;
3) T допускает $\Delta - JEP$;
4) T допускает $\Delta - AP$.

Теория T будет называться Δ - йонсоновской (Δ -J) теорией, если она Δ -PJ – теория, но в качестве морфизмов рассматриваются только Δ погружения.

Определение 8. Δ -PJ –Теория называется Δ -позитивной робинсоновской (Δ -PR) , если она универсально-аксиоматизируема. Теория будет называться Δ - робинсоновской (Δ -R), если она Δ -PR – теория, но в качестве морфизмов рассматриваются только Δ погружения.

Пусть $0 \leq n \leq \omega$. Пусть Π_n^+ – множество всех формул языка L^+ вида $\forall\exists...\varphi$ (т.е. формулы из L^+ с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Pi_n^+ \subseteq L^+$.

Рассмотрим некоторые специальные обогащения сигнатуры вышеуказанных теорий. В своё время Т.Г.Мустафин в работе [3] определил новые типы стабильности с помощью некоторых обогащений сигнатуры. Палютин Е.А. в работе [4] показал, что стабильность, определённая как в [3] имеет недостаток в том, что не всякий тип будет определим. А мы знаем, что классическая стабильность сохраняет определимость типа. В связи с этим, будем говорить, что обогащение сигнатуры допустимое, если полученные типы при данной стабильности определимы. Заметим, что рассматриваемые обогащения данной статьи сохраняет определимость типа.

Пусть T – произвольная $\Delta - R$-теория в языке сигнатуры σ. Пусть C – семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$. Рассмотрим следующую теорию

$T_\Gamma^{PgM}(A) = Th_{\forall^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{g(a) = a \mid a \in A\} \cup g(c) \cup T_g \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где T_g - выражает тот факт, что для любой модели $(M, g^M) \models T_g$ имеет место:

1) g^M - автоморфизм M;

2) $\{m \in M \mid g^M(m) = m\}$ есть универсум некоторой экзистенциально замкнутой подмодели M, для любой модели M сигнатуры σ.

Для предиката Р мы записываем выражение $\{"P \subseteq"\}$, что по своей сути есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. В силу неполноты мы не записываем точную связь между элементами $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$, но предполагается их согласованность в рамках теории $T_\Gamma^{PgM}(A)$.

Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - M$ -ности теории T^*, существует её центр и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ, теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T.

Определение 9. Теория T называется выпуклой,если для любой ее модели $\mathfrak{A}$ и для любого семейства $\{\mathfrak{B}_i | i \in I\}$ ее подструктур, которые являются моделями теории T, пересечение $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ есть модель теории T. При этом предполагается ,что это пресечение не пусто. Если это пересечение никогда не пусто, то теория называется сильно выпуклой.

Определение 10. Если теория сильно выпукла, то пересечение всех ее моделей содержится в некоторой ее модели.

Эта модель называется ядерной моделью этой теории.

Определение 11. Модель сигнатуры данной теории (в дальнейшем структура) называется ядерной, если она изоморфна единственной подструктуре каждой модели данной теории.

В рамках вышеуказанных определений и в обогащенной сигнатуре мы имеем следующие результаты.

Пусть $\Delta = B^+(At)$.

Предположение о некоторой полноте рассматриваемой теории необходимо в связи с следующим фактом.

Лемма1. В случае позитивной робинсоновской теории из позитивной экзистенциальной полноты следует $\Delta - JEP$, обратное неверно.

Теорема 1. Пусть теория T - Δ-R- совершенная йонсоновская сильно выпуклая теория и она позитивно экзистенциально полна.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1)Теория T^* имеет ядерную структуру;

2)Теория T^c имеет ядерную модель.

Всякий раз, когда $\varphi(x)$ есть экзистенциальная формула и выводима в T, тогда существует некоторая экзистенциальная формула $\psi(x)$ и целое число n, такие, что в T выводимо $\exists^{=n}x\varphi \wedge \exists x(\varphi \wedge \psi)$,а также, если $T \vDash (\delta_1 \vee \delta_2)$,где δ_1, δ_2-некоторые экзистенциальные предложения , тогда $T \vDash \delta_1$ или $T \vDash \delta_2$.

Теорема 2 . Пусть теория T - Δ-R- сильно выпуклая теория и она совершенная йонсоновская , причем она позитивно экзистенциально полна.

Тогда $\mathfrak{M}$ является ядерной структурой T^* тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ является ядерной моделью центра T^* в выше указанном обогащении.

Следующие результаты имеют отношение к описанию «малых» моделей в классе экзистенциально-замкнутых моделей выпуклых позитивных йонсоновских теорий. Под «малыми» мы понимаем счетные алгебраически простые и счетные специальные атомные модели в смысле работы [5]. При этом специальность атомности определяется работой [5], а позитивность формулами из Δ.

Мы имеем результат относительно синтаксического условия атомности и семантического понятия $\Delta - nice$ в классе E_T теории со следующим условием.

Теорема 3. Пусть теория T - Δ-R- совершенная почти замкнутая йонсоновская сильно выпуклая теория и она полна для позитивных $\forall\exists$ предложений. $\mathfrak{A}$ некоторая счетная модель из E_T .

Тогда следующие условия эквивалентны:

1)$\mathfrak{A}$- (Δ, Δ) − атомная

2)$\mathfrak{A} \in E_T$ и $\Delta - nice$.

Мы будем говорить, что теория T допускает R_1^+, если для любой позитивно экзистенциональной формулы $\varphi(\bar{x})$ совместной с T существует формула $\psi(\bar{x}) \in \Delta^+$ совместна с T такая, что $T \models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Счетная модель теории T называется счетно-алгебраически универсальной моделью, если в неё Δ-погружаются все счетные модели данной теории.

Модель A является Δ-алгебраически простой моделью теории T, если A является моделью теории T и A может быть Δ-погружена в каждую модель теории T.

Как следствие можно получить следующие результаты относительно Δ-J- теории.

Теорема 4. Пусть T $-\Delta$-R- теория, полная для позитивных экзистенциональных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда T имеет Δ-алгебраически простую модель, которая (Σ, Δ^+)-атомная.

Теорема 5. Пусть T -Δ-R-теория полная для позитивно экзистенциональных предложений, допускающая R_1. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T имеет Δ-алгебраически простую модель,

2) T имеет (Σ, Δ^+)-атомную модель,

3) T имеет единственную Δ-алгебраически простую модель.

Пусть $A, B \in (E_T)^+$ и $A \underset{\neq}{\subset} B$. Тогда B называется Δ-алгебраически простым модельным расширением A в $(E_T)^+$, если для любой модели $C \in (E_T)^+$ из того, что A Δ-погружается в C следует, что B Δ-погружается в C.

Теорема 6. Пусть T – Δ-R-теория полная для позитивных экзистенциональных предложений, для которой выполняется R_1^+ и $\Delta = B(At)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T^* ω_1-категорична,

2) любая счетная модель из $(E_T)^+$ имеет Δ-алгебраически простое модельное расширение в $(E_T)^+$.

Актуальность данных исследований прежде всего связана с тематикой изучения теоретико-модельных свойств универсальных йосоновских алгебр. Т.е. таких примеров алгебр,которые удовлетворяют условиям Йонсона. И, как правило, таких примеров в алгебре достаточно много. Помимо этого в последнее время возрос интерес к изучению теоретико-модельных свойств неполных теорий. В связи с этим тематика изучения йонсоновских теорий, как естественного подкласса индуктивных теорий является очень интересной и актуальной задачей. Интерес и актуальность связаны прежде всего с тем, что техника изучения неполных теорий не так развита, как полных и соответственно получение любого результата в данной области, можно считать продвижением вперед.

Все необходимые определения понятий, но неопределенные непосредственно, можно найти в [6].

Литература:

1. Robinson A. Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra. Amsterdam, 1963.

2. Kueker D.W. Core structures for theories // Fundamenta Mathematicae LXXXIX (1975). - P.154 – 171.

3. Мустафин Т.Г. Новые понятия стабильности теорий. В сб. "Труды советско- французского коллоквиума по теории моделей". - Караганда, 1990. - С.112 – 125.

4. Палютин Е.А. E^*-стабильные теории // Алгебра и логика. – 2003. - № 2. - С.194 –210.

5. Baldwin J.T., Kueker D.W. Algebraically prime models. Ann. Math. Logic. 1981, 20. - p. 289-330.

6. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. - Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. – 250с.

Резюме

Основной целью данной работы является описание структуры ядерных моделей сильно выпуклых Δ-R- совершенных теорий в некотором обогащении сигнатуры. Так же изучаются алгебраически простые и атомные модели позитивных робинсоновских теорий. Для них дан критерий несчетной категоричности.

Ключевые слова: позитивная робинсоновская теория, обогащение сигнатуры, атомная модель, алгебраически простая модель, экзистенциально замкнутая модель, категоричность.

Түйіндеме

Айтылмыш жұмыстың негізгі мақсаты ол сигнатураның кейбір байытуында Δ- R кемел қатты дөңес теориялардың ядролық структурасын жазып шығару. Сонымен қатар позитивті робинсондық теориялардың алгебралық жай және атомдық модельдер зерттеледі. Олар үшін саналымсыз категорлылығының критериі берілген.

Кілт сөздер: позитивті робинсондық теория, сигнатураның байытуы, атомдық модель, алгебралық жай модель, экзистенциалды тұйық модель, категорлылық.

Summary

The main purpose of this paper is to describe the structure of the core models of strongly convex Δ -R-perfect theories in a certain enrichment of the signature algebraically prime and atomic models of

positive Robinson's theories have been studies. For them, a criterion is given uncountable categorical was found.

Key words: the positive Robinson theory, the enriching of signatures, atomic model, algebraically prime model, existentially closed model, categoricity.

ӘОЖ 511.528.2

ЭЙЛЕР СҰРАҚТАРЫ

Қ.ЖЕТПІСОВ, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент
А.Қ.ТЫНЫШТЫҚБАЙ
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

1773 жылы ғалым-математик Эйлер келесі сұрақты қойған болатын.

Сұрақ 1. Қабырғалары, ауданы, медианалары натурал сан болатын үшбұрыштар табыла ма?

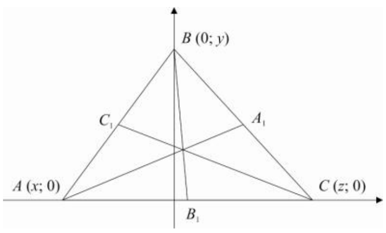
Бұл сұрақты шешу үшін геометриялық сұрақты диофанттық теңдеулер теориясында қарастырайық.

Ол үшін декардтық координаталар жүйесінде координаталы $(x;0)$, $(0;y)$, $(z;0)$ болатын сәйкесінше A, B, C нүктелерін алайық. Онда үшбұрыш қабырғалары сәйкесінше

$$a = BC = \sqrt{(0-z)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{z^2 + y^2} \Rightarrow a^2 = z^2 + y^2;$$

$$b = AC = \sqrt{(z-y)^2} \Rightarrow b^2 = (z-y)^2;$$

$$c = AB = \sqrt{(0-x)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow c^2 = x^2 + y^2.$$



Енді медианалардың ұзындығын табайық. Онда BC, AC, AB кесінділерінің ортасы сәйкесінше A_1, B_1, C_1 координаталары:

$$A_1\left(\frac{z}{2};\frac{y}{2}\right),\ B_1\left(\frac{x+z}{2};0\right),\ C_1\left(\frac{x}{2};\frac{y}{2}\right).$$

AA_1, BB_1, CC_1 медианаларынның ұзындықтары:

$$AA_1 = m_a = \sqrt{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{(2x-z)^2}{4} + \frac{y^2}{4} \Rightarrow 4m_a{}^2 = (2x-z)^2 + y^2$$

$$BB_1 = m_b = \sqrt{\left(0-\frac{x+y}{2}\right)^2 + (0-y)^2} = \frac{(x+z)^2}{4} + y^2 \Rightarrow 4m_b{}^2 = (x+z)^2 + 4y^2$$

$$CC_1 = m_c = \sqrt{\left(z-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{(2z-x)^2}{4} + \frac{y^2}{4} \Rightarrow 4m_c{}^2 = (2z-x)^2 + y^2$$

Алынған теңдеулерді біріктірейік.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \\ (2x - z)^2 + y^2 = 4m_a{}^2 \\ (x + z)^2 + 4y^2 = 4m_b{}^2 \\ (2z - x)^2 + y^2 = 4m_c{}^2 \end{cases} \tag{1}$$

мұндағы $z,\ y,\ a,\ c,\ m_a,\ m_b,\ m_c \in N; \qquad x \in Z.$ (1`)

Яғни, 8 белгісізден 5 теңдеуден тұратын диофанттық теңдеулер жүйесін аламыз.

Лемма 1 [1]. $\begin{cases} x_1{}^2 + y^2 = z_1{}^2 \\ x_2{}^2 + y^2 = z_2{}^2 \\ x_3{}^2 + y^2 = z_3{}^2 \end{cases}$ мұндағы $x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3, y \in N$, теңдеуінің шешімі келесі формуламен табылады:

$$\begin{gathered} x_1 = \kappa\alpha\beta(\delta^2 - \gamma^2), \quad x_2 = \kappa\alpha\gamma(\delta^2 - \beta^2), \quad x_3 = \kappa\beta\gamma(\delta^2 - \alpha^2), \quad y = 2\kappa\alpha\beta\gamma\delta, \\ z_1 = \kappa\alpha\beta(\delta^2 + \gamma^2), \quad z_2 = \kappa\alpha\gamma(\delta^2 + \beta^2), \quad z_3 = \kappa\beta\gamma(\delta^2 + \alpha^2). \end{gathered} \tag{2}$$

мұнда $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa \in N, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 1.$ (2`)

Лемма 2 [2]. $x^2 + y^2 = c^2$ мұндағы $x, y, c \in N$, теңдеуінің шешімі келесі формулалармен табылады:

$$x = m^2 - n^2, \qquad y = 2mn, \qquad c = m^2 + n^2 \tag{3}$$

мұнда $m, n \in N, \quad (m, n) = 1.$ (3`)

Лемма 3 [2]. $x^2 + axy + y^2 = z^2$, мұндағы $x, y \in N, \quad a \in Z,$ теңдеуі келесі формулалармен табылады:

$$\begin{cases} x = \kappa(a\beta^2 - 2\alpha\beta) \\ y = \kappa(\alpha^2 - \beta^2) \\ z = \kappa(a\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2) \end{cases} \tag{4}$$

мұндағы $\kappa, \alpha, \beta \in N, \quad \alpha > \beta.$ (4`)

Енді сұрақтың шешімінің тұжырымдамасын дәлелдейік.

Теорема 1. Қабырғалары, ауданы, медианалары натурал сан болатын үшбұрыштар табылмайды.

Дәлелдеу. Бұл сұрақты шешу үшін (1) теңдеулер жүйесінің шешімі табылмайтынын дәлелдесек жеткілікті. (1) теңдеулер жүйесінде бірінші, екінші және үшінші теңдеу лемма бойынша келесі формулалармен табылады:

$$\begin{gathered} x = \kappa\alpha\beta(\delta^2 - \gamma^2), \quad z = \kappa\alpha\gamma(\delta^2 - \beta^2), \quad 2x - z = \kappa\beta\gamma(\delta^2 - \alpha^2), \quad y = 2\kappa\alpha\beta\gamma\delta, \\ c = \kappa\alpha\beta(\delta^2 + \gamma^2), \quad a = \kappa\alpha\gamma(\delta^2 + \beta^2), \quad 4m_a = \kappa\beta\gamma(\delta^2 + \alpha^2). \end{gathered} \tag{5}$$

мұнда $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa \in N, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 1.$ (5`)

Бұдан $2\kappa\alpha\beta(\delta^2 - \gamma^2) - \kappa\alpha\gamma(\delta^2 - \beta^2) = \kappa\beta\gamma(\delta^2 - \alpha^2).$

κ-ны қысқартып және жақшаларды ашып, топтастырайық:

$$2\kappa\alpha\beta(\delta^2 - \gamma^2) - \kappa\alpha\gamma(\delta^2 - \beta^2) = \kappa\beta\gamma(\delta^2 - \alpha^2)$$

$$2\alpha\beta(\delta^2 - \gamma^2) - \alpha\gamma(\delta^2 - \beta^2) = \beta\gamma(\delta^2 - \alpha^2)$$

$$2\alpha\beta\delta^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 - \alpha\gamma\delta^2 + \alpha\gamma\beta^2 = \beta\gamma\delta^2 - \beta\gamma\alpha^2$$

$$2\alpha\beta\delta^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 - \alpha\gamma\delta^2 + \alpha\gamma\beta^2 - \beta\gamma\delta^2 + \beta\gamma\alpha^2 = 0$$

$$\delta^2(2\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma) + \alpha\beta\gamma(\alpha - 2\gamma + \beta) = 0. \tag{6}$$

(6) теңдеудің шешімдері болу үшін келесі теңдіктер орындалуы керек:

$$\begin{cases} 2\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma=0 \\ \alpha-2\gamma+\beta=0 \end{cases} \tag{7}$$

(7) теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен α -ны тауып, оны бірінші теңдеуге қоямыз:

$$4\beta\gamma-2\beta^2-2\gamma^2+\gamma\beta-\gamma\beta=0 \Rightarrow -2\beta^2+4\beta\gamma-2\gamma^2=0 \Rightarrow \beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2=0 \Rightarrow (\beta-\gamma)^2=0$$

Бұдан $\beta=\gamma$, яғни $x=z=\kappa\alpha\left(\delta^2-\beta^2\right)$. Енді келесі теңдеулер жүйесінің орындалмайтынын көрсетейік:

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ 4x^2+y^2=m_b{}^2. \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуі Лемма 2 бойынша

$$x=m^2-n^2, \qquad y=2mn, \qquad c=m^2+n^2 \tag{8}$$

мұнда $m,n\in N, \quad (m,n)=1.$ (8`)

Формуланы теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуіне қояйық. Онда

$$4t^2(2mn)^2+t^2\left(m^2-n^2\right)^2=4m_b{}^2$$

$$16m^2n^2t^2+t^2m^4-2m^2n^2t^2+t^2n^4=4m_b{}^2$$

$$t^2m^4+14m^2n^2t^2+t^2n^4=4m_b{}^2$$

Егер $\alpha^2=x,\ \beta^2=y$ деп алсақ, $x^2+14xy+y^2=z^2$, мұндағы $x,y\in N,$ теңдеуін аламыз. Теорема 3 бойынша

$$\begin{cases} x=\kappa\left(14\delta^2-2\gamma\delta\right) \\ y=\kappa\left(\gamma^2-\delta^2\right) \\ z=\kappa\left(14\gamma\delta-\gamma^2-\delta^2\right) \end{cases}$$

мұндағы $\kappa,\gamma,\delta\in N, \quad \gamma>\delta.$

$\alpha^4+14\alpha^2\beta^2+\beta=z^2$ теңдеуінің [3] жұмыстағы С.Ш. Қожегелдинов әдісі бойынша келесі формуламен анықталады.

$$\begin{cases} \alpha=\kappa\left(14\delta^2-2\gamma\delta\right)\left(\gamma^2-\delta^2\right) \\ \beta=\kappa\left(\gamma^2-\delta^2\right)\left(14\delta^2-2\gamma\delta\right) \\ z=\kappa^2\left(14\gamma\delta-\gamma^2-\delta^2\right)\left(14\delta^2-2\gamma\delta\right)\left(\gamma^2-\delta^2\right) \end{cases}$$

мұндағы

$$\kappa,\gamma,\delta\in N, \quad \gamma>\delta.$$

Бұдан байқайтынымыз, $\alpha=\beta$. (4`) шарт бойынша $\alpha=\beta$ болуы мүмкін емес.

Теорема дәлелденді.

1974 жылы Стэнли Оливер «Tomorrow's Math: Unsolved Problems for the Amateur» еңбегінде келесі сұрақты тұжырымдады:

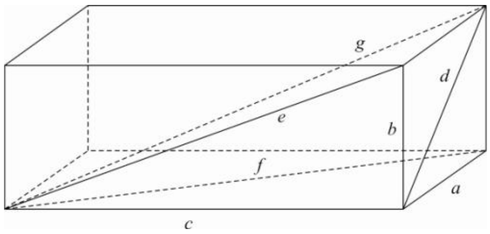
Сұрақ 2. Барлық қырлары, беттік диогональдары, диогоналі натурал сан болатын тік бұрышты параллелепипед табыла ма?

Бұл сұрақтың алгебралық мағынасы келесі теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$\begin{cases} a^2+b^2=d^2 \\ b^2+c^2=e^2 \\ a^2+c^2=f^2 \\ a^2+b^2+c^2=g^2 \end{cases} \tag{9}$$

мұндағы

$$a,b,c,d,e,f,g\in N \tag{9`}$$



Лемма 4 [1]. $\begin{cases} a^2+b^2=d^2 \\ c^2+b^2=e^2 \end{cases}$ мұндағы $a,b,c,d,e\in N$, теңдеулер жүйеісінің шешімі келесі формуламен табылады:

$$\begin{aligned} a=\alpha\beta(\gamma^2-\delta^2), \qquad b=2\alpha\beta\gamma\delta, \qquad c=\gamma\delta(\alpha^2-\beta^2), \\ d=\alpha\beta(\gamma^2+\delta^2), \qquad c=\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2). \end{aligned} \tag{10}$$

мұнда

$$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in N, \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=1. \tag{10`}$$

Лемма 5 [1]. $a^2+b^2+c^2+d^2=e^2$ мұндағы $a,b,c,d,e\in N$, теңдеуінің шешімі келесі формуламен табылады:

$$\begin{aligned} a=\frac{m^2+n^2+l^2-k^2}{\Delta}, \quad b=\frac{2kl}{\Delta}, \quad c=\frac{2km}{\Delta}, \\ d=\frac{2kn}{\Delta}, \quad e=\frac{l^2+m^2+n^2+k^2}{\Delta}. \end{aligned} \tag{11}$$

мұнда

$$k,l,m,n\in N, \quad (k,l,m,n)=1, \quad k^2<l^2+m^2+n^2, \quad \Delta=(2k,l^2+m^2+n^2-k^2) \tag{11`}$$

Енді сұрақтың шешімінің тұжырымдамасын дәлелдейік.

Теорема 2.Барлық қырлары, беттік диогональдары, диогоналі натурал сан болатын тік бұрышты параллелепипед табылмайды.

Дәлелдеу. Бұл сұрақты шешу үшін (9) теңдеулер жүйесінің шешімі табылмайтынын дәлелдесек жеткілікті. (9) теңдеулер жүйесіндегі

$$\begin{cases} a^2+b^2=d^2 \\ c^2+b^2=e^2 \end{cases}$$

теңдеуінің шешемі Лемма 4 бойынша

$$\begin{aligned} a=\alpha\beta(\gamma^2-\delta^2), \qquad b=2\alpha\beta\gamma\delta, \qquad c=\gamma\delta(\alpha^2-\beta^2), \\ d=\alpha\beta(\gamma^2+\delta^2), \qquad c=\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2). \end{aligned} \tag{12}$$

мұнда

$$\alpha,\beta,\gamma\in N, \quad (\alpha,\beta,\gamma)=1, \quad \alpha^2<\beta^2+\gamma^2. \tag{12`}$$

Формулаларды теңдеудің үшінші және төртінші теңдеулерге қояйық:

$$\begin{cases} \left(\alpha\beta(\gamma^2-\delta^2)\right)^2+\left(\gamma\delta(\alpha^2-\beta^2)\right)^2=f^2 \\ \left(\alpha\beta(\gamma^2-\delta^2)\right)^2+(2\alpha\beta\gamma\delta)^2+\left(\gamma\delta(\alpha^2-\beta^2)\right)^2=g^2 \end{cases} \tag{13}$$

мұнда

$$\alpha,\beta,\gamma\in N, \quad (\alpha,\beta,\gamma)=1, \quad \alpha^2<\beta^2+\gamma^2. \tag{13`}$$

Квадраттарды ашып, топтастырайық:

$$\begin{cases} \alpha^2\beta^2\gamma^4-2\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2+\alpha^2\beta^2\delta^4+\gamma^2\delta^2\alpha^4-2\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2+\gamma^2\delta^2\beta^4=f^2 \\ \alpha^2\beta^2\gamma^4-2\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2+\alpha^2\beta^2\delta^4+\gamma^2\delta^2\alpha^4+2\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2+\gamma^2\delta^2\beta^4=g^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2\beta^2\gamma^4+\alpha^2\beta^2\delta^4+\gamma^2\delta^2\alpha^4+\alpha^2\beta^2\delta^4-4\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2=f^2 \\ \alpha^2\beta^2\gamma^4+\alpha^2\beta^2\delta^4+\gamma^2\delta^2\alpha^4+\alpha^2\beta^2\delta^4=f^2. \end{cases} \tag{14}$$

Теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуі Лемма 5 бойынша

$$\alpha\beta\gamma^2 = p\frac{m^2+n^2+l^2-k^2}{\Delta},\quad \alpha\beta\delta^2 = p\frac{2kl}{\Delta},\quad \gamma\delta\alpha^2 = p\frac{2km}{\Delta},$$
$$\gamma\delta\beta^2 = p\frac{2kn}{\Delta},\quad g = p\frac{l^2+m^2+n^2+k^2}{\Delta}. \tag{15}$$

мұнда

$$k,l,m,n\in N,\quad (k,l,m,n)=1,\quad k^2<l^2+m^2+n^2,\ \Delta=\left(2k,l^2+m^2+n^2-k^2\right). \tag{15`}$$

(14) Теңдеулер жүйесіндегі бірінші теңдеудегі $4\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2$ (15) формула бойынша

$$4\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2 = 4\sqrt{\alpha^4\beta^4\gamma^4\delta^4} = 4\sqrt{\alpha\beta\gamma^2\cdot\alpha\beta\delta^2\cdot\gamma\delta\alpha^2\cdot\gamma\delta\beta^2} =$$
$$= 4\sqrt{\left(p\frac{m^2+n^2+l^2-k^2}{\Delta}\right)\cdot\left(p\frac{2kl}{\Delta}\right)\cdot\left(p\frac{2km}{\Delta}\right)\cdot\left(p\frac{2kn}{\Delta}\right)\cdot\left(p\frac{m^2+n^2+l^2+k^2}{\Delta}\right)} =$$
$$= 2\frac{p^2}{\Delta^2}\sqrt{\left(m^2+n^2+l^2-k^2\right)\cdot(2kl)\cdot(2km)\cdot(2kn)\cdot\left(m^2+n^2+l^2+k^2\right)}.$$

Бұдан $\left(m^2+n^2+l^2-k^2, 2kl, 2lm, 2lm, m^2+n^2+l^2+k^2\right)=1$ екенін біле отырып, $4\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2$ натурал сан болмайтынын байқаймыз. Яғни (9) теңдеулер жүйесінің шешімі натурал сандар жиыны үшін табылмайды.

Теорема дәлелденді.

Литература:

1. Кожегельдинов С.Ш. Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных: в 5–ти томах. Том 3. Иследование диофантовых уравнений малых степеней. – Алматы, 2006.
2. Titu Andreescu, an introduction to Diophante Equetions–Zalau:gUL, 2002.

Түйіндеме

Мақалада Wikipedia.org интернет-энциклопедиясы «Открытые проблемы математики» мақаласындағы екі математикалық сұрақ қарастырылды. Бірінші сұрақты Л. Эйлер 1773 жылы үшбұрыш медианасына қатысты қойған болатын. Ал Эйлердің екінші сұрағын 1974 жылы С.Оливер тікбұрышты параллелепипедке қатысты қайтадан тұжырмдады. Екі сұрақ та екінші дәрежелі диофанттық теңдеулер жүйесін құру арқылы шешілді.

Кілт сөздер: диофанттық теңдеулер, үшбұрыш медианасы, рационалді кубоид, Л.Эйлер сұрағы, С.Оливер сұрағы, параллелепипед.

Резюме

В статье рассматриваются две математические проблемы, которые затронуты в интернет-энциклопедий Wikipeia.org «Открытые проблемы математики». Первый вопрос был изучен Эйлером в 1773 году. А на второй вопрос обратил внимание С. Оливер в 1974 году. Оба вопроса были решены с помощью составлений двух степенных диофантовых уравнений.

Ключевые слова: диофантовые уравнения, медиана треугольника, рациональный кубоид, проблема Эйлера, проблема С. Оливера, параллелепипед.

Summary

There are two mathematical problems are mentioned in Internet encyclopedias Wikipeia.org «Clear problems of mathematics» are considered in this article. The first question was studied by Euler in 1773. S. Oliver paid attention to the second question in 1974. Both questions were solved by method of drawing up of two power oidiophantine equations.

Key words: oidiophantine equation, triangle’s median, rational box, Euler's question, S. Oliver's question, parallelepiped.

ӘОЖ 517.12

ДИДАКТИКАЛЫҚ БІРЛІКТЕР ЖҮЙЕСІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІН ҚҰРУ

Қ. ЖЕТПІСОВ, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент,
Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті,
А.ДЖУЗБАЕВА
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Математикалық пәндерде дидактикалық бірліктер ретінде ұғымдар мен анықтамаларды қарастыру қабылданған. Оларға жататындар:

- қатынастар және олардың түрлері;
- ұғымдар мен қатынастардың қасиеттері;
- қарапайым әдістер мен алгоритмдер;
- теоремалар және олардың дәлелдеулері;
- есептер және есептердің шешулері.

Оқытуға қойылатын талапқа байланысты дидактикалық бірліктер бөлінуі немесе жинақталуы мүмкін.

Берілген пәннің нақты бөлігінің негізі бола отырып, дидактикалық бірліктер жиыны осы бөлімнің (немесе пәннің барлығын толығымен) мазмұнын анықтайды. Осыған байланысты оларды енгізу тәртібі осы пәнді оқып-үйренуде маңызды рөл атқарады. Аз көлемді дидкатикалық бірліктер жиынында эмпирикалық негізде (осы бірліктердің арасындағы ерекшеліктерді талдау арқылы) аса көп қиындықсыз оларды оқып-үйренудің ретін оңай анықтауға болады. Егер пәннің көп көлемдегі бөлімінің дидактикалық бірліктер жүйесінің реттеп енгізілуін анықтау мақсаты қойылса, онда тек қана эмпирикалық пайымдауға сүйеніп, бұл есептің тиімді шешімін табу оңайға соқпайды. Математикалық логика тұрғысынан алғанда дидактикалық бірліктер қарапайым немесе күрделі тұжырымдарды құрайды.

Айталық, $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – кейбір дидактикалық бірліктер жиыны болсын. «Логикалық салдар» қатынасы, яғни M жиынында

$$(\forall\ x, y \in M)((xPy \Leftrightarrow x \to y))$$

ережесімен анықталған P қатынасы (осы жиындағы) квазиреттік қатынас болады.

P қатынасы рефлексивті және транзитивті, бірақ жалпы жағдайда антисимметриялы болмайды. Бұл бір объектілер класының әртүрлі анықтамалар арқылы берілуіне; көптеген теоремалардың (есептердің) әртүрлі әдістермен дәлелденуіне (шешуіне); тең күшті теоремалардың бар болуына; көптеген объектілердің математиканың даму процесінде, әртүрлі аттарға (заттық сандар және нақты сандар, полиномдар және көпмүшеліктер, бейнелеулер және фунциялар, және т.б.) ие болуына байланысты.

Белгілі технологияны пайдаланып, квазиреттелген $\langle M;P\rangle$ жиынынан бөліктік реттелген $\langle M^*;P^*\rangle$ жиынына көшуге болады [1]. Мұндағы $M/_{\sim_P}$ фактор-жиыны M жиынында «$\sim_P$» эквиваленттік қатынасы бойынша

$$(\forall\ x, y \in M)((x \sim_P y) \Leftrightarrow ((xPy)\,\&\,(yPx)))$$

ережесімен беріледі, ал M^* жиынындағы P^* бөліктік рет келесі түрде анықталады:

$$(\forall\ [x]_{\sim_P} \in M^*)(\forall\ [y]_{\sim_P} \in M^*)([x]_{\sim_P} P^* [y]_{\sim_P} \Leftrightarrow (xPy)).$$

Осы анықтамаларды пайдаланып, бөліктік реттелген $\langle M;P\rangle$ жиынын берілген M дидактикалық бірліктер жиынының моделі деп санауға болады. $\langle M;P\rangle$ моделінен логикалық байланыстар жүйесіне табиғи көшуді көрнекі кескіндеу үшін P қатынасы M жиынындағы дидактикалық бірліктер мен оның бағдарланған $G(P)$ графының арасында байланыс орнатады [2]. $G(P)$ графы бойынша осы графтың сыбайлас төбелерінің $M(G)=\|a_{ij}\|$

$(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n)$ квадраттық матрицасы құрылады. $\langle M;P\rangle$; $G(P)$; $M(G)$ дидактикалық бірліктер жиынының көріністері бір-бірінің изоморфты көшірмелері болады және алгебралық тұрғыдан бір-біріне тең. Осыған қарамастан, есептің қойылымы мен шешуінің дидактикалық бірліктер жиынына байланысты ерекшеліктері бір жағдайда біреуіне басымдылық берсе, екінші жағдайда басқасына басымдылық береді.

Жеке жағдайда, $M(P)$ моделіне қатысты алатынымыз:

а) $\langle M;P\rangle$ моделінің минималды (максималды) элементтер жиынтығы дидактикалық бірліктер жиынының бірінші (соңғы) кезекте оқып-үйренуге қажетті жиынтығын анықтайды.;

ә) $\langle M;P\rangle$ бөліктік реттелген жиын болғандықтан, онда ұзындығы $l \geq 2$ болатын тұйықталған тізбек жоқ (басқаша сөзбен айтқанда, бұл модель қарама-қайшы тұжырымдарды туындататын алғы шарттардың болмайтындығына кепілдік береді).

Теориялық тұрғыдан $\langle M;P\rangle$ моделі M жиынының дидактикалық бірліктерінің арасындағы логикалық байланыстардың құрылымы мен тәуелділіктерін біршама толық бейнелейді, бірақ осыған қарамастан, практикалық қолдануда белгілі бір нақтылауды қажет етеді.

Практикада M жиынындағы дидактикалық бірліктердің арасындағы байланыстар мен тәуелділіктерді анықтау үшін әдетте:

$(\forall\ x,y\in M)$ ($xP'y \Leftrightarrow y$ дидактикалық бірлігін оқып-үйрену x дидактикалық бірлігіне сүйеніп жүргізіледі). (1)

ережесімен анықталған P' қатынасы қолданылады. P' қатынасы рефлексивті емес, себебі, « x дидактикалық бірлігін оқып-үйренуді x дидактикалық бірлігінің өзіне сүйініп жүргіземіз»- деген сөздің мағынасы жоқ.

P' қатынасы басқа да себептермен P қатынасымен толығымен теңбе-тең емес. Бұл P' қатынасы бойынша салыстыруға болмайтын көлемдері бос болмайтын ортақ бөліктері бар ұғымдардың бар болуына байланысты. Осыған байланысты, практикада M жиынындағы дидактикалық бірліктердің арасындағы байланыстар мен тәуелділіктердің P' қатынасына сәйкес келуші $G(P')$ графында ұзындығы $l \geq 2$ контурлы тұйықталған тізбектер пайда болуы мүмкін. Бұл жағдайда, логикалық сабақтастықты қатаң сақтау мақсатында мұндай контурларды анықтау және тұйық емес тізбекке түрлендіру қажет болады (кейбір қабырғаларды алып тастау арқылы немесе дидактикалық бірліктерді бөлу арқылы) және тек осыдан кейін ғана оларды оқып-үйренудің ретін анықтауға көшеміз.

Бұл есептің шешуін матрицалар теориясының көмегімен алуға болады [3]. Қысқарту үшін $M(G)$ матрицасын A арқылы белгілейік. Бұл матрицаның келесі қасиеттерін атап өтейік: кез келген $x_i, x_j \in M$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ үшін

1) $$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{егер } \left(x_i P' x_j\right)\\ 0, & \text{егер } \neg\left(x_i P' x_j\right)\end{cases} \qquad (2)$$

2) Егер $A^m=\left\|b_{ij}\right\|$ болса, онда $b_{ij}\in N$ және ол x_i-ден x_j-ге баратын ұзындығы m болатын жолдардың санына тең (ескеретініміз, x_i-ден x_j-ге баратын ұзындығы m болатын жолдардың құрамында жарты жол ретінде контур да болуы мүмкін).

3) Айталық, $A^m=\left\|b_{ij}\right\|$; $A^{m+1}=\left\|c_{ij}\right\|$ болсын. Егер $b_{ij}\neq 0, c_{ij}=0$ болса, онда x_i төбесінен x_j төбесіне апаратын жолдың максималды ұзындығы m-ге тең (бұдан шығатын қорытынды: x_i және x_j төбелерін қосатын барлық жолдар жай болады) $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

4) Егер A матрицасының нөлдік бағанасы болмаса, онда $G(P')$ графының құрамында ұзындығы $l\geq 2$ болатын контур болады.

Осы қасиеттерді негізге алып, $G(P')$ графында контурдың болмауының келесі белгілерін аламыз:

$G(P')$ графында контур болмайды, сонда тек қана сонда, егер A^n – нөлдік матрица болса (мұндағы n – M жиынындағы дидактикалық бірліктердің саны). Шындығында, егер M жиынында n дидактикалық бірлік болса, онда графтағы жай жолдардың максималды мүмкін ұзындығы $(n-1)$-ден аспайды. A матрицасын n-ші дәрежеге шығару (тіптен, n – мүмкін үлкен мәнінде) компьютерде қолданған жағдайда күрделі есеп болмайды. Контурларды анықтау мен құтылу процедурасын бірнеше қайтара қолданудан соң, біз, $G(P')$ графы мен оның $A = M(G)$ матрицасына көшеміз. Оларды талдау M жиынындағы дидактикалық бірліктерді оқып-үйрену тізбегін (ретін) анықтауға мүмкіндік береді. Тізбекті (ретті) анықтау процесі A матрицасының келесі қасиеттеріне негізделеді: егер A матрицасының j-ші бағанасы нөлдік болса, онда x_j элементі $\langle M; P' \rangle$ моделінде минималды элемент болады (яғни x_j дидактикалық бірлігін бірінші кезеңде оқып-үйрену керек). Себебі, j-ші бағанада нөлдердің болуы x_j дидактикалық бірлігінің M жиынының басқа дидактикалық бірліктерін оқып-үйренуде қолданылмайтындығы туралы айтады
($j = 1, 2, \ldots, n$).

Сонымен, дидактикалық бірліктерді оқып-үйрену кезегі қадам бойынша анықталатын болады:

1 – қадам. Айталық, $A_1 = A$ матрицасының нөлдік бағаналарының номерлері $j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \ldots, j_{k_1}^{(1)}$ болсын. Онда $x_{j_1^{(1)}}, x_{j_2^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}$ дидактикалық бірліктері бірінші кезекте оқып-зерттелетін болады. Әрі қарай, A_1 матрицасының $j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \ldots, j_{k_1}^{(1)}$ номерлі жолдары мен бағаналарын сызып тастаймыз да шыққан матрицаны A_2 арқылы белгілейміз және келесі қадамға көшеміз.

2 – қадам. Айталық, A_2 матрицасының нөлдік бағаналары $j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, \ldots, j_{k_2}^{(2)}$ болсын. Онда $x_{j_1^{(2)}}, x_{j_2^{(2)}}, \ldots, x_{j_{k_2}^{(2)}}$ дидактикалық бірліктері екінші кезекте (кез келген ретте) оқып-зерттелуі керек. Енді A_2 матрицасының $j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, \ldots, j_{k_2}^{(2)}$ номерлі жолдары мен бағаналарын сызып тастап, шыққан матрицаны A_3 арқылы белгілейміз және келесі қадамға көшеміз және т.т.

Бұл қадамдық процесс A матрицасының соңғы жолы мен соңғы бағанасы сызылып біткенше жүргізілетін болады.

Нәтижелерінде дидактикалық бірліктер жиыны M топтарға бөлінеді:

$$x_{j_1^{(1)}}, x_{j_2^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}};$$
$$x_{j_1^{(2)}}, x_{j_2^{(2)}}, \ldots, x_{j_{k_2}^{(2)}};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$x_{j_1^{(s)}}, x_{j_2^{(s)}}, \ldots, x_{j_{k_s}^{(s)}}.$$

Дидактикалық бірліктер топтары алынған рет бойынша оқып-зерттеледі, ал әрбір жеке топтар шеңберінде дидактикалық бірліктер бір-бірінен тәуелсіз, сондықтан оларды кез келген ретте оқып-зерттеуге болады.

Жоғарыда баяндалған технологияның қолданылуын «Группалар» бөлімін оқып-зерттеу мысалында көрсетейік. Бұл бөлім көптеген (логико-алгебралық) теоретико-алгебралық бағыттағы пәндердің дәстүрлі құраушысы болып табылады [4].

Бұл тараудың материалдарын талдау оның мазмұнының негізінде жатқан келесі дидактикалық бірліктер жүйесін бөліп алуға әкеледі: 1) жиын; 2) элементтің жиынға тиісі болу қатынасы; 3) жиында анықталған амалдар; 4) бос жиын; 5) реттелген парлар; 6) декарттық көбейтінді; 7) жиындардың арасындағы сәйкестіктер; 8) сәйкестіктердің анықталу облысы және мәндер жиыны; 9) сәйкестіктердің композициясы; 10) екіорынды және бірорынды амалдар; 11) амалдың қасиеттері (ассоциативтілігі, коммутативтілігі, иденпотенттігі); 12) кері элемент; 13) бірлік элемент; 14) ішкі жиын; 15) ішкі группа; 16) элементтің реті; 17) группаның түрлері; 18) нормаль бөлгіш; 19) фактор-жиын; 20) іргелес кластар; 21) фактор-группа; 22) группалардың гомоморфизмі; 23) гомоморфизмнің ядросы; 24) гомоморфизмнің мәндер жиыны; 25) группалардың изоморфизмі; 26) гоморфизм және изоморфизм туралы теоремалар.

Әдебиеттер:

1. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. - М.: Наука, 1970. – С.148.
2. Оре О. Теория графов. - М.: Наука, 1968. – С.352.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1975. –С .431.
4. Гончаров С.С., Дроботун Б.Н., Никитин А.А. Жоғарғы оқу орындарында алгебралық жүйелерді оқып-үйренудің әдістемелік аспектілері: Орысшадан аударған Жетпісов Қ., Түсіпов Ж.А. - Қарағанды, 2012. – 202 б.

Түйіндеме

Бұл мақалада дидактикалық бірліктер жүйесін квазиренттелген жиын ретінде құрудың әдістемесі қарастырылған. Индукция әдісі бойынша алгебраның «Группалар» бөлімі үшін дидактикалық бірліктер жүйесінің математикалық моделі құрылған және оқып-зерттелген. Алгебраның «Группалар» бөлімінің дидактикалық бірліктер жүйесінің бағдарланған графы және оның сыбайластық, инциденттінің матрицалары құрылған. Осы арқылы дидактикалық бірліктердің арасындағы логикалық байланыстардың құрылымы мен тәуелділіктерінің толық сипаттамасы берілген.

Резюме

В данной статье рассматривается методика построения системы дидактических единиц как квазиупорядоченное множество. Методом индукции построена и изучена математическая модель системы дидактических единиц для раздела алгебры «Группы». Построены ориентированный граф и матрицы смежности, инцидентности системы дидактических единиц для разделы алгебры «Группы». Таким образом дан полное описание состава и зависимости логических связей между описанием и связей дидактических единиц.

Ключевые слова: алгебра, группа, дидактические единицы, отношение, квазиупорядоченное множество.

Summary

In this paper, the technique of building a system of teaching units as quasi-ordered set. The mathematical model of the didactic units for the section algebra “Group” was studied and built by induction method. We construct a directed graph and the adjacency matrix, incidence of didactic units for branches of algebra, "the Group". Thus, a full description of the composition and the dependence of logical connections between the description of the links between the didactic units are given.

Key words: algebra, group, teaching units, ratio, quasi-ordered set.

ӘОЖ 512.17

БУЛЬ АЛГЕБРАЛАРЫНЫҢ АРАСЫНДАҒЫ НЕГІЗГІ СӘЙКЕСТІКТЕР

Қ. ЖЕТПІСОВ, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент
Қ.С. КУТИМОВ, Ә.Б. БАКЕНОВА
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Буль құрылымдарының арасындағы сәйкестендіру абстракциясы. Ғылыми абстракциялардың қалыптасу әдісі адамның танымдық іс-әрекетінің жалпы бір әдісі болып табылады. Математикалық танымның өте бір кең тараған түріне сәйкестендіру абстракциясы жатады.

Біртекті объектілер жиынын қарастыруда олардың әртүрлі жалпы қасиеттері айқындалады. Бұл қасиеттерді таңдау зерттеу мақсатына сәйкес жүргізіледі.

Бұл жағдайда, қарастырылып отырған жиынын объектілерінің арасындағы маңызды емес қасиеттерге көңіл аудармай, олардың маңызды ортақ қасиеттері зерттеледі. Осыдан соң ерекшеліп алынған қасиеттердің көмегімен ажыратуға болмайтын жиын объектілері сәйкестендіріледі.

Өзара сәйкестендірілген объектілердің әрбір класы жаңа табиғатты объект ретінде формаль тілдің белгілі бір термині немесе таңбасы арқылы белгіленеді. Ол әрекетте, ерекшеленген қасиеттер жиынтығы бар осы кластың барлық объектілерінің иелік өлшемінің негізі (бейнесі) болады. Біртекті объектілер жиынын қарастырғанда ерекшеленген қасиеттер жаңа ұғымдардың мағынасының кері бейнесін кескіндейді және олар сәйкестендірілген элементтер кластарымен және олардың көлемімен одақтастырылады.

Сәйкестендіру абстракциясын қолдану нәтижесінде ерекшеленген математика ұғымдарына (объектілеріне) қатысты, «олар абстракция әдісін қолдану нәтижесінде алынған» – деп айтады [2].

Буль алгебралары класында сәйкестендіру абстракциясын қолдану іс-әрекеті идеалдардың көмегімен іске асырылатын болса, ал жалпы Буль құрылымдарында – бқл Буль алгебралары, Буль торлары, Буль сақииналары арасындағы сәйкестендіру (көшіру) абстракциясы [3].

1. Буль алгебрасы [1] $A \neq$ Ø жиынындағы теоретико-жиындық амалдарға қатысты тұйықталғын алгебралық жүйе.

2. Буль торы [1] $\langle A, U \rangle$ алгебралық жүйесі түрінде анықталады.

$$x \leq_A y \Leftrightarrow xUy$$

$\leq_A$ – бөліктік реттік қатынасы *A* жиынында анықталған.

Егер $A = \langle A; \cup; \cap; C \rangle$ – Буль алгебрасы болса, онда $P(A) = \langle A, \leq \rangle$ – Буль торы болады.

Сөйлем 1. а) A Буль торынан $A(A)$ Буль алгебрасына

б) A Буль алгебрасынан $P(A)$ Буль торына көшу орынды.

3. Бірлік элементті Буль сақинасы [1] деп кез келген $x \in K$ үшін $x \cdot x = x$ теңдігі орындалатын $K = \langle K; +; \cdot; 0; 1 \rangle$ коммутативті және ассоциативті сақинаны айтады.

K Буль сақинасы бойынша

$$L(K) = \langle K; \leq_{L(K)} \rangle$$

жүйесін анықтайық. Мұндағы $\leq_{L(K)}$ қатынасы келесі ережемен анықталған:

$$(\forall a, b \in K)(a \leq_{L(K)} b \Leftrightarrow a \cdot b = a).$$

Сөйлем 2. $L(K)$ алгебралық жүйесі Буль торы болады. Айталық, $(L = \langle L; \leq \rangle)$ Буль торы болсын. Онда, $K(L) = \langle L; \cdot_{K(L)}; +_{K(L)}; 0_{K(L)}; 1_{K(L)} \rangle$ Буль сақинасын анықтауға болады.

Сөйлем 3. а) K Буль сақинасынан $L(K)$ Буль торына;

б) L Буль торынан $K(L)$ Буль сақинасына көшу орынды.

Теорема. Кез келген $K = \langle K; +; \cdot; 0; 1 \rangle$ Буль сақинасы мен кез келген $L = \langle L; \leq \rangle$ Буль торы үшін $K(L) = K$ теңдігі орындалады сол уақытта тек қана сол уақытта, егер $L(K) = L$ болса.

Салдар. а) Егер K Буль сақинасынан $L(K)$ Буль торына көшіп, одан соң $L(K)$ Буль торы бойынша $K(L(K))$ Буль сақинасын құрсақ, онда қайтадан алғашқы Буль сақинасын аламыз, яғни $K(L(K)) = K$;

б) Егер L буль торы бойынша $K(L)$ Буль сақинасына көшіп, одан соң $K(L)$ Буль сақинасы бойынша $L(K(L))$ Буль торын құрсақ, онда қайтадан алғашқы Буль торын аламыз, яғни $K(L(K)) = L$.

Қорытынды. Буль алгебралары, Буль торлары және Буль сақиналары сипаттау әдістері әртүрлә болатын бір ғана абстрактілі объектінің симантикалық баламалары болады деп айтуға болады.

Буль алгебраларының көріністері туралы Стоун теоремасы. Бос емес жиынның ішкі жиындарының Буль алгебрасында теоретикалық-жиындық интуицияны көріністің көрнекілігіне негіздеп, қолдану мүмкін болғандықтан, оны оқып-зерттеу анағұрлым жеңіл.

Бұл мақалада кез келген Буль алгебрасы жиындар алгебрасының көмегімен іске асады, яяғни Буль алгебраларының көріністері туралы М.Стоунға тиісті негізгі теорема дәлелденеді. Мағыналық жағынан алғанда бұл теореманы тұжырымы төмендегідей:

Теорема 1. Кез келген Буль алгебрасы, изоморфизмге дейінгі дәлдікпен алғанда, кейбір бос емес жиынның барлық ішкі жиындарының Буль алгебрасының ішкі алгебрасы болады, яғни жиындар алгебрасы.

Бұл теореманы дәлелдеу жиындарға негізгі шешуге тиісті сұрақ изоморфизмге дейінгі дәлдәкпен алғанда В алгебрасынмен беттесетін кейбір ішкі жиындар алгебрасы бар *M* жиынның (берілген В Буль алгебрасы бойынша) құру.

Ізделініп отырған *M* жиынның орнына В Буль алгебрасының барлық максималды идеалдар жиынын алуға болатын көрінеді.

В Буль алгебрасының өзіндік идеалы *I*:

1) максималды деп аталады, егер осы алгебраның *I* идеалы кеңейтетін ешқандай өзіндік *I’* идеалы болмаса, яғни $I \in I' \subset B$;

2) жай деп аталады, егер кез келген $a \in B$ элементі үшін не $a \in I$, не $C(a) \in I$ болса.

Байқайтынымыз, $\subset$ қатынасының теоретикалық-жиындық негізі тіліндегі «максималды идеал» ұғымы Буль алгебрасының негізгі де, туынды да қатынасы емес. Осыған байланысты, «жай идеал» үғымы максималды идеалдардың «ішкі» сипаттамасы үшін енгізіледі. Себебі келесі теорема орынды:

Теорема 2. В Буль алгебрасының идеалы *I* максималды болады, сонда тек сонда, егер ол жай идеал болса [3].

Баяндау толық болуы үшін осы теореманың дәлелдеуін келтірейік.

Жеткілікті түсінікті, себебі кез келген жай идеал максималды болады. Шындығында, айталық, В алгебрасының жай идеалы *I* берілсін. Бірақ осыған қарамастан, *I’* өзіндік идеалы табылып, $I \subset I'$ қамтылуы өзіндікболғандықтан, онда *a* элементі табылып, $a \in I' \backslash I$ болады, яғни $a \in I'$ және $a \notin I$.

I идеалының жай болуына байланысы бұдан шығатын салдар $C(a) \in I'$, яғни, $I \subset I'$ қамтылуын ескере отырып, $C(a) \in I'$. Бірақ $1 = a \vee C(a) \in I'$, себебі I' жиыны $\vee$ амалына қатысты тұйықталған.

Кез келген $a \in B$ элементі үшін $a \leq 1$ болуы себепті, онда $I' = B$. Сонымен, I' өзіндік идеал болмай шықты, ал бұл біздің жасаған жорамалымызға қарама-қайшы.

Теореманың қажетті шартын де кері жору әдісін қолданамыз. Айталық, В алгебрасының максималды *I* бар болсын және ол жай идеал болмасын. Онда $a \in B$ элементі табылып, $a \notin I$ және $C(a) \in I$ болады.

B жиынының келесі ішкі жиындарын қарастырайық:

$$I_a = \{b \mid (b \in B) \text{ және } (\exists c \in I)(b \leq a \vee c)\}; \quad (1)$$

$$I_{C(a)} = \{b \mid (b \in B) \text{ және } (\exists c \in I)(b \leq C(a) \vee c)\}. \quad (2)$$

I_a және $I_{C(a)}$ ішкі жиындарының *B* Буль алгебрасының идеалдары болатындығыноңай тексеруге болады.

(1) және (2) амалдар $I \subseteq I_a$ және $I \subseteq I_{C(a)}$ болатынын көрсетеді. Шын мәнісінде бұл қамтылу өзіндік, себебі $a \in I_a \setminus I$ және $C(a) \in I_{C(a)} \setminus I$. Бұдан *I* идеалының максималдығынан

шығатын салдар: $I_a = B$ және $I_{C(a)} = B$. Сондықтан $1 \in I_a$ және $1 \in I_{C(a)}$ жиындарының (1) және (2) анықтамаларына сәйкес, онда $c_1, c_2 \in I$ элементтері табылып, $a \vee c_1 = 1$ және $C(a) \vee c_2 = 1$ болады. Ал бірақ негізгі анықтама бойынша

$$(c_1 \vee c_2) \vee (a \wedge C(a)) = (c_1 \vee c_2) \vee 0 = (c_1 \vee c_2). \quad (3)$$

Біздің тұжырымымыз бойынша

$$(c_1 \vee c_2) \vee (a \wedge C(a)) = ((c_1 \vee c_2) \vee a) \wedge ((c_1 \vee c_2) \vee C(a)) =$$
$$= ((a \vee c_1) \vee c_2) \wedge ((C(a) \vee c_2) \vee c_1) = (1 \vee c_2) \wedge (1 \vee c_1) = 1 \wedge 1 = 1 \quad (4)$$

(3) және (4) теңдіктер тізбегінің сол жақтары бірдей болғандықтан, шығатын қорытынды $c_1 \vee c_2 = 1$. Бірақ $c_1, c_2 \in I$ сол себепті $c_1 \vee c_2 \in I$, яғни $1 \in I$, ал онда $I = B$ болар еді. Бұл *I* – өзіндік идеал деген тұжырымға қарама-қайшы. *B* Буль алгебрасының барлық максималды идеалдар жиынын *I(B)* арқылы

*B(I(B))=<B(I(B)):*U;∩*;Ø;I(B)>*

Буль алгебрасын қарастырайық (*I(B)* жиынының барлық ішкі жиындарының жиыны).

Дәлелдеудің келесі кезеңі алғашқы В алгебрасымен изоморфизмге дейінгі дәлдәкпен беттесетін осы алгебраның ішкі алгебрасын табу.

Басқаша айтқанда, В алгебрасының $B(I(B))$ алгебрасына изоморфты қамтылуы болатын ең болмағанда бір φ бейнелеуін анықтау. Бұл жағдайда В алгебрасының негізгі *B* жиынынның әрбір *a* элементінің бейнесі $B(I(B))$ алгебрасының негізгі жиынының элементі болатын оның кейбір максималды идеалдар жиыны болуы керек және бұл жиын *a* элементімен бірмәнді анықталуға тиісті. Бұл талаптыәрбір *a* элементіне В алгебрасының φ бейнесі ретінде осы элементті қамтымайтын барлық максималды идеалдар жиынын алу арқылы қамтамасыз етуге болады.

Осыған байланысты алдын ала келесі тұжырымды дәлелдеу керек. Кез келген 0-ден өзгеше $a \in B$ элементі үшін мұндай идеалдар жиыны бос емес.

Сонымен, *B* алгебрасының кез келген нольден өзгеше $a \in B$ элементі үшін осы элементті қамтымайтын максималды *I* идеаланың бар болатындығын дәлелдейік. Бұл фактіні дәлелдеуде, математикада белгілі «максимум принцепі» деп аталатын Цорн леммасын пайдаланамыз. *Цорн леммасы* келесі түрде тұжырымдалады. Егер бөліктік реттелген $M =< M; P >$ жиынында әрбір тізбектің жоғарғы шекарасы болса, онда *M* жиынында ең болмағанда бір максималды элемент табылады [1].

Бұл жағдайда, тізбек деп бөліктеп реттелген *M* жиынының осы *P* қатынасы бойынша сызықтық реттелген кез келген ішкі жиынын түсінеміз.

Біздің жағдайымызда, бөліктеп реттелген жиынның ролін *C(a)* элементін қамтитын В Буль алгебрасының барлық өзіндік U_a идеалдар жиыны атқарады, яғни *a* элементін қамтитын кәдімгі теоретикалық-жиындық қамтылудың көмегімен реттелген бөліктік реттелген $<U_a;\subseteq>$ жиыны. Алдымен, кез келген нольден өзгеше $a \in B$элементі үшін U_a жиынының бос болмайтындығын дәлелдейік. Байқайтынымыз, *a* элементінің толықтаушысы *C(a)* элементімен туындаған $I_{C(a)}$ бас идеалы – өзіндік.

Керісінше жағдайда, $1 \in I_{C(a)}$, яғни $1 \leq C(a)$ бар болар еді. ($I_{C(a)}$ бас идеалының анықтамасына сәйкес). Бұдан *C(a)=1*, яғни *a=0*, бірақ бұл «*B* жиынының тек қана нольден өзгеше *a* элементтері қарастырылады» деген шартқа қарама-қайшы. Сондықтан $C(a) \in I_{C(a)}$, яғни $I_{C(a)} \in U_a$.

Енді әрбір бағыттылған U_a жиынындағы *L* идеалдар жиынтығының тізбегінің жоғарғы шекарасының болатындығын көрсетейік.

$$I^* = \bigcup_{I' \in L} I' \quad (5)$$

жиынының В Буль алгебрасының өзіндік идеалы болатынын тексеру қиын емес. Мысал үшін I^* жиынының $\vee$ амалына қатысты тұйықталданғанын көрсетейік.

Айталық, $a, b \in I^*$ болсын. Онда $a \vee b \in I^*$ болатынын көрсетейік. I^* бағытталған идеалдар жиынтығының бірігуі болғандықтан, кейбір $I_1^{'}, I_2^{'} \in L$ үшін $a \in I_1^{'}$ және $b \in I_2^{'}$ болады. Онда не $I_1^{'} \subseteq I_2^{'}$, не $I_2^{'} \subseteq I_1^{'}$. Бұл мүмкіндіктердің симметриялығынан $I_1^{'} \subseteq I_2^{'}$ болсын деп санайық. Онда $a, b \in I_2^{'}$, ал $I_2^{'}$ идеал болғандықтан, $a \vee b \in I_2^{'}$. (5) анықтама бойынша бұдан алатынымыз, $a \vee b \in I^*$. (5) анықтамадан шығатын тағы бір салдар: $C(a) \in I^*$, яғни $I^* \in U_a$. Әрине, I^* жиыны – L идеалдар тізбегінің жоғары шекарасы. Сонымен, бөліктік реттелген $< U_a; \subseteq >$ жиыны үшін Цорн леммасының шарты орындалды, онда оның қорытындысы да орынды, ал ол бойынша бұл бөлікті реттелгенжиынның максималды элементі I бар. Енді осы I идеалының B Буль алгебрасының максималды идеалы болатынын дәлелдеу.

Дәлелдеу үшін кері жору әдісін пайдаланамыз. Яғни I идеалын кеңейтетін B жиынына тең емес өзіндік I_1 идеалы табылып, $I \subset I_1 \subset B$ болсын. Бірақ онда $C(a) \in I_1$, себебі $C(a) \in I$. Сонымен, I_1 өзіндік идеалы $C(a)$ элементін қамтиды, сондықтан $I_1 \in U_a$. Ал бұл I идеалының бөліктік реттелген $< U_a; \subseteq >$ жиынының максималды элементі болу шартына қарама-қайшы.

Келтірілген дәлелдеу Цорн леммасы пайдаланып дәлелденетін тұжырымдардың барлығына тән. Ал, бұл бізге Цорн леммасын қолданудың жалпы жобасын алуға пайдасын тигізеді.

Әдебиеттер:

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. - С. 367.
2. Бурбаки Н. Архитектура математики. Очерк по истории развития математики. – М.: ИЛ, 1965. - С. 292.
3. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. Введение в логику и методологию науки. – М.: Наука, 1977. - С. 367.

Түйіндеме

Буль алгебраларының құрылымдық қасиеттерінің жан-жақтылығын көрсету мақсатында әртүрлі математикалық ғылымдарға тиесілі көптеген мысалдар қарастырылған. Формаль аксиомалық теориялардың пропедивтік әдісінің тәжірибесін қолданып, Буль алгебралары класының абстракциялы анықтамасы енгізілген. Бұл оның аксиомалары арқылы теоретико – жиындық, логика – алгебралық және теоретико – ықтималдық концепцияларды анықтауға мүмкіндік береді.

Буль алгебраларының көріністері туралы Стоун теоремасын мағналық пропедивтік деңгейде анықтау арқылы табиғи теоретико – жиындық баяндауға мүмкіндік беретін мысалдар қарастырылады.

Кілт сөздер: Буль алгебралары, Цорн леммасы, Стоун теоремасы, Буль сақинасы, идеалдар, изоморфизм.

Резюме

С целью демонстрации универсальности проявление структурных свойств Булевых алгебр рассмотрено большое количество примеров, свойственных различным математическим наукам. Используя опыт пропедевтики метода формальных аксиоматических теории, введено абстрактное определение класса Булевых алгебр, позволяющее отразить посредством его аксиом, аналогию между теоретико-множественными, логико-алгебраическими и теоретико-вероятностными концепциями. Осуществляя на содержательном уровне пропедевтику теоремы Стоуна о представлении Булевых алгебр, рассматриваются примеры, которые допускали естественную теоретико-множественную трактовку.

Ключевые слова: Булевые алгебры, лемма Цорна, теорема Стоуна, Булевые кольца, идеалы, изоморфизм.

Summary

In order to demonstrate the univerdalism of the exertion of Boolean, algebras structural propertirs, a number of exemples inherent to different mathematic science are considered. We bringin the abstract definition of Boolean algebras class nsing the experience of propaedeuties of formal axiomatic theory methodwhich allows to reflect the analogy between set-theoretic, logical – algebraic and theoretic-probable concepts by means of its axioms.

Key words: Boolean algebras, Zorn's theorem, Stone's theorem, Boolean rings6 ideals, isomorphism.

УДК 517.15

СПЕКТРАЛЬНЫЕ КЛАССЫ С УСЛОВИЕМ НЕСТАБИЛЬНОСТИ

С. С. ЗАУРБЕКОВ, кандидат физико-математических наук, доцент
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана,
Республика Казахстан

Общепринятые определения и обозначения можно найти в [1-2]. Перейдем к описанию специальных определений и обозначений.

Введем следующие обозначения:

$nf(\Phi_s)$.- количество конечно аксиоматизируемых (к.а.) пополнений теории $[\Phi_s]$;

$nf\{np\}(\Phi_s)$.- количество к.а. пополнений теории Φ_s, не имеющих простую модель;

$nf\{ns\}(\Phi_s)$- количество к.а. нестабильных пополнений теории $[\Phi_s]$;

$nf\{nps\}(\mathrm{T}_s)$.- количество к.а. нестабильных пополнений теории $[\Phi_s]$ и не имеющих простую модель.

Положим для каждого $\mu \in \{np, ns, nps\}$ $NFS\{\mu\}(A) = \{s \mid nf\{\mu\}(\Phi_s) \in A\}$ для $A \subseteq N \cup \{\omega\}$.

В данной работе рассматриваются некоторые спектральные классы предложений с условием нестабильности или с условием отсутствия простой модели. Главная цель этой работы доказательство теоремы 3 и его следствия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Существует о.р.ф. f, которая m-сводит множества $NFS(A)$ и $NFS\{np\}(A)$ соответственно к $NFS\{ns\}(A)$ и $NFS\{nps\}(A)$ для каждого $A \subseteq N \cup \{\omega\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно показать существование о.р.ф. f, для которого $nf(\Phi_x) = nf\{ns\}(\Phi_{f(x)})$ и $nf\{np\}(\Phi_x) = nf\{nps\}(\Phi_{f(x)})$ для каждого $x \epsilon N$. Достаточно указать р.п. сигнатуру δ' и эффективную процедуру сопоставления каждому $s \epsilon N$ аксиоматизируемой теории T_s такой, что $nf(\Phi_s) = nf\{ns\}(\mathrm{T}_s)$ и $nf\{np\}(\Phi_s) = nf\{nps\}(\mathrm{T}_s)$.

В качестве δ' выберем $\delta \cup \{R^2, P_1^1, P_2^1\}$. Система аксиом теории T_s состоит из одной аксиомы $\Phi_s \oplus T_n$, где T_n - теория плотного линейного порядка. Как известно, данная теория нестабильна и не имеет простых моделей. Завершают доказательство следующие формулы.

$$nf\{ns\}(\mathrm{T}_s) = nf(\mathrm{T}_s) - nf\{s\}(\mathrm{T}_s) = nf(\Phi_s),$$
$$nf\{nps\}(\mathrm{T}_s) = nf\{np\}(\mathrm{T}_s) = nf\{np\}(\mathrm{T}_s).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Существует о.р.ф. f, которая для каждого $A \subseteq N \cup \{\omega\}$ множества $NFS(A)$ и $NFS\{ns\}(A)$ m-сводят соответственно к $NFS\{np\}(A)$ и $NFS\{nps\}(A)$ с помощью f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предложения 1 достаточно указать р.п. сигнатуру δ' и эффективную процедуру сопоставления каждому $s \epsilon N$ аксиоматизируемой теории (T_s) такой, что $nf(\Phi_s) = nf\{np\}(\mathrm{T}_s)$ и $nf\{ns\}(\Phi_s) = nf\{nps\}(\mathrm{T}_s)$.

В качестве δ' выберем $\delta \cup \{Q_1^1, Q_2^1\} \cup \delta_0$, где δ_0- сигнатура счетного числа унарных предикатов. Положим $\mathrm{T}_s = \Phi_s \oplus T_{\text{н}.n}$, где $T_{\text{н}.n}$ - теория сигнатуры δ_0, аксиомами которой служат предложения вида

$$\exists x(P_{i1}(x) \wedge \ldots \wedge P_{im}(x) \wedge \neg P_{j1}(x) \wedge \ldots \wedge \neg P_{jk}(x)),$$

где все индексы $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m$ различны. Известно, что $T_{\text{н}.n}$ полна, не имеет простой модели и стабильна в мощностях $\geq 2^\omega$ [3,с.447]. Другими словами, $nf(T_{\text{н}.n}) = nf\{S\}(T_{\text{н}.n}) = 1$, $nf\{p\}(T_{\text{н}.n}) = 0$. Истинны следующие формулы:

$$nf\{np\}(\mathrm{T}_s) = nf(\mathrm{T}_s) - nf\{p\}(\mathrm{T}_s) = nf(\Phi_s),$$
$$nf\{ns\}(\mathrm{T}_s) = nf(\mathrm{T}_s) - nf\{s\}(\mathrm{T}_s) =$$
$$nf(\Phi_s) - nf\{s\}(\Phi_s) = nf\{ns\}(\Phi_s),$$
$$nf\{ns\}(\mathrm{T}_s) = nf\{ns\}(\mathrm{T}_s) - nf\{p\}(\mathrm{T}_s) \leq$$
$$\leq nf\{nps\}(\mathrm{T}_s) \leq nf\{ns\}(\mathrm{T}_s).$$

ТЕОРЕМА 3. Для каждых $\mu, \eta \in \{\emptyset, np, ns, nps\}$ и для каждого $A \subseteq N \cup \{\omega\}$ имеет место соотношение
$$NFS\{\mu\}(A) \equiv NFS\{\eta\}(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложений 1 и 2 достаточно показать, что $NFS\{nps\}(A) \equiv NFS(A)$. Каждому $s \epsilon N$ будем сопоставлять теорию T_s сигнатуры δ_0 такую, что и $nf\{nps\}(\Phi_s) = nf(\mathrm{T}_s)$. Напомним, что через Φ_t^{κ} обозначается формула сигнатуры δ с к свободными переменными с номером t. В качестве T_s выберем теорию, зависящий от s как от параметра и где предикаты R_1 и R_2 определены следующим образом:
$$R_1(i, t, \alpha) \leftrightharpoons i = i;$$
$R_e(c^5(i_1, \dots, i_5), \alpha)$ истинен, если и только если выполнены следующие условия:

1) $\Phi_{i1} \leftrightarrow \Phi_k$ не является -той тавтологией для каждого $k < i_1$;

2) или $\Phi_{i_1} \vdash \Phi_\alpha$ или $\Phi_{i_1} \vdash \neg\Phi_\alpha$, причем $\Phi_{i_1} \vdash \Phi_s$;

3) $\neg\Phi_{i_1}$ не является α – той выводимой из Φ_{i_1} формулой;

4) $\Phi_{i_1} \vdash \exists\, \overline{x_0} \cdots \exists \overline{x_\alpha}\, [\bigwedge_{k<t\leq\alpha}(\Phi^{2r(i_2)}_{l(i_2)}(\overline{x_k}, \overline{x_t})) \neg\, \Phi^{2r(i_2)}_{l(i_2)}(\overline{x_t}, \overline{x_k}))]$;

5) $l(\bigwedge_{i_3}) = i_2$ и для каждого $\mu < i_2$ $\Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x_0} \cdots \exists\overline{x_{b_\mu^{i_3}-1}}$ $[\bigwedge_{k<t<b_\mu^{i_3}}(\Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_k}, \overline{x_t})\neg\Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_t}, \overline{x_k}))]$;

6) Для каждого $\mu < i_2$ $\exists x_0 \dots \exists\overline{x_{b_\mu^{i_3}}}$ $[\bigwedge_{k<t\leq b_\mu^{i_3}} (\Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_k}, \overline{x_t})\ \neg\Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_t}, \overline{x_k}))]$ не является α – той выводимой из Φ_{i_1} формулой;

7) $\Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x}\, \Phi^{r(i_4)}_{l(i_4)}(\overline{x})$;

8) Или $\Phi_{i_1} \vdash \forall\overline{x}\ (\Phi^{r(i_4)}_{l(i_4)}(\overline{x}) \rightarrow (\Phi^{r(i_4)}_{\alpha}(\overline{x}))$ или $\Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x}[\Phi^{r(i_4)}_{\beta}(\overline{x})\neg\, \Phi^{r(i_4)}_{\alpha}(\overline{x})]$ для некоторого $\beta \in N$;

9) $l(\bigwedge_{i_4}) = i_5$ и для каждого $\mu < i_4$ выполнено одно из следующих требований:

а) $\Phi_{i_1} \vdash \forall\overline{x}\ \neg\Phi^{r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x})$ и $b_\mu^{i_5} = 0$;

б) $\Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x}\ [\Phi^{r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x})\square\ \Phi^{r(\mu)}_{b_\mu^{i_5}}(\overline{x})]\ \{\forall\overline{x}\ [\Phi^{r(\mu)}_{b_\mu^{i_5}}(\overline{x}) \rightarrow [\Phi^{r(\mu)}_{\alpha}(\overline{x})]\ \ \forall\overline{x}\ [\Phi^{r(\mu)}_{b_\mu^{i_5}}(\overline{x}) \rightarrow \neg\Phi^{r(\mu)}_{\alpha}(\overline{x})]]\}$;

10) Для каждого $\mu < i_4$ и для каждого $\eta < b_\mu^{i_5}$ имеет место одна из следующих возможностей:

а) $\Phi_{i_1} \vdash \forall\overline{x}\ [\Phi^{r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x}) \rightarrow\ \neg\Phi^{r(\mu)}_{\eta}(\overline{x})]\}$;

б) $\Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x}[\Phi^{r(\mu)}_{\eta}(\overline{x})\Phi^{r(\mu)}_{\gamma}(\overline{x})]\ \exists\overline{x}[\Phi^{r(\mu)}_{\eta}(\overline{x})\neg\Phi^{r(\mu)}_{\gamma}(\overline{x})]$ для некоторого $\gamma \in N$.

Нетрудно заметить, что $nf(\mathrm{T}_s) = |\{i \in N | R_2(i, \alpha)$ для каждого $\alpha \in N\}| = |\,\mathrm{I}(\mathrm{T}_s)|$.

ЛЕММА 4. Для каждого $s \in N$ $nf(\mathrm{T}_s) \geq nf\{nps\}(\Phi_s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ф - к.а. нестабильное пополнение $[\Phi_s]$, не имеющее простую модель. $i_1 = \min\{\mu | \vdash \Phi \leftrightarrow \Phi_\mu\}$, $i_2 = \min\{\mu$ для каждого $\alpha \in N$ $\Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x_0}\dots\exists\overline{x_\alpha}\{\bigwedge_{k<t<\alpha}(\Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_k}, \overline{x_t}) \neg\, \Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_t}, \overline{x_k}))]\}$. Так как Φ_{i_1} нестабильна, то i_2 существует. По определению числа i_2 для каждого $\mu < i_2$ существует b_μ такое, что $\Phi_{i_1} \nvdash \exists\overline{x_0} \dots \exists\overline{x_\alpha}\ \{\ \bigwedge_{k<t<b_\mu}(\Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_k}, \overline{x_t}) \neg\, \Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_t}, \overline{x_k}))]$. Положим $\bigwedge_{i_3} = < b_0, \dots, b_{i_2-1} >$, где для каждого $\mu < i_2$ $b_\mu = \max\{\eta \in N | \Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x_0}\dots\exists\overline{x_\eta}\{\bigwedge_{k<t<\eta}(\Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_k}, \overline{x_t}) \neg\, \Phi^{2r(\mu)}_{l(\mu)}(\overline{x_t}, \overline{x_k}))]$. Так как Φ_{i_1} не имеет простую модель, то Φ_{i_1} не является атомной. Существует непополнимая в Φ_{i_1} формула. Положим $i_4 = \min\{\mu \in N | \Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x_0}\Phi^{r(\mu)}_{l(\mu)}$ и $\Phi^{r(\mu)}_{l(\mu)}$ не пополнима в теории $\Phi_{i_1}\}$. По определению числа i_4 для каждого $\mu < i_4$ или $\Phi^{r(\mu)}_{l(\mu)}$ не совместна с Φ_{i_1} или $\Phi^{r(\mu)}_{l(\mu)}$ пополнима в

Φ_{i_1}. В первом случае $b_\mu = 0$, во втором $b_\mu = \min\{\eta \in N | \Phi_\eta^{r(\mu)}$ не является пополнением формулы $\Phi_{l(\mu)}^{r(\mu)}$ в теории $\Phi_{i_1}\}$. Положим $i = c^5(i_1, \dots, i_5)$. Покажем, что $i \in I(\mathrm{T}_5)$. Пусть α зафиксировано. В силу выбора i_1 выполняются первые три условия. Выбор числа i_2 обеспечивает выполнение четвертого условия. Выполнение пятого и шестого условий обеспечено выбором i_3. Верны и следующие два условия, так как $\Phi_{l(i_4)}^{r(i_4)}$ – совместная с Φ_{i_1} и непополнимая в Φ_{i_1} формула. Для того чтобы удостовериться в выполнении последних двух условий, достаточно взглянуть на выбор числа i_5.

Для каждого к.а., нестабильного и не имеющего простую модель пополнения Ф теории $[\Phi_s]$ поставили в соответствие число $i \in I(\mathrm{T}_s)$. Причем, это соответствие инъективно.

Действительно, если $\Phi \neq \Phi'$, то $i_1 \neq i_1^{'}$. Следовательно, $i \neq i^{'}$.

ЛЕММА 5. Для каждого s$\in N$ $nf\{nps\}(\Phi_s) = nf(\mathrm{T}_s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i = c^5(i_1, \dots, i_5) \in I(\mathrm{T}_5)$. Покажем, что Φ_{i_1} - к.а. нестабильное пополнение Φ_s без простой модели. Если Φ_{i_1} противоречива, то $\Phi_{i_1} \vdash \neg\Phi_{i_1}$.

Следовательно, $\neg R_2(i, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in N$ (третье условие не выполнено). Если Φ_{i_1} не является к.а. пополнением Φ_s, то в силу второго условия $\neg R_1(i, 0)$. Если Φ_{i_1} стабильна, то таким бы не выбрали i_2 существует $\alpha \in N$, для которого не выполнимо четвертое условие. Следовательно, $\neg R_2(i, \alpha)$. Если Φ_{i_1} имеет простую модель, то она атомна. Каким бы не выбрали i_4 либо $\Phi_{i_1} \vdash \forall\bar{x} \neg \Phi_{l(i_4)}^{r(i_4)}(\bar{x})$ либо существует пополнение формулы $\Phi_{l(i_4)}^{r(i_4)}$, скажем $\Phi_\alpha^{r(i_4)}$. Тогда не выполняется либо седьмое условие, либо восьмое условие.

Поставим в соответствие каждому $i \in I(\mathrm{T}_s)$ предложение Φ_{i_1}. Осталось показать инъективность указанного соответствия. Пусть $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_1^{'}}$-к.а. нестабильные пополнения без простой модели, причем $\vdash \Phi_{i_1} \leftrightarrow \Phi_{i_1^{'}}$. Если $i_1 \neq i_1^{'}$, то в силу первого условия или $\neg R_2(i, \alpha)$ или $\neg R_2(i^{'}, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in N$. Утверждаем, что $i_2 = i_2^{'}$ =min{c(m,n)| $\Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x_0} \dots \exists\overline{x_\alpha}\{ \bigwedge_{k<t<\alpha} (\Phi_m^{2n}(\overline{x_k}, \overline{x_t}) \neg \Phi_m^{2n}(\overline{x_t}, \overline{x_k}))]$ для каждого $\alpha \in N$. В противном случае, не ограничивая общности, будем считать, что i_2 удовлетворяет одному из следующих условий:

1)$\Phi_{i_1} \forall\exists\overline{x_0} \cdots \exists\overline{x_\alpha}[\bigwedge_{k<t\le\alpha}(\Phi_{l(i_2)}^{2r(i_2)}(\overline{x_k}, \bar{x}_t) \neg \Phi_{l(i_2)}^{2r(i_2)}(\bar{x}_t, \overline{x_k}))]$ для некоторого $\alpha \in N$;

2)$(\exists\mu < i_2)[\ \Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x_0} \cdots \exists\overline{x_\beta}[\bigwedge_{k<t<\beta}(\Phi_{l(\mu)}^{2r(\mu)}(\overline{x_k}, \bar{x}_t) \neg \Phi_{l(\mu)}^{2r(\mu)}(\bar{x}_t, \overline{x_k}))]$ для всех $\beta \in N]$.

В первом случае $\neg R_2(i, \alpha)$ (четвертое условие). Во втором случае каким бы не выбрали $b_\mu^{i_3}$ существует вывод указанной формулы при $\beta = b_\mu^{i_3} + 1$. И в этом случае $\neg R_2(i, \gamma)$ для некоторого $\gamma \in N$ (шестое условие), если быть точным, то γ равна номеру указанной формулы.

Так же утверждаем, что $l(\bigwedge_{i_3}) = l(\bigwedge_{i_3^{'}}) = i_2$ и для каждого $\mu < i_2$ $b_\mu^{i_3} = b_\mu^{i_3^{'}}$ = max{n| $\Phi_{i_1} \vdash \exists\overline{x_0} \dots \exists\overline{x_{n-1}}[\bigwedge_{k<t<n}(\Phi_{l(\mu)}^{2r(\mu)}(\overline{x_k}, \bar{x}_t) \neg \Phi_{l(\mu)}^{2r(\mu)}(\bar{x}_t, \overline{x_k}))]\}$. Нетрудно поверить, что это – следствие пятого и шестого условий. Так же легко проверяется, что i_4 - наименьшее (девятое условие) число, для которого $\Phi_{l(i_4)}^{r(i_4)}$ совместна с Φ_{i_1}(седьмое условие), непополнима в Φ_{i_1}(восьмое условие). Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что для каждого $\mu < i_4$ имеет место соотношение $b_\mu^{i_5} = b_\mu^{i_5^{'}} = \min\{t \in \mathrm{N} | \Phi_t^{r(\mu)}$ пополнение формулы $\Phi_{l(\mu)}^{r(\mu)}$ в теории $\Phi_{i_1}\}$, если $\Phi_{l(\mu)}^{r(\mu)}$ совместна с Φ_{i_1}; $b_\mu^{i_5} = b_\mu^{i_5^{'}}$ =0, в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует из приведенных лемм.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\mathrm{A} \subseteq N \cup \{\omega\}$ и $\mathrm{A} \cap N \in \Delta_3^0$. Тогда для каждого $\eta \in \{\emptyset, np, ns, nps\}$ имеют место следующие утверждения:

а) Если или $\mathrm{A} = \emptyset$ или $\mathrm{A} = N \cup \{\omega\}$, то $NFS\{\eta\}(A)$ – рекурсивно.

б) Если А является непустым конечным подмножеством N, где $0 \in \mathrm{A}$, то $NFS\{\eta\}(A) \approx \prod_{3,2\mu(\mathrm{A})-1}$;

в) Если А является непустым конечным подмножеством $N \setminus \{0\}$, то $NFS\{\eta\}(A) \approx \sum_{3,2\mu(\mathrm{A})}$;

г) Если $\{0,\omega\} \subseteq A$ и $N \setminus A$ конечно и непусто, то $NFS\{\eta\}(A) \approx \prod_{3,2\mu(N\setminus A)}$;

д) Если $0 \notin \mathrm{A}$, $\omega \in \mathrm{A}$ и $N \setminus A$ конечно, то $NFS\{\eta\}(A) \approx \sum_{3,2\mu(N\setminus A)-1}$;

е) во всех остальных случаях либо $NFS\{\eta\}(A) \approx \sum_4^0$ либо $NFS\{\eta\}(A) \approx \prod_4^0$.

Литература:

1. Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – Москва: Наука, 1977. - 416с.
2. Перетятькин М.Г. Конечно аксиоматизируемые теории. -Новосибирск, Научная книга, 1997 – 318 с.
3. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. – М.: Мир, 1977. – С.616.

Резюме

В работе изучена алгоритмическая сложность некоторых спектральных классов предложений. Для получения оценок применена операция прямой суммы теории. Доказано, что добавление свойств нестабильности и отсутствие простой модели не изменяет сложность классов предложений. Приведен аналог теоремы Райса для этих спектральных классов.

Ключевые слова: спектральные классы, свойство нестабильности, теорема Райса.

Түйіндеме

Жұмыста кейбір тұжырымдардың спектральды класстарының алгоритмдік қиындықтары қарастырылған. Бағаларды алу үшін теориялардың тура қосындысы операциясы қолданылды. Тұрақсыздық қасиеттерін қосу және қарапайым модельдің болмауы тұжырымдар класының күрделілігін өзгертпейтіні дәлелденген. Осы спектральды класстар үшін Райс теоремасының аналогы келтірілген.

Кілт сөздер: спектрлық класс, тұрақсыздық қасиет, Райс теоремасы.

Summary

In work algorithmic complexity of some spectral classes of offers is studied. The theory of the direct sum is applied to receivivy estimates. It is proved that addition of properties of instability and absence of simple model don't change complexity of classes of offers. The analog of the theorem of Rice for these spectral classes is given.

Key words: spectral classes, property of non-stability, theorem of Rice.

УДК 512.57

TRIPLE OF OPERADS: *(C, NOV, LIE)*

N.A. ISMAILOV

Al-Farabi Kazakh National University, Faculty of Mechanics and Mathematics

Almaty, Kazakhstan

J.-L. Loday introduced in ([1]) the notion *triple of operads* $(C, \chi, A, F: A\text{-alg} \to P\text{-alg})$ abbreviated (C, A, P) consisting of operads *C* and *A*, a compatibility relations χ between *C*-coalgebras and A-algebras defining (C, χ, A)- bialgebras, an operad *P* describing the algebraic structure of the primitive part $\mathrm{Prim}(H)$ of the bialgebra, and a forgetful functor *F* from the category of *A*-algebras to the category of *P*-algebras. Let *U* be a left adjoint to *F*. *A* triple of operads (C, A, P) is to be the good if the following three conditions are equivalent:

(a) *H is connected,*

(b) $H \cong U(\mathrm{Prim}\,H)$,

(c) *H is cofree over its primitive part.*

The classical case is (*C, A, P*)=(Com, As, Lie). Other type of good triple of operads can be found ([1]).

Let *A* is an operad for Lie admissible algebras. *J.-L*. Loday asked in ([1]) whether there are an operad *C* and compatibility relation χ such that (C, χ, A, Lie) is a good triple. Novikov algebra is a particle example of Lie admissible algebras. In the Novikov case we see that answer to the question is negative. $A=(A,\circ)$ is Novikov algebra with multiplication $a\circ b,$ then

$$(a,b,c)=(a,c,b),$$
$$a(bc)=b(ac)$$

for any $a,b,c\in A$ Here

$$(a,b,c)=a(bc)-(ab)c$$

is associator.

Let $A=C[x]$ and $a\circ b=\partial(a)b,$ where $\partial=\frac{\partial}{\partial x}$ be partial derivation. Then $(A,\circ)$ is Novikov algebra. In [2] and [3] are given construction of base of free Novikov algebra. Let us denote *Nov* type of operad of Novikov algebras. Let $\Re(n)$ is a S_n-module for $\Re$-algebras generated by n elements and let

$$f^{\Re}(t)=\sum_{n\geq 1}\frac{\dim\Re(n)}{n!}t^n.$$

Proposition. ([1]) *If (C,A,P) is a good triple of operads, then there is a identity of formal power series:*

$$f^A(t)=f^C(f^P(t)).$$

Proposition. *There is no operad C and compatibility relation* χ *such that* (C,χ,Nov,Lie) *is a good triple.*

Proof. Suppose that there is an operad *C* and compatibility relation χ such that (C,χ,Nov,Lie) is a good triple. Then by proposition 0.1, we calculate dimension of *C*-coalgebras and obtain

$$f^C(t)=t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{3t^4}{4}-O(t^5)$$

Algebra with identities

$$a(bc)=b(ac) \text{ (left-commutative),}$$

$$(ab)c=(ac)b \text{ (right-commutative)}$$

is called bicommutative. Bicommutative algebras is also an example of Lie admissible algebras *A* base and dimension of bicommutative algebras is given in [4]. Answer is negative too if *A* is an operad of bicommutative algebras. If we consider right-symmetric operad for *A*, then in low degrees the dimension of *C*(n)

$$\dim C(n)=1,1,2,1,3,8$$

But we do not know concrete description of this cofree coalgebra Not only we have to find the operad *C* but also the compatibility relations.

References:

1. Loday J.-L. Generalized bialgebras and triples of operads, Aste'risque 320 (2008), x+116 pp.
2. Dzhumadil'daev A.S. Lofwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities, Homology, Homotopy and Appl.,4 (2002), No.2(1), pp.165-190.
3. Dzhumadil'daev A.S. Codimension growth and non-Koszulity of Novikov operad, Comm. Algebra., 39 (2011), No. 8, pp.2943-2952.
4. Dzhumadil'daev A.S., N.A.Ismailov, K.M.Tulenbaev, Free bicommutative algebras, Serdica Math. J., 37 (2011), No. 1, pp.25-44.

Summary

It is proved that there is no an operad C for coalgebra such that (C,Nov,Lie) would be a good triple of operads in terms of definingin [1]. As examples of Lie invalid operads for C, considered bicommutative and right-symmetric operads for that triple.

Key words: free algebras, triple of operads.

Түйіндеме

Бұл жұмыста [1]-де анықталған (C,Nov,Lie) үштік операдтары жақсы болатындай коалгебра үшін C операдасы болмайтындығы көрсетіледі. Сонымен қатар, мысал ретінде Ли болымды болатын бикоммутатиті және оң-симметриялы операдалары коалгебра түрінде қарастырылады.

Кілт сөздер: еркін алгебралар, үштік операдтар.

Резюме

В работе доказывается, что не существует операда C для коалгебры, чтобы тройка операдов (C,Nov,Lie) была хорошей, в смысле как определяется в [1]. А также на ряде примеров Ли допустимых операдов для C рассматриваются бикоммутативная и право-симметричная операды.

Ключевые слова: свободная алгебра, тройка операдов.

УДК 510.678

НЕКОНЕЧНАЯ БАЗИРУЕМОСТЬ ОДНОЙ АРИФМЕТИКИ С ВЫДЕЛЕННОЙ КОНСТАНТОЙ

А.М.КУНГОЖИН, PhD
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы,
Республика Казахстан

1. Введение

В данной работе изучается алгебраическая система $A_1 = \langle \mathrm{R}, 1, \neg, \cdot, = \rangle$, где основное множество состоит из действительных чисел, выделяется константа 1, имеется одна унарная операция $\neg x = 1 - x$, а также одна бинарная операция $\cdot$ – обычное умножение. Отметим, что эти операции фундаментальны в нечеткой логике Заде [1].

В работе автора [2] изучалась алгебраическая система $A = \langle \mathrm{R}, \neg, \cdot, = \rangle$, в которой, в отличие от алгебраической системы A_1, не выделяются константы. В данной работе используются как понятия и обозначения из [2], так и вводятся их некоторые обобщения и новые понятия.

Определение 1.

а) Константа 1 и переменные $x, y, x_1, x_2, \ldots$ являются *термами сложности* 0;

б) пусть t, t_1 – термы сложности n, а терм t_2 – сложности не более чем n, тогда выражения $\neg(t)$, $(t_1) \cdot (t_2)$ и $(t_2) \cdot (t_1)$ являются *термами сложности* $n + 1$;

в) других термов нет.

Если термы $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадают в записи, то мы пишем

$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Понятно, что при подстановке вместо переменных произвольных элементов из основного множества термы будут принимать конкретные значения. Равенство термов $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (от одних и тех же переменных) может выполняться при одних значениях переменных и не выполняться при других. Если равенство выполняется при любых значениях переменных, то оно называется тождеством, и мы его буди обозначать так:

$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

При изучении любой алгебры одним из первых и важных вопросов оказывается проблема выделения всех тождеств, выполняющихся в ней. Понятно, что все тождества, выполняющиеся в алгебре A, также будут выполняться и в алгебре A_1.

Определение 2. *Базисом* во множестве тождеств называется такое его подмножество, что любое тождество оказывается его логическим следствием.

Хорошо известна теорема Биркгофа [3] о полноте эквационального исчисления, согласно которой с помощью правила подстановки из системы тождеств и аксиом равенства можно получить все тождества, являющиеся логическими следствиями этой системы. То есть, если нам задан базис тождеств

$$\{b_i(x_1, x_2, \ldots, x_{ni}) = \beta_i(x_1, x_2, \ldots, x_{ni}) : i \in I\},$$

тогда для всякого тождества $t = \tau$, истинного в алгебре, можно построить цепочку тождественных им термов

$$t \equiv t_1 = t_2 = ... = t_k \equiv \tau,$$

таких, что каждый последующий терм получен из предыдущего путем замены в нем какого-то подтерма $b_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n\,i})$ на подтерм $\beta_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n\,i})$ (или наоборот), где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n\,i}$ сами являются подтермами.

Проблема конечной базируемости – это проблема о существовании конечного подмножества тождеств, из которого следуют все остальные тождества.

В данной работе даётся отрицательный ответ на вопрос о существовании конечного базиса тождеств алгебры A_1.

2. Полиномы, соответствующие термам алгебры A_1

Каждому терму в алгебре A_1 соответствует некоторый полином, который при подстановке действительных значений вместо переменных принимает те же значения, что и терм. Вид *соответствующих полиномов* определяктся индукцией по сложности термов.

Определение 3.
а) Термам $1, x, y, x_1, x_2, \ldots$ (сложности 0) соответствуют полиномы $1, x, y, x_1, x_2, \ldots$;
б) Если терму t сложности k соответствует полином p, тогда терму $\neg t$ будет соответствовать полином $1 - p$;
в) Если термам t и τ сложности не большей чем k соответствуют полиномы p и q, тогда терму $t \cdot \tau$ будет соответствовать полином $p \cdot q$. В дальнейшем, если нет опасности разночтения, знак умножения $\cdot$ в полиномах будем опускать: $p \cdot q = pq$.

Так как значения любых термов совпадают со значениями соответствующих полиномов, то термы тождественны тогда и только тогда, когда тождественны соответствующие им полиномы.

Легко убедиться в том, что предложения 1-4 из [2] также будут справедливы и для алгебры A_1.

3. 1-тривиально тождественные термы и 1-тривиальные термы.

Следующее понятие являются обобщением понятия тривиально тождественных термов алгебры A (определение 3 из [2]).

Определение 4. Два терма t и τ называются 1-*тривиально тождественными* в A_1 (обозначим $t \cong_1 \tau$), если они могут быть получены друг из друга путем цепочки замен, использующих только тождества

$$\neg(\neg t) = t,\ t_1 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_1,\ (t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3),\ t_1 \cdot 1 = t_1 \text{ и } t_1 \cdot \neg 1 = \neg 1.$$

Нетрудно понять, что 1-тривиально тождественные термы являются тождественными термами в алгебре A_1. Тривиально-тождественные термы в алгебре A являются 1-тривиально тождественными в алгебре A_1. А также отношение 1-тривиальной тождественности является отношением эквивалентности, то есть рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением.

Запись некоторых термов в алгебре A_1 можно *упрощать*, при этом они будут оставаться 1-тривиально тождественными исходным термам. Дадим более формальное определение упрощения.

Определение 5. Терм $S(t)$, полученный из терма t путем сокращения его записи по правилам:

$$\neg(\neg\tau) = \tau,\ \tau \cdot 1 = \tau,\ 1 \cdot \tau = \tau,\ \tau \cdot \neg 1 = \neg 1,\ \neg 1 \cdot \tau = \neg 1,$$

называется *упрощением терма* t. Сокращения записи производятся в произвольном допустимом порядке. Упрощением терма является минимальная, то есть далее не сокращаемая, запись.

Замечание 1. При упрощении не допускается перестановка (коммутирование) подтермов и сохраняется порядок применения основных операций отрицания и умножения. Тем не менее, правила упрощения выводимы из правил 1-тривиальных преобразований из определения 4.

Замечание 2. Для произвольного терма t справедливо: $S(t) \equiv 1$, $S(t) \equiv \neg 1$ или $S(t)$ не содержит в своей записи 1 (поскольку в записи терма $S(t)$ отсутствуют двойные отрицания, а 1 и $\neg 1$ не могут в нем встречаться в виде сомножителей). Поэтому, отдельно оговаривая случаи $S(t) \equiv 1$ и $S(t) \equiv \neg 1$, можем рассматривать терм $S(t)$ в качестве терма алгебры A.

Предложение 1. Для произвольного терма t алгебры A_1 его упрощение $S(t)$ тождественно терму t.

Доказательство. Заметим, что правила упрощения не меняют значения соответствующего полинома. А так как соответствующие полиномы для термов t и $S(t)$ совпадают, то эти термы тождественны.

Лемма 1. Для произвольного терма t алгебры A_1 его упрощение $S(t)$ определяется однозначно, то есть результат не зависит от порядка сокращения записи.

Доказательство. Докажем утверждение леммы индукцией по сложности терма t.

База индукции очевидна: для термов x и 1 (сложности 0) их упрощения $S(x) \equiv x$ и $S(1) \equiv 1$ определяются однозначно, так как ни одно из правил упрощения для них не применимо.

Пусть утверждение леммы верно для термов, сложность которых не превосходит k. Докажем, что оно также верно и для произвольного терма t, сложность которого равна $k + 1$.

Возможны два случая формирования терма t:

а) $t \equiv t_1 \cdot t_2$,

б) $t \equiv \neg t_1$,

где сложность подтермов t_1 и t_2 не превосходит k.

В случае а) упрощения могут производиться внутри подтермов t_1 и t_2 по отдельности, либо между ними. Если сокращения записи возникают только внутри подтермов t_1 и t_2 (этот подслучай возникает, если подтермам t_1 и t_2 не соответствуют полиномы 1 и 0), то, по индукционному предположению, порядок сокращения записи всего терма t не влияет на итоговый результат, который равен $S(t) \equiv S(t_1) \cdot S(t_2)$.

Сокращение между подтермами t_1 и t_2 может возникнуть, только если хотя бы одному из этих подтермов будет соответствовать полином 1 или 0. Если одному из этих подтермов соответствует полином 0, то в любом случае $S(t) \equiv \neg 1$. Если одному из этих подтермов соответствует полином 1 (не теряя общности, положим $S(t_1) \equiv 1$), то в любом случае $S(t) \equiv S(t_2)$, а по индукционному предположению $S(t_2)$ определяется однозначно.

Если в случае б) в ходе различных упрощений не возникало сокращение внешнего отрицания, то, по индукционному предположению, $S(t)$ определяется однозначно $S(t) \equiv \neg S(t_1)$. Сокращение внешнего отрицания может возникнуть, только если на некотором шаге упрощения подтерма t_1 вместо него получится подтерм $\neg t'$. По индукционному предположению, упрощения $S(t_1)$ и $S(t')$ определяются однозначно, причем $S(t_1) \equiv \neg S(t')$, либо $S(t') \equiv \neg S(t_1)$. В обоих случаях $S(t) \equiv S(t')$.

Определение 6. Терм t алгебры A_1 называется 1-*тривиальным*, если всякий тождественный ему терм является 1-тривиально тождественным ему.

Пример 1. Термы 1 и $\neg 1$ являются 1-тривиальными.

Доказательство. Пусть существует терм t, который тождественен 1 ($t = 1$), тогда, в силу предложения 1, $S(t) = S(1) = 1$. Заметим, что $S(t) \equiv 1$ по замечанию 2. Так как правила упрощения выводимы из 1-тривиально тождественных преобразований (но не наоборот!), то $t \cong_1 1$. Аналогично решается вопрос в случае, если $t = \neg 1$.

Следующая лемма показывает связь между понятиями 1-тривиально тождественными термами, 1-тривиальными термами алгебры A_1 и тривиально тождественными термами, тривиальными термами алгебры A.

Лемма 2. Упрощения для произвольных термов t и τ обладают следующими свойствами:

а) $t \cong_1 \tau$ тогда и только тогда, когда $S(t) \cong S(\tau)$ в алгебре A (при этом будем считать, что в алгебре A справедливы тривиальные тождества $1 \cong 1$ и $\neg 1 \cong \neg 1$);

б) терм t является 1-тривиальным тогда и только тогда, когда терм $S(t)$ является тривиальным в алгебре A (при этом будем считать, что в алгебре A термы 1 и $\neg 1$ – тривиальны).

Доказательство.

а) Необходимость. Пусть $t \cong_1 \tau$. Если $t = \tau = 1$ или $t = \tau = \neg 1$, то упрощения этих термов равны 1 или $\neg 1$, соответственно. Тогда вопрос очевиден, в силу принятых допущений $1 \cong 1$ и $\neg 1 \cong \neg 1$ в алгебре A. В общем случае существует цепочка тождеств $t \equiv \tau_0 \cong_1 \tau_1 \cong_1 \tau_2 \cong_1 \ldots \cong_1 \tau_m \equiv \tau$, где на каждом шаге использующих только тождества $\neg(\neg t) = t$, $t_1 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_1$, $(t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$, $t_1 \cdot 1 = t_1$ и $t_1 \cdot \neg 1 = \neg 1$.

Тогда упрощения соседних термов τ_i и τ_{i+1} в этой цепочке будут тривиально тождественными в алгебре A. Действительно, тождества $\neg(\neg t) = t$, $t_1 \cdot 1 = t_1$ и $t_1 \cdot \neg 1 = \neg 1$ сами являются правилами упрощения. Если $S(\tau_i) \not\equiv S(\tau_{i+1})$, то между термами τ_i и τ_{i+1} было применено либо правило коммутативности, либо правило ассоциативности. Проводя пошаговые сокращения записи в термах τ_i и τ_{i+1} в одинаковом порядке в итоге получим два терма $S(\tau_i)$ и $S(\tau_{i+1})$, которые получаются из друг друга с помощью соответствующих правил коммутации или ассоциативности. Тогда термы $S(\tau_i)$ и $S(\tau_{i+1})$ тривиально тождественны в алгебре A. Так как отношение тривиальной тождественности в алгебре A является отношением эквивалентности, то и конечные звенья этой цепи термы $S(t)$ и $S(\tau)$ тривиально тождественны в алгебре A.

а) Достаточность. Пусть $S(t) \cong S(\tau)$ в алгебре A. Если $S(t) = S(\tau) = 1$, или $S(t) = S(\tau) = \neg 1$, то вопрос очевиден, в силу 1-тривиальности термов 1 и $\neg 1$. В общем случае из $S(t) \cong S(\tau)$ следует $S(t) \cong_1 S(\tau)$, так правила 1-тривиально тождественных преобразований содержат в себе все правила преобразований тривиальных тождеств. А поскольку правила упрощения выводимы из 1-тривиально тождественных преобразований, то $t \cong_1 S(t) \cong_1 S(\tau) \cong_1 \tau$. Так как отношение 1-тривиальной тождественности является отношением эквивалентности, то $t \cong_1 \tau$.

б) Необходимость. Пусть терм t является 1-тривиальным. Выберем в алгебре A произвольный терм τ такой что $S(t) = \tau$. Следовательно, $t = \tau$. Так как терм t является 1-тривиальным, то $t \cong_1 \tau$. В силу а), $S(t) \cong S(\tau)$. Тривиальная тождественность $S(\tau) \cong \tau$ следует из того, что упрощения для термов алгебры A может заключаться только в сокращении двойного отрицания. Таким образом, $S(t) \cong \tau$, то есть терм $S(t)$ является тривиальным в алгебре A.

б) Достаточность. Пусть терм $S(t)$ является тривиальным в алгебре A. Выберем в алгебре A_1 произвольный терм τ такой что $t = \tau$, тогда $S(t) = S(\tau)$. Так как терм $S(t)$ является тривиальным, то $S(t) \cong S(\tau)$. Следовательно, в силу а), $t \cong_1 \tau$, то есть t является 1-тривиальным в алгебре A_1.

Лемма доказана.

Следствие 1. Если терм $S(t)$ тривиально тождественен термам вида

$$\neg(x_1x_2\ldots x_{k1}\neg(y_1y_2\ldots y_{k2}\ldots\neg(z_1z_2\ldots z_{kn})\ldots), \tag{1}$$

$$x_1x_2\ldots x_{k1}\neg(y_1y_2\ldots y_{k2}\ldots\neg(z_1z_2\ldots z_{kn})\ldots) \tag{2}$$

то терм $S(t)$ тривиален в алгебре A (в силу леммы 4 из [2]). Тогда, в силу пункта б) леммы 2, терм t является 1-тривиальным.

4. Теорема о неконечной базируемости

Теорема 1. Система тождеств алгебры A_1 не имеет конечного базиса.

Доказательство. От противного, пусть алгебра A_1 имеет конечный базис тождеств. Мы можем считать, что базис также содержит 1-тривиальные тождества, выражающие законы коммутативности, ассоциативности, а также правила упрощения $\neg\neg t = t$, $t \cdot 1 = t$ и $t \cdot \neg 1 = \neg 1$. Тогда все термы базисных тождеств (за исключением правил упрощения) мы можем упростить по определению 5, при этом получившийся конечный набор тождеств будет оставаться базисом тождеств алгебры A_1. В дальнейших рассуждениях будем использовать упрощенный базис.

Для конечного базиса существует четное положительное число n, которое ограничивает число переменных в базисных тождествах. Для этого числа n тождество

$$\neg(x_1\neg(x_2\ldots\neg(x_{n-1}\neg(x_nx_1\neg(x_2\ldots\neg(x_{n-1}\neg(x_n))\ldots) =$$
$$= \neg(x_1x_2\ldots x_n)\neg(x_1\neg(x_2\ldots\neg(x_n))\ldots), \tag{3}$$

является тождеством в алгебре A_1. Действительно, нетрудной проверкой убеждаемся, что обоим частям тождества соответствует один и тот же полином $1 - x_1 + x_1x_2 - \ldots - x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1^2x_2\ldots x_n - x_1^2x_2^2x_3\ldots x_n + \ldots - x_1^2x_2^2x_3^2\ldots x_n^2$. Тогда для данного тождества возможно построить цепочку тождеств

$$t \equiv t_0 = t_1 = \ldots = t_k \equiv \tau, \tag{4}$$

где на каждом шаге используется базисное преобразование, где терм t совпадает с левой частью, терм τ совпадает с правой частью тождества (3). Тогда справедлива также цепочка тождеств:

$$S(t) \equiv S(t_0) = S(t_1) = \ldots = S(t_k) \equiv S(\tau).$$

Так как упрощения $S(t)$ и $S(\tau)$ для термов t и τ не тривиально тождественны в алгебре A, то существует индекс i, такой что

$$S(t) \equiv S(t_0) \cong S(t_1) \cong \ldots \cong S(t_i) \not\cong S(t_{i+1}).$$

Тогда, в силу леммы 2: $t \equiv t_0 \cong_1 t_1 \cong_1 \ldots \cong_1 t_i \not\cong_1 t_{i+1}$.

Пусть на шаге i в цепочке (4) было применено базисное преобразование

$$b(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) = \beta(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k),$$

где $k < n$ и $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ – подтермы. Очевидно, что оно не 1-тривиальное

$$b(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) \not\cong_1 \beta(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k).$$

Тогда

$$S(b(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)) \not\cong S(\beta(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)),$$
$$S(b(S(\theta_1), S(\theta_2),\ldots, S(\theta_k))) \not\cong S(\beta(S(\theta_1), S(\theta_2), \ldots, S(\theta_k))).$$

Тогда

$$b(S(\theta_1), S(\theta_2),\dots, S(\theta_k)) \ncong_1 \beta(S(\theta_1), S(\theta_2), \dots, S(\theta_k)).$$

Следовательно,

$$b(y_1,y_2,\dots,y_k) \ncong_1 \beta(y_1,y_2,\dots,y_k),$$

где y_k – переменные. Из последнего отношения следует и

$$b(y_1,y_2,\dots,y_k) \ncong \beta(y_1,y_2,\dots,y_k),$$

так как мы договорились использовать упрощенный базис. Заметим, что $S(\theta_1)$, $S(\theta_2)$, …, $S(\theta_k)$ – подтермы, равные либо 1, либо ¬1, либо не содержат в своей записи 1.

Рассмотрим терм $b(z_1, z_2,\dots, z_k)$, где $z_j \equiv 1$, если $S(\theta_j) \equiv 1$; $z_j \equiv \neg 1$, если $S(\theta_j) \equiv \neg 1$; в противном случае z_j – обычная переменная. В силу леммы 1, если мы сначала сделаем упрощение $S(b(z_1, z_2,\dots, z_k))$, затем сделаем замены $S(\theta_j)$ вместо обычных переменных z_j, а после удалим двойные отрицания – в результате получим тоже, что $S(b(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k))$. Действительно, терм $S(b(z_1, z_2,\dots, z_k))$ будет термом алгебры A (то есть не содержит 1), либо равен 1 или ¬1, а соответствующие обычным переменным z_j термы $S(\theta_j)$ также являются термами алгебры A. Поэтому, после замен термами $S(\theta_j)$ вместо обычных переменных z_j, для окончательного упрощения останется только убрать двойные отрицания.

Заметим также, что при упрощении $S(t_i)$, в силу леммы 1, можно сначала упростить $S(b(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k))$. А так как $S(t_i) \ncong S(t_{i+1})$ и $t_i \ncong_1 t_{i+1}$, то вхождение терма $S(b(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k))$ в терм $S(t_i)$ не сокращается. То есть $S(b(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k))$ является подтермом терма $S(t_i)$. По аналогичным рассуждениям, если обычная переменная z_j входит в запись терма $S(b(z_1, z_2,\dots, z_k))$, то соответствующий терм $S(\theta_j)$ является подтермом терма $S(t_i)$.

Каждая обычная переменная z_i входит в запись терма $S(b(z_1, z_2,\dots, z_k))$ не более одного раза, по аналогичным рассуждениям доказательства леммы 7 из [2]. Тогда терм $S(b(z_1, z_2,\dots, z_k))$ тривиально тождественен терму вида (1) или (2). Тогда, в силу следствия 1, терм $S(b(z_1, z_2,\dots, z_k))$ – тривиален. Поэтому

$$S(b(z_1, z_2,\dots, z_k)) \cong S(\beta(z_1, z_2,\dots, z_k)),$$

следовательно,

$$b(z_1, z_2,\dots, z_k) \cong_1 \beta(z_1, z_2,\dots, z_k),$$
$$b(S(\theta_1),\dots, S(\theta_k)) \cong_1 \beta(S(\theta_1),\dots, S(\theta_k)).$$

Противоречие.

Замечание 3. На самом деле мы доказали более сильное утверждение, а именно: множество всех тождеств, выполняющихся в алгебре A_1, не имеет базиса от конечного числа переменных.

Действительно, в доказательстве теоремы мы пользовались лишь тем фактом, что существует ограничение на количество переменных в базисных тождествах, и не существенно, конечен или бесконечен базис тождеств.

Литература:

1. Zadeh L. A., Fuzzy sets // Inf. Control. - 1965. - Vol. 8. - P. 338-353.
2. Кунгожин А.М. Неконечная базируемость одной числовой системы // Алгебра и логика. - 2012. - Т. 51. - №1. - С. 82-95.
3. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras // Proc. Cambridge Philos. Soc. - 1935. - Vol. 31, № 4. - P. 433-454.

Резюме

В данной работе дается отрицательный ответ на вопрос о существовании конечного базиса тождеств для множества действительных чисел с выделенной константой, умножением и одноместной операцией $1 - x$. Для доказательства приведены бесконечные серии нетривиальных тождеств, которые не следуют из любого базиса тождеств с ограниченным числом переменных.

Ключевые слова: конечная базируемость, алгебра нечеткой логики.

Түйіндеме

Осы жұмыста ерекшеленген константамен нақты сандар жиында көбейту операциясы мен бір орынды $1 - x$ операциясы бар орындалатын барлық тепе-теңдік жиынының шекті базистелiну сұрағына кері шешім келтіріледі. Дәлелдеуде тривиалсыз тепе-теңдіктің шексіз сериясы келтірілген. Ол серия айнымалылар саны шектелген кез келген тепе-теңдіктер базисінен шықпайтыны көрсетілген.

Кілт сөздер: ақырлы базис, анық емес логиканың алгебрасы.

Summary

In this article we give a negative answer to the question of the existence of a finite basis of identities for the set of real numbers with a dedicated constant, multiplication and unary operation $1 - x$. To prove this fact the infinite series of non-trivial identities are given that do not follow from any basis of identities with a limited number of variables.

Key words: finite basis, the algebra of fuzzy logic.

УДК 514.7; 517.977

СУБРИМАНОВА ЗАДАЧА НА ТРЕХМЕРНОЙ ГРУППЕ ЛИ SOLV+ С ПРАВОИНВАРИАНТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

А.Д. МАЖИТОВА, PhD
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы,
Республика Казахстан

В настоящее время задачи неголономной (или субримановой) геометрии вызывают большой интерес [1,2,3,4]. Мы занимаемся исследованием групп SOLV − и SOLV + . В работах [5, 6] подробно изучены эти группы с левоинвариантным неголономным распределением.

В данной работе мы рассматриваем субриманову задачу на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ с правоинвариантным распределением.

Пусть M^n гладкое *n*-мерное многообразие. *Гладкое семейство*

$$\Delta = \{\Delta(q):\ \Delta(q) \in T_q M^n \quad \forall q \in M^n,\quad dim\,\Delta(q) = k\}$$

k-мерных подпространств в касательных пространствах в точке $q \in M^n$ *называется вполне неинтегрируемым (неголономным), если векторные поля из* Δ, *и их всевозможные коммутаторы порождают все касательное пространство* TM^n*:*

$$span\{[f_1, [\dots [f_{m-1}, f_m] \dots]](q):\ f_i(p) \in \Delta\,(p) \quad \forall p \in M^n, m = 1, \dots\} = T_q M^n.$$

Иногда такое распределение Δ называется вполне неголономным. Двумерное распределение Δ на трехмерном многообразии является вполне неголономным тогда и только тогда, когда

$$span\,\{f_1(q), f_2(q), [f_1(q), f_2(q)]\} = T_q M^3,$$

где в каждой точке q вектора $f_1(q), f_2(q)$ образуют базу в $\Delta(q)$.

Пусть g_{ij} *полная риманова метрика на* M^n. *Тройка (*M^n, Δ, g_{ij}*) называется субримановым многообразием.*

Непрерывная в смысле Липшица кривая γ: $[0, T] \to M^n$ называется допустимой, если $\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t))$ для всех $t \in [0,T]$. Длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt.$$

Расстояние между двумя точками на многообразии находится следующим образом,

$$d(q_0, q_1) = \inf_{\gamma \in \Omega_{q_0,q_1}} l(\gamma),$$

где Ω_{q_0,q_1} является множеством всех допустимых кривых, соединяющих точки q_0 и q_1. Такая функция $d(\cdot,\ \cdot)$ называется субримановой метрикой на M^n, а геодезическая этой метрики является допустимой кривой γ: $[0, T] \to M^n$, которая локально минимизирует функционал длины $l(\gamma)$.

Геодезические субримановой метрики должны удовлетворять принципу максимума Понтрягина [1, 2]. Пусть $f_1, \dots, f_k$ касательные ортонормированные векторные поля из Δ, которые порождают всё Δ в каждой точке M^n.

Принцип максимума Понтрягина.

Пусть M^n гладкое n-мерное многообразие. Рассмотрим для непрерывных в смысле Липшица кривых следующую задачу минимизации

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q), \ \ u_i \in R, \qquad \int_0^T \sum_{i=1}^{k} u_i^2(t)dt \to min, \ \ q(0) = q_0, \qquad q(T) = q_1$$

с фиксированным T. Рассмотрим отображение $H\colon T^*M^n \times R \times R^k \to R$, заданную функцией

$$H(q, \lambda, p_0, u) := \langle \lambda, \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q) \rangle + p_0 \sum_{i=1}^{k} u_i^2.$$

Если кривая $q(\cdot)\colon [0,T] \to M^n$ с управлением $u(\cdot)\colon [0,T] \to M^n$ является оптимальной, тогда существует Липшицева функция (ковектор) $\lambda(\cdot)\colon t \in [0,T] \to \lambda(t) \in T^*_{q(t)}M^n, (\lambda(t), p_0) \neq 0$ и постоянная $p_0 \leq 0$ такие, что

i) $\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\big(q(t),\ \lambda(t), p_0, u(t)\big),$

ii) $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}\big(q(t),\ \lambda(t), p_0, u(t)\big),$

iii) $\frac{\partial H}{\partial u}\big(q(t),\ \lambda(t), p_0, u(t)\big) = 0.$

Кривая $q(\cdot)\colon [0,T] \to M^n$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина называется экстремальной кривой (или экстремалью). Такой кривой соответствует множество пар $(\lambda(\cdot), p_0)$. Тип экстремальной кривой (нормальный или анормальный) зависит от значения p_0:

- если $p_0 \neq 0$, то экстремаль называется нормальной;
- если $p_0 = 0$, то экстремаль называется анормальной;
- экстремаль называется строго анормальной, если она не проектируется (на M^n) в нормальные экстремали. Для нормальных экстремалей, которые являются геодезическими согласно [1], мы будем полагать $p_0 = -\frac{1}{2}$.

Из пункта iii) следует, что $u_i = \langle \lambda(t), f_i(t) \rangle$, а также, что кривая $q(\cdot)\colon [0,T] \to M^n$ будет геодезической тогда и только тогда, если она является проекцией на M^n решения $(\lambda(t), q(t))$ Гамильтоновой системы, действующей на T^*M^n со следующей Гамильтоновой функцией:

$$H(q, \lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k} \langle \lambda, f_i \rangle^2\right), \qquad q \in M^n, \qquad \lambda \in T_q^* M^n. \tag{1}$$

Гамильтониан H является постоянным вдоль любого решения Гамильтоновой системы. Более того, $H = \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда геодезическая натурально-параметризованна.

Рассмотрим нашу трехмерную разрешимую группу Ли $SOLV^+$ представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \boldsymbol{R},$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а их коммутационные отношения следующие

$$[e_1, e_2] = 0; [e_1, e_3] = e_2; \ \ [e_2, e_3] = -e_1.$$

Коммутаторы базисных векторов порождает все касательное пространство. Пусть метрика на группе будет обычной

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

а правоинвариантное распределение образовано площадками $\Delta = span\{e_1, e_3\}$. Пусть $q = (x, y, z)$ точка на группе $SOLV^+$. Тогда касательное пространство в каждой точке $SOLV^+$ определяется матрицами вида

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial_z = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & 0 \\ -\cos z & -\sin z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а векторы $e_1, \ e_2, \ e_3$ с помощью правых сдвигов переходят в следующие вектора

$$R_q^*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R_q^*(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_q^*(e_3) = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & y \\ -\cos z & -\sin z & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть,

$$R_q^*(e_1) = \partial_x, \quad R_q^*(e_2) = \partial_y, \quad R_q^*(e_3) = y \cdot \partial_x - x \cdot \partial_y + \partial_z.$$

В каждой точке группы неголономное распределение образовано векторами $\tilde{f}_1 = \partial_x, \ \tilde{f}_3 = y \cdot \partial_x - x \cdot \partial_y + \partial_z$.

Для применения Принципа максимума Понтрягина и Гамильтоновой структуры это распределение должно определяться ортонормированной системой. После процесса ортогонализации и нормировки они перейдут в вектора:

$$f_1 = \partial_x, \quad f_3 = \frac{-x \cdot \partial_y + \partial_z}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Найдем функцию Гамильтона по формуле (1)

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2(x^2 + 1)} (-x p_y + p_z)^2. \tag{2}$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, получаем уравнения Гамильтона для (2):

$$\begin{aligned} &\dot{x} = p_x, && \dot{p_x} = \frac{1}{(x^2+1)^2} \left(-x p_y + p_z\right)^2 + \frac{1}{x^2+1} \left(-x p_y + p_z\right) p_y, \\ &\dot{y} = -\frac{x}{x^2+1} \left(-x p_y + p_z\right), && \dot{p_y} = 0, \\ &\dot{z} = \frac{1}{x^2+1} \left(-x p_y + p_z\right), && \dot{p_z} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где точка означает производную по t. Система дифференциальных уравнений (3) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \qquad I_2 = p_y, \quad I_3 = p_z,$$

значит эта система полностью интегрируема. Решение этой системы получается в специальных эллиптических функциях.

Литература:

1 Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. – М.: Физматлит, 2005. - 391с.

2 Boscain U., Rossi F. Invariant Carnot-Caratheodory metrics on $S^3, SO(3), SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. - 2008.- Vol.47. - P.1851-1878.

3 Calin O., Chang Der-Chen and Markina I. SubRiemannian geometry on the sphere S^3 // Canad. J. Math. – 2009. – Vol. 61. - P.721-739.

4 Agrachev A., Barilari D. Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2012. - Vol. 18, № 3. - P.21-44.

5 Мажитова А.Д. Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // Математические труды. - 2012. – Т.15, № 1. - С.120-128.

6 Mazhitova A.D. Sub-Riemannian geodesics on the three-dimensional solvable non-nilpotent Lie group SOLV^{-} // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2012. - Vol. 18, № 3. - P.309-322.

Резюме

В данной работе рассматривается субриманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^{+}$ с правоинвариантным распределением. Эта задача основана на построении Гамильтоновой структуры для заданной метрики Карно-Каратеодори при помощи принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: субриманова геометрия, правоинвариантная метрика, Гамильтониан, геодезические.

Түйіндеме

Бұл жұмыста есептелімді үш өлшемді $SOLV^{+}$ Ли тобындағы оң-инвариант үйлестірімді субриман есебі қарастырылды. Карно-Каратеодори метрикасының геодезиялық қисықтары үшін Понтрягиннің максимум принципінде негізделген Гамильтон жүйесі құрастырылған.

Кілт сөздер: субриман геометриясы, оң-инвариантты метрика, Гамильтониан, геодезиялық қисықтар.

Summary

In this work we consider sub-Riemannian problem on the three dimensional solvable Lie group $SOLV^{+}$ with right-invariant distribution. We constructed it on the basis of Hamiltonian structure for the geodesic flow of the Carnot-Caratheodory metric via the Pontryagin maximum principle.

Key words: sub-Riemannian geometry, right-invariant metric, Hamiltonian, geodesics.

УДК 517.43

КОММУТИРУЮЩИЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОТВЕЧАЮЩИЕ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СПЕКТРАЛЬНЫМ КРИВЫМ

Г.С. МАУЛЕШОВА, аспирант
Новосибирский государственный университет, Россия

Данная работа посвящена изучению и построению одноточечных разностных коммутирующих операторов ранга два. В случае гиперэллиптических спектральных кривых, при некоторых дополнительных ограничениях получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера--Новикова на дискретную динамику параметров Тюрина. С помощью этих уравнений построены примеры операторов, отвечающих спектральным кривым произвольного рода. Среди примеров имеются операторы с полиномиальными по дискретной переменной коэффициентами.

В работах [1], [2] открыт замечательный класс точных решений солитонных уравнений - алгебро-геометрических решений ранга $l > 1$. Этот класс выделяется следующим условием. Совместные собственные функции вспомогательных линейных операторов, задающих спектральную кривую Γ, образуют векторное расслоение ранга l над Γ. Для двумеризованной цепочки Тоды

$$\partial^2_{\xi\eta}\varphi_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1}-\varphi_n} \qquad (1)$$

это означает следующее. Уравнение (1) допускает представление Лакса [3]

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = 0,$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \partial_\xi - T - \varphi_{\xi\eta}, \qquad \mathcal{L}_2 = \partial_\eta - e^{\varphi_n - \varphi_{n+1}} T^{-1},$$

Т - оператор сдвига, $T\varphi_n = \varphi_{n+1}$. Решения ранга l выделяются дополнительными условиями

$$[\mathcal{L}_i, L_1] = [\mathcal{L}_i, L_2] = [L_1, L_2] = 0, \quad i = 1{,}2$$

где $L_1,\ L_2 -$ разностные операторы, определяющие спектральную кривую

$$L_1 = \sum_{k=N_-}^{N_+} u_k(n) T^k, \qquad L_2 = \sum_{k=N_-}^{N_+} u_k(n) T^k,$$

коэффициенты $L_1,\ L_2$ также зависят от ξ, η. При этом предполагается, что размерность пространства совместных собственных функций

$$L_1\psi = z\psi, \qquad L_2\psi = w\psi,$$

для общей точки $P = (z, w) \in \Gamma$ равна l. Спектральная кривая Γ задается уравнением $R(z, w) = 0$, где $R -$ полином, с постоянными коэффициентами зануляющий L_1, L_2, $R(L_1, L_2) = 0$ [1].

Основной сложностью построения решений ранга $l > 1$ является задача построения коммутирующих разностных операторов ранга $l > 1$.

Прежде чем обсуждать коммутирующие разностные операторы мы напомним некоторые результаты о коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторах. Любое коммутативное кольцо обыкновенных дифференциальных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной кривой Γ с единственным полюсом $q \in \Gamma$. Определение ранга такое же как и для разностных операторов. Задача классификации коммутативных колец решена И.М. Кричевером [1978]. По теореме Кричевера такие кольцы отвечают спектральным данным, которые состоят из спектральной кривой, параметров Тюрина и некоторых дополнительных структур на Γ. (Алгебраические аспекты этой классификации можно найти в работах Дринфельда [5] и Мамфорда [6]). Совместные собственные функции операторов ранга 1 найдены явно И.М. Кричевером [7]. Совместные собственные функции операторов ранга $l > 1$ не могут быть найдены явно. Это является основной трудности при исследовании таких операторов. Кричевер и Новиков [1] с помощью метода Деформаций параметров Тюрина нашли оператора ранга два, отвечающие эллиптической спектральной кривой. Моховым найдены операторы ранга 3 отвечающие эллиптической спектральной кривой. В [9] при $l > 1$ в случае гиперэллиптической спектральной кривой получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера-Новикова на динамику параметров Тюрина. С помощью этих уравнений в [9], [10] получены примеры операторов ранга 2, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым.

Максимальное коммутативное кольцо разностных операторов, содержащее L_1 и L_2, изоморфно кольцу мероморфных функций на алгебраической спектральной кривой Γ с полюсами в $q_1, \ldots, q_n$ (см. [2],[12]). Такие операторы называются $n -$точечными.

В случае $n=2$ и $l=1$ разностные коммутирующие операторы найдены И.М. Кричевером [12] и Д. Мамфордом [6]. Общая теория операторов ранга l развита К.М. Кричевером и С.П. Новиковым [2]. В частности ими найдены операторы ранга два с эллиптической спектральной кривой.

Одноточечные операторы ранга два с полиномиальными коэффициентами, отвечающие эллиптической спектральной кривой, найдены в [4].

В настоящей работе рассматриваются операторы, отвечающие гиперэллиптической спектральной кривой Γ рода g

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + c_{2g-1}z^{2g-1} + \cdots + c_0, \qquad (2)$$

при этом

$$L_4 = \sum_{k=-2}^{2} u_i(n)T^i, \qquad L_{4g+2} = \sum_{k=-(2g+1)}^{2g+1} u_i(n)T^i,$$
$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad \psi = \psi(n,P), \quad P = (z,w) \in \Gamma.$$
Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию
$$\sigma: \Gamma \to \Gamma, \quad \sigma(z,w) = \sigma(z,-w).$$
Совместные собственные функции L_4 и L_{4g+2} удовлетворяют следующему уравнению (см. [2])
$\psi(n+1,P) = \chi_1(n,P)\psi(n-1,P) + \chi_2(n,P)\psi(n,P).$ (3)
Функции $\chi_1(n,p)$ и $\chi_2(n,p)$ рациональны на Γ и имеют $2g$ простых полюсов, зависящих от n. Функция $\chi_2(n,p)$ дополнительно имеет простой полюс в точке $q = \infty \in \Gamma$. Для того, чтобы найти операторы L_4 и L_{4g+2}, достаточно найти функции χ_1 и χ_2.

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если*
$\chi_1(n,P) = \chi_1(n,\sigma(P)), \quad \chi_2(n,P) = -\chi_2(n,\sigma(P))$, *(4)*
то оператор L_4 имеет вид
$L_4 = (T + V(n)T^{-1})^2 + W(n),$ (5)
при этом
$\chi_1(n) = -\frac{V(n)Q(n+1)}{Q(n)}, \quad \chi_2(n) = \frac{w}{Q(n)},$ (6)
где
$$Q(n) = z^g + \alpha_{g-1}(n)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(n).$$
Функции $V(n), W(n)$, $Q(n)$ удовлетворяют уравнению
$$F_g(z) = Q(n-1)Q(n+1)V(n) + Q(n)(Q(n+2)V(n+1) + Q(n+1)(z - V(n)$$
$$- V(n+1) - W(n))). \quad (7)$$

Замечательно, что уравнение (7) линеаризуется . А именно, если в (7) заменить n на $n+1$ и от полученного уравнение отнять (7), то результат делится на $Q(z,n+1)$. В итоге приходим к линейному уравнению на Q.

Следствие 1. *Функции $Q(n)$, $V(n)$, $W(n)$ удовлетворяют уравнению*
$$Q(n-1)V(n) + Q(n)(z - V(n) - V(n+1) - W(n)) - Q(n+2)(z - V(n+1)$$
$$-V(n+2) - W(n+1)) - Q(n+3)V(n+2) = 0. \quad (8)$$
Если Q удовлетворяет уравнению (8), то Q удовлетворяет уравнению (7) для некоторого $F_g(z)$.
В [9], [10] рассматривалась пара коммутирующих дифференциальных операторов ранга два порядков 4 и $4g+2$, отвечающие спектральной кривой (2). Совместные собственные функции операторов L_4 и L_{4g+2} удовлетворяют уравнению
$$\psi'' = \chi_1(x,P)\psi' + \chi_0(x,P)\psi.$$
В [9] доказано, что оператор L_4 является самосопряженной тогда, только тогда, когда
$$\chi_1(x,P) = \chi_1(x,\sigma(P)),$$
при
$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(n).$$
Также как и в дискретном случае с оператором L_4 связана полином Q стпени g по z, коэффициентами зависящих от x
$$Q = z^g + \alpha_{g-1}(x)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(x),$$
который удовлетворяет уравнениям
$4F_g(z) = 4(z-W)Q^2 - 4V(Q')^2 + (Q'')^2 - 2Q'Q^3 + 2Q(2V'Q' + 4VQ'' + Q^4),$ (9)
$Q^5 + 4VQ^3 + 2Q'(2z - 2W - V'') + 6V'Q'' - 2QW' = 0.$ (10)

Таким образом теорема 1- это дискретной аналог утверждений для оператора L_4, в частности уравнения (7) и (8) – это дискретизация уравнений (9) и (10).

Таким образом, нахождение пар коммутирующих операторов сводится к уравнению (8). Теорема 1 позволяет эффективно строить примеры коммутирующих операторов.

Теорема 2. *Оператор*
$$L_4 = (T + (r_3n^3 + r_2n^2 + r_1n + r_0)T^{-1})^2 + g(g+1)r_3n, \qquad r_3 \neq 0.$$
коммутирует с разностным оператором L_{4g+2}, где r_0, r_1, r_2, r_3 --- произвольные параметры.

В [9] доказано, что оператор
$$L_4^\sharp = (\partial_x^2 + r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0)^2 + g(g+1)x$$

коммутирует с оператором порядка $4g+2$. Таким образом оператор L_4 из теоремы 2 является дискретным аналогом оператора $L_4^{\#}$. Отметим, что при $g=1$ оператор $L_4^{\#}$ впервые был найден Диксмье, операторы $L_4^{\#}$, $L_6^{\#}$ задают коммутативную подалгебру в алгебре Вейля, при $g>1-$ оператор L_4 - обобщил оператора Диксмье на гиперэллиптическую спектральную кривую рода $g>1$.

Рассмотрим алгебру W над C порождающие двумя элементами p и q с одним соотношением

$$[p,q]=p.$$

Это алгебра изоморфна алгебре разностных операторов с полиномиальными коэффициентами, при этом

$$p=T, \quad q=n.$$

Алгебра W допускает следующие автоморфизмы

$$H: W -> W$$

$$H(p)=p, \qquad H(q)=q+P(p),$$

где p - произвольный полином. Операторы L_4 и L_{4g+2} задают коммутативную подалгебру в W. Следовательно, если операторах L_4 и L_{4g+2} заменить n на $n+P(T)$ мы получим новые коммутирующие разностные операторы с полиномиальными коэффициентами ранга $l>2$.

Теорема 3. *Оператор*

$$L_4=(T+(r_1a^n+r_0)T^{-1})^2+g(g+1)mr_1a^n, \qquad r_1\neq 0.$$

коммутирует с разностным оператором L_{4g+2}, где

$$m=\frac{a^{2g+1}-a^{g+1}-a^g+1}{g(g+1)a^g},$$

r_0, r_1 - *произвольные параметры.*

Этот оператор является дискретным аналогом оператора

$$(\partial_x^2+r_1a^x+r_0)^2+g(g+1)r_1a^x$$

из работы [11].

Теорема 4. *Оператор*

$$L_4=(T+(r_1cos(n)+r_0)T^{-1})^2+r_2cos(n)+r_3sin(n), \qquad r_1\neq 0,$$

где

$$r_2=-r_3ctg\left(\frac{1}{2}\right), \quad r_3=4r_1sin(\frac{1}{2})sin(\frac{g}{2})\sin(\frac{g+1}{2}),$$

r_0, r_1 - произвольные параметры, коммутирует с разностным оператором порядка $(4g+2)$.

Этот оператор является аналогом оператора

$$(\partial_x^2+r_1cos(x)+r_0)^2+g(g+1)r_1cos(x)$$

из работы [10].

Литература:

1. Кричевер И.М., Новиков С.П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения, Успехи математических наук, 35:6(216) (1980), 47-68.
2. Кричевер И.М., Новиков С.П. Двумеризованная цепочка тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения, Успехи математических наук, 58:3 (2003), 51-88.
3. Михайлов А.В. Интегрируемость двумерного обобщения цепочки Тода, ЖЭТФ, 30 (1979), 443-448.
4. Кричевер И.М. Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов, Функц. анализ и его прил.,12:3 (1978), 20-31.
5. Дринфельд В.Г. О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец, Функц. анализ и его прил.,11:1(1977), 11-31.
6. D. Mumford, An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and related non-linear equations, Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya, Tokyo, 1978, 115-153.
7. Кричевер И.М. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., 23, ВИНИТИ, М., (1983), 79-136.

8. Мохов О.И. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения, Известия АН СССР, серия математическая, 53:6 (1989), 1291-1315.

9. Mironov A.E. Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra, arxiv:1107.3356v2 [math-ph] 8 Apr 2012.

10. Mironov A.E. Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators, arxiv:1302.5735v1 [math-ph] 22 Feb 2013.

11. Давлетшина В.Н. О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два. // Сиб. электрон. матем. изв. – 2013. -№ 10. – С.109-112.

12. Кричевер И.М. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения, Успехи математических наук, 33:4 (1978), 215--216.

Резюме

Данная работа посвящена изучению и построению одноточечных разностных коммутирующих операторов ранга два. В случае гиперэллиптических спектральных кривых, при некоторых дополнительных ограничениях получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера--Новикова на дискретную динамику параметров Тюрина. С помощью этих уравнений построены примеры операторов, отвечающих спектральным кривым произвольного рода.

Ключевые слова: коммутирующие разностные операторы, спектральная кривая, совместные собственные функции.

Түйіндеме

Бұл жұмыста бір нүктелі айырма коммутацияланатын 2 рангалы оператор зерттеліп, құрастырылды. Гиперэллиптикалық спектральды қисыққа қосымша шектеулер енгізе отырып, Кричевер-Новиков теңдеуіне эквивалентті теңдеу алынды. Алынған теңдеулердің көмегімен қажетті операторлардың мысалдары табылды.

Кілт сөздер: коммутацияланатын айырма операторлар, спектральды қисық, бірлесе меншіктелген функция.

Summary

This work is devoted to studying and construction of one-point difference commuting operators of a second rank. In case of the hyperelliptic spectral curves, under some additional restrictions the equations equivalent to the Krichever – Novikov equations on the discrete dynamics of the Tyuirin parameters are received. With the help of these equation examples of the operators corresponding to any spectral curves are constructed. There are operators with polynomial coefficients on a discrete variable among examples.

Key words: commuting difference operators, spectral curve, joint characteristic functions.

УДК 512.54 + 510.5

ВЫЧИСЛИМЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ВСЕХ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОЛЬЦОМ

М.К. НУРИЗИНОВ, докторант Ph.D,
Р.К. ТЮЛЮБЕРЕГЕНЕВ,
Н.Г. ХИСАМИЕВ, доктор физико-математических наук, профессор
Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, г.Усть-Каменогорск, Республика Казахстан

Пусть ω – множество всех натуральных чисел, G – некоторая группа и $\nu:\omega\to G$ отображение ω на G. Пара (G,ν) называется конструктивной группой, если существует алгоритм, который по любым натуральным числам n, m и s определяет справедливость равенств $\nu n=\nu m$ и $\nu n\cdot\nu m=\nu s$. Группа G называется вычислимой (или конструктивизируемой), если существует нумерация $\nu:\omega\to G$ группы G такая, что (G,ν) – конструктивная группа.

Подгруппа H нумерованной группы (G,ν) называется вычислимой (вычислимо перечислимой) в (G,ν) если множество $\nu^{-1}H$ вычислимо (вычислимо перечислимо). Если (G,ν) – конструктивная группа, то ν называется вычислимой нумерацией группы G. Основными проблемами здесь являются проблемы существования вычислимой нумерации и единственности, т.е. какие группы вычислимы и если они вычислимы, то сколько допускают неавтоэквивалентных вычислимых нумераций. Данные проблемы были исследованы А.И. Мальцевым, Ю.Л. Ершовым, С.С. Гончаровым, Р. Дауни, А.С. Морозовым, В.П. Добрица, А.Т. Нуртазиным, Дж. Найт, Н.Г. Хисамиевым, И.В. Латкиным и другими авторами.

В работе В.А. Романькова, Н.Г. Хисамиева [1] доказано, что группа $UT_n(K)$ всех унитреугольных матриц степени $n \geq 3$ над коммутативным ассоциативным кольцом K с единицей вычислима тогда и только тогда, когда кольцо K вычислимо. В работе [2] этих же авторов построено кольцо K, которое не вычислимо, а группа $UT_2(K)$ вычислима.

Пусть Q – аддитивная группа рациональных чисел.

В работе [3] А.И. Мальцевым доказано, что подгруппа $G \leq Q^n$ вычислима тогда и только тогда, когда G – вычислимо перечислимая подгруппа в (Q^n, γ), где γ – геделева нумерация множества n-ок рациональных чисел.

В данной работе получен критерий вычислимости подгруппы группы всех унитреугольных матриц $UT_n(K)$ над вычислимым ассоциативным кольцом с единицей.

Мы придерживаемся терминологии и обозначения по конструктивным моделям монографии [4], по группам [5], а по теории колец [6].

Если в абелевой группе без кручения A существует конечная максимально линейно независимая система элементов, то будем говорить, что размерность группы A конечна.

Если нильпотентная группа G без кручения имеет центральный ряд, все факторы которого абелевы группы конечных размерностей, то G называется группой конечной размерности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (G,ν) – конструктивная нильпотентная группа без кручения конечной размерности и

$$e = G_0 < G_1 < \ldots < G_n = G \tag{1}$$

ее центральный ряд. Тогда G_i – вычислимая подгруппа в (G,ν) для любого $i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по i. Для $i = 0$ это очевидно. Пусть для i теорема доказана и

$$g_{k1},\, g_{k2}, \ldots, g_{k\, m_k}$$

такие элементы из G, что последовательность

$$\bar{g}_{k1},\, \bar{g}_{k2}, \ldots, \bar{g}_{k\, m_k}$$

является максимально линейно независимой системой элементов факторгруппы $\overline{G}_k = G_k / G_{k-1}$, $0 < k \leq n$. Так как (1) центральный ряд группы G, то справедлива эквивалентность

$$g \in G_{i+1} \Leftrightarrow g_{k\,j} \cdot g = g \cdot g_{k\,j} \pmod{G_i}, \tag{2}$$

т.е. $[g_{k\,j},\, g] \in G_i$ для любых $0 < k \leq n,\ 0 < j \leq m_k$.

Пусть числа $m_{k\,j} \in \omega$ такие, что $\nu m_{k\,j} = g_{k\,j}$. Тогда эквивалентность (2) равносильна

$$s \in \nu^{-1} G_{i+1} \ \Leftrightarrow\ [\nu m_{k\,j}, \nu s] \in G_i,\ 0 < k \leq n,\ 0 < j \leq m_k. \tag{3}$$

Так как по предположению индукции подгруппа G_i вычислима в конструктивной группе (G,ν), то правая часть (3) проверяется эффективно. Отсюда множество $\nu^{-1}G_{i+1}$ вычислимо, т.е. подгруппа G_{i+1} вычислима в (G,ν). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если G – вычислимая нильпотентная группа без кручения конечной размерности, то факторы ее любого центрального ряда вычислимы.

Пусть K – вычислимое ассоциативное кольцо с единицей e, а $UT_n(K)$ – группа всех унитреугольных матриц над K. По любой вычислимой нумерации γ кольца K можно определить геделеву нумерацию γ_* группы $UT_n(K)$, т.е. такую, что по γ_* номеру m матрицы A можно эффективно найти γ-номера элементов матрицы A.

ТЕОРЕМА 2. Подгруппа G группы всех унитреугольных матриц $UT_n(K)$ над вычислимым ассоциативным кольцом K с единицей, аддитивная группа которого без кручения и имеет конечную размерность, вычислима тогда и только тогда, когда G вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(K), \gamma_*)$, т.е. множество $\gamma_*^{-1}G$ вычислимо перечислимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ – некоторая вычислимая нумерация группы G и

$$e = G_0 < G_1 < ... < G_m = G$$

ее такой центральный ряд, что факторгруппы $\overline{G_i} = G_i / G_{i-1}$ – абелевы группы конечных размерностей, $0 < i \le m$. По теореме 1 множества $\mu^{-1}G_i$ – вычислимые множества. Пусть

$$\overline{g}_{i1}, \overline{g}_{i2}, ..., \overline{g}_{i m_i}$$

– максимально линейно независимая система элементов факторгруппы $\overline{G_i}$. В каждом классе $\overline{g}_{ij}$ зафиксируем матрицу A_{ij}, $0 < k \le m_i$. Так как таких матриц конечное число, то можно считать, что γ номера элементов этих матриц известны.

Индукцией по i докажем, что подгруппы G_i вычислимо перечислимы в $(UT_n(K), \gamma_*)$ и по любому числу $s \in \mu^{-1}G_i$ эффективно находится число t такое, что $\mu s = \gamma_* t$. Для $i = 0$ это очевидно. Допустим для i это доказано, т.е. $\gamma_*^{-1}G_i$ – вычислимо перечислимое множество натуральных чисел и существует частично вычислимая функция f_i такая, что ее область определения $\delta f_i = \mu^{-1}G_i$ и для любого $k \in \mu^{-1}G_i$ верно $\mu k = \gamma_* f_i(k)$.

Из определения матриц A_{i+1j}, $0 < k \le m_{i+1}$ следует, что справедливо следующая эквивалентность:

Для любого $k \in \omega$ элемент μk принадлежит подгруппе G_{i+1} тогда и только тогда, когда найдутся целые числа $s, t, r_1, r_2, \dots, r_{m_{i+1}}$ такие, что

$$(\mu k)^s = A_{i+11}^{r_1} \cdot \ldots \cdot A_{i+1m_{i+1}}^{r_{m_{i+1}}} \cdot \mu t, \; t \in \mu^{-1}G_i. \tag{4}$$

Допустим (4) справедливо. По индукционному предположению $\mu t = \gamma_* f_i(t)$. Из определения нумерации γ_* группы $UT_n(K)$ следует, что по числу $f_i(t)$ эффективно находим γ-номера элементов матрицы $B = \gamma_* f_i(t)$. Отсюда по числам $r_1, r_2, \dots, r_{m_{i+1}}$ эффективно находим γ -номера элементов матрицы

$$C = A_{i+11}^{r_1} \cdot \ldots \cdot A_{i+1m_{i+1}}^{r_{m_{i+1}}} \cdot B.$$

Так как $UT_n(K)$ – нильпотентная группа без кручения, то в ней извлечение корней – однозначная операция. Поэтому по C эффективно определяется матрица D и число r такие, что $D^s = C$, $\gamma_* r = D$. Отсюда и (4) следует, что существует алгоритм, который перечисляет γ_*-номера матриц из подгруппы G_{i+1} и по номеру $k \in \mu^{-1}G_{i+1}$ эффективно находит γ-номера элементов матрицы μk, т.е. такое число s, что $\mu k = \gamma_* s$, т.е. индукционный шаг доказан.

Таким образом $G_n = G$ – вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(K), \gamma_*)$, т.е. необходимость доказана.

Достаточность следует из того, что вычислимо перечислимая подгруппа конструктивной группы вычислима. Теорема доказана.

Пусть ν_1 и ν_2 – две вычислимые нумерации группы G. Говорят, что ν_1 m-сводится к ν_2, если существует вычислимая функция f такая, что для любого натурального числа n

справедливо $\nu_1 n = \nu_2 f(n)$. Если любые вычислимые нумерации ν и μ m-сводятся друг к другу, то группа G называется вычислимо (рекурсивно) устойчивой.

Из доказательства теоремы вытекают

СЛЕДСТВИЕ 2. Если G – вычислимая подгруппа группы $UT_n(K)$ над вычислимым ассоциативным кольцом K с единицей, аддитивная группа которого без кручения и имеет конечную размерность, то любая ее вычислимая нумерация m-сводится к геделевой нумерации γ_* группы $UT_n(K)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Любая вычислимая подгруппа группы $UT_n(K)$ над вычислимым ассоциативным кольцом K с единицей, аддитивная группа которого без кручения и имеет конечную размерность вычислимо устойчива.

СЛЕДСТВИЕ 4. Подгруппа G группы всех унитреугольных матриц $UT_n(P)$ над полем P степени $m > 0$ характеристики 0 вычислима тогда и только тогда, когда G вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(P), \gamma_*)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если G – вычислимая подгруппа группы $UT_n(P)$ над полем P конечной степени характеристики 0, то любая ее вычислимая нумерация m-сводится к геделевой нумерации γ_* группы $UT_n(P)$.

В частности, следствия 4 и 5 справедливы, когда P есть поле рациональных чисел.

Пусть K – ассоциативное кольцо с единицей e, аддитивная группа которого без кручения и имеет конечную размерность, G – подгруппа группы унитреугольных матриц $UT_n(K)$ и

$$e = G_0 < G_1 < \ldots < G_n = G \tag{5}$$

ее центральный ряд. Зафиксируем некоторую максимально линейно независимую систему

$$\overline{A}_{i1}, \overline{A}_{i2}, \ldots, \overline{A}_{i m_i}$$

факторгруппы $\overline{G_i} = G_{i+1} / G_i$, $i < n$. Пусть

$$S_i(G) = \left\{ \left\langle \alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{i m_i} \right\rangle \mid \alpha_{ij} \in Z \;\&\; \exists \overline{B} \in \overline{G}_i \left(\overline{B}^{\alpha_{i0}} = \overline{A}_{i1}^{\alpha_{i1}} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{i m_i}^{\alpha_{i m_i}} \right),\ j \le m_i \right\}$$

При этих обозначениях введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подгруппу G назовем сервантным в $UT_n(K)$ относительно центрального ряда (5), если для любых $i < n$ и последовательности $\left\langle \alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{i m_i} \right\rangle \in S_i(G)$, и элемента $c \in G_i$ справедливо: из разрешимости уравнения $x^{\alpha_{i0}} = A_{i1}^{\alpha_{i1}} \cdot \ldots \cdot A_{i m_i}^{\alpha_{i m_i}} \cdot c$ в группе $UT_n(K)$ следует $x \in G$.

Пусть γ – вычислимая нумерация кольца K, а γ_* геделеву нумерацию группы $UT_n(K)$, определенная по γ, т.е. по любому числу $n \in \omega$ можно эффективно найти γ-номера элементов матрицы $\gamma_* n$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть для подгруппы $G \le UT_n(K)$ и некоторого ее центрального ряда (5) справедливы:

a) все факторы ряда (5) вычислимы;

b) G сервантна в $UT_n(K)$ относительно (5).

Тогда G – вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(K), \gamma_*)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по i докажем, что подгруппа G_i вычислимо перечислима в $(UT_n(K), \gamma_*)$. Для $i = 0$ это очевидно. Пусть G_i – вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(K), \gamma_*)$. Так как размерность факторгруппы G_{i+1} / G_i конечна, то существует конечная последовательность матриц

$$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{i m_i}$$

такая, что смежные классы

$$\overline{A}_{i1},\ \overline{A}_{i2},\ ...,\ \overline{A}_{i\,m_i} \tag{6}$$

образуют максимально линейно независимую систему факторгруппы $\overline{G_i} = G_{i+1} / G_i$, $i < n$. Так как $\overline{G_i}$ вычислима, то множество всех последовательностей целых чисел

$$S_i = \left\{ \left\langle \alpha_0,\ \alpha_1,\ ...,\alpha_{m_i} \right\rangle \mid \exists \overline{B} \in \overline{G_i} \left(\overline{B}^{\alpha_0} = \overline{A}_{i1}^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \overline{A}_{i\,m_i}^{\alpha_{m_i}} \mid \alpha_i \in Z \right) \right\}$$

вычислимо перечислимо. Докажем, что справедлива эквивалентность:

$$s \in \gamma_*^{-1} G_{i+1} \Leftrightarrow \left(UT_n(K), \gamma_* \right) \models \exists \alpha_0 ... \exists \alpha_{m_i} \exists r \in \gamma_*^{-1} G_i$$
$$\left(\left\langle \alpha_0, ..., \alpha_{m_i} \right\rangle \in S_i \ \& \left(\gamma_* s \right)^{\alpha_0} = A_{i1}^{\alpha_1} \cdot ... \cdot A_{i\,m_i}^{\alpha_{m_i}} \cdot \gamma_* r \right) \tag{7}$$

$\Rightarrow$. Действительно пусть $s \in \gamma_*^{-1} G_{i+1}$ и $B = \gamma_* s$. Так как (6) – максимально линейно независимая система элементов факторгруппы $\overline{G_i}$, то найдутся последовательность целых чисел $\left\langle \alpha_0,\ \alpha_1,\ ...,\alpha_{m_i} \right\rangle$ и матрица $C \in G_i$ такая, что справедливо

$$B^{\alpha_0} = A_{i1}^{\alpha_1} \cdot ... \cdot A_{i\,m_i}^{\alpha_{m_i}} \cdot C. \tag{8}$$

Отсюда следует справедливость правой части (7).

$\Leftarrow$. Пусть, теперь, справедлива правая часть (7) и $B = \gamma_* s$, $\gamma_* r = C \in G_i$. Тогда справедлива (8)

Отсюда в силу сервантности подгруппы G в $UT_n(K)$, относительно ряда (5) и однозначности операции извлечения корней в $UT_n(K)$ имеем $B \in G$, а потому $B \in G_{i+1}$, т.е. эквивалентность (7) доказана.

Покажем, что по равенству (8) эффективно можно определить элементы матрицы B. Действительно по числу r, эффективно определяются γ-номера элементов матрицы $\gamma_* r = C$. Так как число матриц вида $A_{i\,j}$ конечно, то можно считать, что γ-номера элементов этих матриц известны. Отсюда эффективно находим γ-номера элементов матрицы из правой части (8). Так как извлечение корней однозначная операция в $UT_n(K)$, то можно найти γ-номера элементов матрицы B, для которой справедливо (8), а потому и γ_*-номер матрицы B.

Отсюда и из (7) в силу индукционного предположения получим вычислимую перечислимость подгруппы G_{i+1} в группе $\left(UT_n(K), \gamma_* \right)$. Индукционный шаг, а тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть подгруппа G сервантна в $UT_n(K)$ относительно некоторого центрального ряда (5). Тогда группа G вычислима если и только если все факторы ряда (5) вычислимы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если G сервантна в $UT_n(K)$, то она сервантна относительно любого своего центрального ряда.

Отсюда и следствия 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть подгруппа G сервантна в $UT_n(K)$. Тогда группа G вычислима если и только если все факторы некоторого ее центрального ряда вычислимы.

Литература:

1. Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. О конструктивных матричных и упорядоченных группах // Алгебра и логика. - 2004. - Т. 43. - №3. - С. 353-363.
2. Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. О конструктивизируемых матричных группах // Алгебра и логика. - 2004. - Т. 43. - №5. - С. 603-613.
3. Мальцев А.И. О рекурсивных абелевых группах// Доклад АН СССР. - 1962. – Т.46. -№5. - С.1009-1012.
4. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга, 1999.
5. Каргополов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп, 4-изд. - М.: Наука, 1996.
6. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. - Санкт-Петеррбург, 2004.

Резюме

Группа G называется вычислимой, если существует нумерация $\nu: \omega \to G$ такая, что (G,ν) – конструктивная группа. Основными проблемами здесь являются проблемы существования вычислимого представления, единственности и продолжения таких представлений. Пусть K – вычислимое ассоциативное кольцо с единицей e, а $UT_n(K)$ – группа всех унитреугольных матриц над K и ν – геделева нумерация группы $UT_n(K)$, т.е. для любого натурального числа $n \in \omega$ эффективно определяются элементы матрицы νn. В работе получен критерий вычислимости подгруппы группы всех унитреугольных матриц $UT_n(K)$ над вычислимым ассоциативным кольцом с единицей.

Ключевые слова: Нумерация, группа унитреугольных матриц, сервантная группа, конструктивная(вычислимая) группа, нильпотентная группа.

Түйіндеме

G тобы есептелімді деп аталады, егер (G,ν) – конструктивті топ болатындай $\nu: \omega \to G$ нөмірлеуі табылса. Мұндағы негізгі мәселелер - есептелімді бейнелеулердің бар болуы, осындай бейнелеулердің жалғыздығы мен жалғасының бар болу мәселесі. K –есептелінетін ассоциативті бірлік сақина, ал $UT_n(K)$ – K-дағы барлық униүшбұрышты матрицалардың тобы және ν дегеніміз – $UT_n(K)$ тобының гедельдік нөмірлеуі болсын, яғни, кез келген $n \in \omega$ натурал сан үшін матрицаның барлық элементтері νn эффективті анықталсын. Бұл жұмыста есептелінетін ассоциативті бірлік сақинадағы барлық униүшбұрышты матрицалардың тобы $UT_n(K)$ есептелімді болу критерийі алынған.

Кілт сөздер: Нөмірлеу, униүшбұрышты матрицалар тобы, сервантты тобы, конструктивті (есептелімді) топтар, , нильпотентті топ.

Summary

A group G is called computable if a numbering $\nu: \omega \to G$ exists, that is the pair (G,ν) is constructive group. The main problems the article are of existence of a computable presentation, uniqueness and continuation of such representations. Here K – computable associative ring with unity, and $UT_n(K)$ – a group of all unitriangular matrices over K and ν – Gödel numbering of the group $UT_n(K)$, i.e. for any natural number $n \in \omega$ elements of matrix νn can be determine effectively. In this article we obtain a criterion of computability of the subgroup of the group of all unitriangular matrices $UT_n(K)$ over a computable associative ring with unity.

Key words: Numbering, a group of unitriangular matrices, pure group, constructive (computable) group, nilpotent group.

УДК 512.544.27

ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ НЕПОЧТИ FC-ГРУППЫ

И. И. ПАВЛЮК, кандидат физико-математических наук, доцент
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова,
Республика Казахстан

Под локально конечной группой будем понимать, как обычно, группу, в которой каждое конечное множество элементов порождает конечную подгруппу. С.Н. Черников сформулировал проблему в 1940 году: будет ли бесконечная группа с условием минимальности (в частности, локально-конечная группа [1]), черниковской? Под черниковской группой мы понимаем конечное расширение абелевой группы с условием минимальности [2, 3]. Тесным образом с проблемой Черникова связана проблема Шмидта: каковы все бесконечные группы, собственные подгруппы которой конечны [4]? Развитию положительной теории в направлении решения этих проблем в классе локально - конечных групп посвящено много работ. Пальма первенства и ведущая методологическая роль в решении проблемы Шмидта в классе локально-конечных групп принадлежит М.И. Каргаполову [5], а в решении проблемы Черникова – В.П. Шункову [6]. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с ослаблением условия минимальности для подгрупп и наложением его на отдельные типы подгрупп. Так В.П. Шунков в классической работе [6] решает проблему минимальности Черникова в классе локально-конечных групп, а так же усиливает этот результат в классе локально-конечных групп с условием минимальности для абелевых подгрупп [7]. Тем самым была установлена равносильность условия минимальности для подгрупп и условия минимальности для абелевых подгрупп в классе локально-конечных групп. Эти работы послужили примером и одним из основных источников для дальнейших обобщений уже в классе периодических групп с некоторыми ограничениями. Использование локального метода, возникшего в глубине исследований конечных групп, и расширенного В.П. Шунковым и другими авторами на класс локально-конечных групп, позволило получить ряд замечательных результатов о локально-конечных группах. Этот метод системно представлен в монографии О. Кегеля и Б. Верфрица [8], и центральное место в ней занимает проблема Черникова для локально-конечных групп, базирующаяся на исследовании В.П. Шункова и других авторов.

Изучение локально-конечных групп, все собственные подгруппы которых имеют не более чем конечное число сопряженных элементов в этих подгруппах (FC-подгруппы), рассматривается как обобщение ситуации, возникающей в направлении исследования проблемы Черникова. Действительно, условие минимальности для подгрупп позволяет вести индуктивные рассуждения, в силу которых, если существует подгруппа H, удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп, но не являющаяся черниковской группой, то в H найдется такая нечерниковская подгруппа K, все собственные подгруппы которой будут уже черниковскими. Легко видеть (Лемма 3.2), что факторгруппа $K/Z(K)$, где $Z(K)$ – центр группы K, должна быть в этом случае простой группой. Таким образом, проблема минимальности в классе локально конечных групп сводится к вопросу: верно ли, что локально - конечная группа, все собственные подгруппы которой черниковские группы, будет не простой? Работы В.П. Шункова и других авторов показали, что это действительно так. Ответ на этот вопрос остается положительным, если требование быть черниковской группой, наложенное на все собственные подгруппы, заменить одним из:

1) все примарные подгруппы являются черниковскими;

2) все собственные подгруппы являются почти абелевыми.

Напомним, что *почти абелевой* группой называется группа, являющаяся конечным расширением абелевой группы [2]. Каждого в отдельности ограничения, отмеченного в 1) и 2), достаточно для положительного решения вопроса [11, 10, 12, 9, 13]. С точки зрения техники доказательства и развития метода целесообразно рассмотреть условие

3) все собственные подгруппы (почти) FC-группы.

В работе рассматриваются локально - конечные минимальные не (почти) FC-группы, т.е. локально - конечные не (почти) FC-группы, все собственные подгруппы которых являются (почти) FC-группами. Здесь уточняется и развивается понятие «сигма-эквивалентности», введенное В.В.

Беляевым [14, 9]. Частные свойства соизмеримости двух подгрупп в некоторой группе неоднократно рассматривались в работах В.П.Шункова (в частности, в [15]). Общая ситуация и отношение индексной эквивалентности на элементах не локально конечной группы была опробована автором в [16, 17]. Там же было введено понятие модулятора элемента группы и необходимая символика.

§1 Определения и базовые леммы

1.1 Определение. *Элемент* b *сравним с элементом* a $(a :\equiv b)$ *в группе* G, *если индекс* $|C(a) : C(a) \cap C(b)| < \infty$ *(конечен), т.е. верна формула*

$$(a :\equiv b) \Leftrightarrow (C(a) :\equiv C(b)).$$

1.2 Определение. *Элементы* a *и* b *индексно эквивалентны* $(a_{\mathrm{i}} \equiv b)$ *в группе* G, *если их централизаторы в G соизмеримы, т.е. верна формула*

$$(a_{\mathrm{i}} \equiv b) \Leftrightarrow (C(a) \equiv C(b)).$$

Бинарное отношение $":\equiv"$ заданное на элементах произвольной группы G обладает свойствами:

1.2.1) если $(a :\equiv b)$ и $(a :\equiv c)$, $a,b,c \in G$, то $a :\equiv bc$;

1.2.2) если $(a :\equiv b)$, $a,b \in G$, то $\varphi(a) :\equiv \varphi(b)$, где φ – некоторый автоморфизм группы G.

Очевидно, из свойства (1.2.2) легко следует инвариантность сравнимости ($:\equiv$) элементов в группе G, а также индексной эквивалентности ($\equiv$) элементов, относительно действия автоморфизмов группы G.

1.3 Определение. *Модулятором элемента а группы* G *в группе* G *назовём множество* $M_G(a)$ *элементов группы* G *такое, что для любого элемента* $x \in M_G(a)$ *x сравнимо с* a $(a :\equiv x)$ *в группе* G, *т. е. верно равенство*

$$(M_G(a) = \{x / a :\equiv x,\ \ x \in G\}.$$

Нетрудно видеть, что $M_G(a)$ – подгруппа группы G (свойство 1.2.1).

1.4 ЛЕММА. *Элементы a и b группы* G *тогда и только тогда индексно эквивалентны* $(a_{\mathrm{i}} \equiv b)$ *в группе* G, *когда их модуляторы равны* $(M(a) = M(b))$, *т.е. справедлива формула*

$$(a_i \equiv b) \Leftrightarrow (M(a) = M(b)),$$

где $\Leftrightarrow$ *эквиваленция соответствующих высказываний.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $(a_{\mathrm{i}} \equiv b)$, то $(a :\equiv b)$ и $(b :\equiv a)$. Отсюда следует, что $\forall x \in M(a)$, $x \equiv: a$, но $b :\equiv a :\equiv x$. Далее из транзитивности отношения $"\equiv:"$ следует, что $x \in M(b)$. Таким образом, $M(a) \leq M(b)$. Аналогично устанавливается, что $M(b) \leq M(a)$. Из этих соотношений следует $M(a) = M(b)$.

Достаточность. Пусть $M(a) = M(b)$. Отсюда следует, что $a \in M(b)$ $(b :\equiv a)$ и $b \in M(a)$, $(a :\equiv b)$. Из соотношений $(a :\equiv b)$ и $(b :\equiv a)$ следует $\mathrm{a_i} \equiv b$.

Лемма доказана.

1.5 ЛЕММА. *Пусть G – бесконечная группа,* $x \in M(a) \setminus e$. *Если* $[a,x] \neq e$, *то* $(\forall g \in G)(a^g \in M(a))$, $a_i \equiv a^g$ *и* $M(a) = M(a^g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a \in M(a)$ и $M(a)$ – подгруппа G, то $a^x = x^{-1}ax \in M(a)$. Очевидно, $a^x \equiv: a$. Так как $(C(a))^x = C(a^x)$ [20. с. 69] и $C(a) \cong C(a^x)$, то из соотношения $a^x \equiv: a(|C(a) : C(a) \cap C(a^x)| < \infty)$ следует, что подгруппа $Q = C(a) \cap C(a^x)$ имеет конечный индекс в $C(a^x)$. Отсюда, очевидно, следует $a \equiv: a^x$ и $a_i \equiv a^x$.

Так как $\left|a^G\right| = \left|G : C(a)\right|$ [2, (теорема 2.5.6)], то из $a^x {}_i{\equiv} a$ следует, что $\left|(a^x)^{C(a)}\right| < \infty$. Поскольку отношение „$_i{\equiv}$" инвариантно относительно действия внутренних автоморфизмов группы G (свойство 1.2.2.), то верно сравнение $(\forall g \in G)(a^{xg} \equiv a^g)$. Отсюда следует, что $\left|C(a^{xg}) : C(a^{xg}) \cap C(a^g)\right| < \infty$ и $\left|C(a^g) : C(a^g) \cap C(a^{xg})\right| < \infty$. Теперь нетрудно заметить, что $\left|\{(a^{xg})^{C(a^g)}\}\right| < \infty$| и $\left|\{(a^g)^{C(a^{xg})}\}\right| < \infty$ для любого фиксированного $g \in G$.

Из последнего соотношения следует, что $\left|\{a^{C(a^x)g}\}\right| < \infty$. Далее рассмотрим разложение группы G на смежные классы $gC(a^x) = gC$ по подгруппе $C = C(a^a)$. Очевидно, произведение двух произвольных элементов, из которых первый взят со смежного класса aC, а второй – со смежного класса bC, принадлежит тому же классу, что и произведение ab. Элементы смежных классов aC и bC можно представить в виде ac и bs соответственно, где $c, s \in C$ а их произведение – $acbs$. Поскольку, $acbs \in abC$, то существует элемент $h \in C$ такой, что $acbs = abh$ и $csb = bh$, или $cb = bhs^{-1}$. Очевидно, $hs^{-1} = z \in C$ и $cb = bz$. Таким образом, каждый левый смежный класс $g_i C(a^x)$ группы G по подгруппе $C(a^x)$ содержится в некотором правом смежном классе $C(a^x)g_j$. Поскольку множество $\{a^{C(a^x)g}\}$ конечно, то, как легко видеть, множество $\{a^{gC(a^x)}\}$ так же конечно, где g фиксировано. Отсюда следует, что $a^g \equiv: a^x$. Поскольку $C(a^g) \cong C(a^x)$, то $a^g {}_i{\equiv} a^x$. Отсюда и сравнения $a^x {}_i{\equiv} a$ следует, что $a^g {}_i{\equiv} a$. По Лемме 1.4 $M(a) = M(a^g)$.

Лемма доказана.

§2 Известные результаты, вспомогательные леммы и предложения

Мы используем в своих исследованиях ряд классических результатов В. П. Шункова, полученных им для описания локально - конечных и периодических групп [22]. Мы опираемся также на известную теорему Томпсона-Фейта [19] о разрешимости конечной группы нечетного порядка. Предложение 2.3 дает нам критерий, при каком условии почти FC-группа будет FC-группой. Для этого достаточно, чтобы в ней все неединичные элементы были индексно эквивалентны. Лемма 2.4 и предложение 2.7 дают информацию о простой минимальной не почти FC-группе с индексно-эквивалентными неединичными элементами. Оказывается, в такой группе бесконечные собственные подгруппы соизмеримы и финитно-аппроксимируемы. В предложении 2.5 продолжается изучение простой минимальной не почти FC-группы, с индексно - эквивалентными неединичными элементами и с бесконечным централизатором некоторого неединичного элемента. В такой группе любые две собственные бесконечные подгруппы порождают собственную подгруппу. В Лемме 2.20 продолжается изучение почти FC-группы, в которой собственные подгруппы FC-группы. Группа с такими условиями будет либо FC-группой, либо черниковской группой определенного типа. Предложение 2.21 утверждает, что не FC почти FC-группа, всякая собственная подгруппа которой FC-группа, есть черниковская группа отличная от своего коммутанта. Предложение 2.26 дает описание бесконечной FC-группы, все собственные подгруппы которой коммутативны. Такая группа сама коммутативна. Предложения 2.27 и 2.28 раскрывают элементарные свойства минимальных не почти FC-групп. В параграфе приведен ряд результатов из монографии [8] (2.12, 2.13, 2.15, 2.19), а также результаты С. Н. Черникова (2.14, 2.22). Основным результатом параграфа является Лемма 2.20, дающая описание почти FC-группы с собственными FC-подгруппами. В доказательстве этой леммы ярко демонстрируется значение для теории групп понятия модулятора элемента. Лемма 2.31 дает описание периодических групп с черниковским коммутантом. Они почти FC-группы.

2.1 (ТЕОРЕМА ТОМПСОНА-ФЕЙТА [19]). *Конечная группа нечетного порядка разрешима.*

2.2 (ТЕОРЕМА ШУНКОВА [20]). *Периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально-конечна, почти разрешима и почти FC-группа [21].*

2.3 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* G *-почти FC-группа с индексно- эквивалентными неединичными элементами. Тогда* $G = M_G(\mathrm{e})$ *и* G *– FC-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию группа G обладает FC-подгруппой F конечного индекса. Так как $(\forall x \in F)(|G : C(x)| < \infty)$, то $F \le M_G(e)$. Отсюда следует, что $|G : M(e)| < \infty$. Пусть $g \in G \setminus M_G(e)$, $a \in M(e) \setminus e$. По условию $g\ _i \equiv a$, т.е. $|C(a) : C(a) \cap C(g)| < \infty$, $|C(g) : C(g) \cap C(a)| < \infty$. Так как $|G : C(a)| < \infty$ и $g \equiv: a$, то $|G : C(g)| < \infty$ и $a\ _i \equiv g$. Таким образом, в группе G один класс индексно эквивалентных элементов и $M(e) = G$ – FC-группа.

Предложение доказано.

2.4 ЛЕММА. *Пусть* G *-простая минимальная не почти FC-группа с индексно - эквивалентными неединичными элементами. Тогда в группе* G *бесконечные собственные подгруппы соизмеримы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A, B – бесконечные собственные подгруппы G. По Предложению 2.3 A и B– FC-группы. Пусть $a \in A \setminus e, b \in B \setminus e$. Так как $a \equiv b$, то $C(a) \cap C(b) = C_{ab}$ имеет конечный индекс в $C(a)$ и $C(b)$. Очевидно, $|A : C_A(a)| < \infty$, $|B : C_B(b)| < \infty$. Поскольку A и B – бесконечны, то $C_A(a)$ и $C_B(b)$ также бесконечны. Нетрудно видеть, что $|C_B(b) : C_B(b) \cap C_{ab}| < \infty$ и $|C_A(a) : C_A(a) \cap C_{ab}| < \infty$. Отсюда следует, что $|B : B \cap C_{ab}| < \infty$ и $|A : A \cap C_{ab}| < \infty$. Подгруппа $M_1 = гр(C_G(a), C_G(b))$ собственная в G (Предложение 2.5). Отсюда следует, что $M_1 = гр(C_A(a), C_B(b))$ собственная в G. Легко видеть, что индекс $|M_1 : M_1 \cap C_{ab}|$ конечен и $M_1 \cap C_{ab} \le C_A(a) \cap C_B(b)$, $|C_A(a) : C_A(a) \cap C_B(b)| < \infty$, $|C_B(b) : C_A(a) \cap C_B(b)| < \infty$ |. Так как $|B : C_B(b)| < \infty$, $|A : C_A(a)| < \infty$ и $C_B(b) \cap C_A(a) \le A \cap B$, то $|A : A \cap B| < \infty$ и $|B : A \cap B| < \infty$.

Лемма доказана.

2.5 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* G *– простая минимальная не почти FC-группа с бесконечным централизатором некоторого неединичного элемента и с индексно - эквивалентными неединичными элементами. Тогда бесконечные собственные подгруппы* A *и* B *группы* G *порождают собственную подгруппу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в группе G неединичные элементы индексно - эквивалентны и централизатор некоторого неединичного элемента бесконечен, то централизатор любого элемента группы G бесконечен. По Предложению 2.3 подгруппы A и B – FC-группы. Рассмотрим группу $K = гр(A, g)$, где $\mathrm{g} \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{e}$. Так как A – FC-группа и в группе G неединичные элементы индексно эквивалентны, то $|A : A \cap C(g)| < \infty$. Пусть $A_1 \le C(g)$ нормальная подгруппа из A конечного индекса в A. Очевидно, $гр(A, g) < N(A_1) < G$. Нетрудно видеть, что $|B : B \cap C(g)| < \infty$ и существует подгруппа $B_1 \lhd B,\ B_1 < C(g),\ |B : B_1| < \infty$. Так как $C(g)$ почти FC-группа, то она обладает FC-подгруппой R конечного индекса. Нетрудно видеть, что $|B_1 : B_1 \cap R| < \infty$ и $|A_1 : A_1 \cap R| < \infty$. Очевидно $|B : B \cap R| < \infty$, $|A : A \cap R| < \infty$. Отсюда следует, что существуют конечные множества элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_m \in B$ такие, что $A \le гр(R, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B \le гр(R, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_m)$.

Рассмотрим группу $H = гр(R, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots b_m)$.

Подгруппы $H_1 = гр(R_1, a_1), H_2 = гр(H_1, a_2),..., H_m = гр(H_{m-1}, b_m)$, по установленному ранее, собственные и $A, B \le H_m = H < G$.

Предложение доказано.

2.6 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Почти абелева FC-группа G соизмерима со своим центром $Z(G)$*

.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – абелева группа из G конечного индекса в G и $G = гр(R, a_1, a_2, ..., a_n)$. Так как G – FC-группа, то $\forall a_i$ $|G : C(a_i)| < \infty$ $(i = 1,2,..., n)$. Очевидно,

$$\mathrm{B} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{C}(a_i) \bigcap \mathrm{R}$$

имеет конечный индекс в G и $B \le Z(G)$. Отсюда следует, что $|G : Z(G)| < \infty$ и $G_i \equiv Z(G)$.

Предложение доказано.

2.7 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть G – простая минимальная не почти FC-группа с индексно - эквивалентными неединичными элементами. Тогда в группе G собственные подгруппы финитно аппроксимируемы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – собственная бесконечная подгруппа из G, $g \in G \setminus e$. Так как M – FC-группа (2.3) и неединичные элементы индексно - эквивалентны в G, то $|M : M \cap C(g)| < \infty$. Отсюда следует, что $|M : M \cap M^g| < \infty$. Так как группа G простая, то

$$\bigcap_{g=G} \mathrm{M} \bigcap \mathrm{M}^g = \bigcap_{g=G} \mathrm{M}^g = e \cdot$$

Предложение доказано.

2.8 ([22] В.П. Шунков). *Группа тогда и только тогда является черниковской 2-группой, когда она 2-группа и в ней некоторая максимальная элементарная абелева подгруппа конечна.*

2.9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. *Пусть G –группа, p – простое число. Тогда подгруппа P называется силовской p-подгруппой группы G, если она является максимальной p-подгруппой группы G и содержит изоморфную копию каждой p-подгруппы группы G.*

Пусть $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G, а $Max_p(G)$ – множество всех максимальных p-подгрупп группы G. Очевидно, $Syl_p(G) \le Max_p(G)$. Если все максимальные p-подгруппы группы G изоморфны, то все они являются силовскими p-подгруппами. Таким образом, силовские p-подгруппы конечной группы являются в точности ее максимальными p-подгруппами.

2.10 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если локально - конечная группа G содержит конечную максимальную p-подгруппу P, то все максимальные p-подгруппы группы G сопряжены в G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – произвольная конечная p-подгруппа группы G. Так как G – локально - конечная группа, то $K = гр(Q, P)$ – конечна. По теореме Силова [2], применительно к конечной группе К, $P = K^{-1}QK \le P$. Таким образом, каждая p-подгруппа группы G конечна. Если же Q является максимальной p-подгруппой группы G, то P и Q сопряжены.

Предложение доказано.

2.11 ОПРЕДЕЛЕНИЕ [18]. *Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, содержащая инволюции. Подгруппа H называется сильно вложенной в G, если пересечение $H \cap H^g$ $(g \in G \setminus H)$ не содержит инволюций.*

2.12 (ТЕОРЕМА 4.24 [8]). *Если локально - конечная группа G обладает сильно вложенной подгруппой H, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *конечные 2-подгруппы группы G циклические или (обобщенные) группы кватернионов;*

2) $O(G)=\bigcap\limits_{g\in G}H^{g}$ *и факторгруппа* $G/O(G)$ *имеет единственную минимальную нормальную подгруппу* $M/O(G)$, *которая изоморфна одной из групп PSL(2,F), PSU(3,F) или Sz(F) для подходящего локально-конечного поля характеристики 2 и G/M – абелева группа, все элементы которой имеют нечетные порядки.*

2.13 (ТЕОРЕМА 4.30 [8]). *Пусть* G *– бесконечная локально-конечная простая группа с конечной силовской 2-подгруппой S. Если для каждой инволюции* $i\in S$ *факторгруппа* $C(i)/O(C(i))$ *конечна, то для каждой пары* s,t *инволюций из S, таких, что* $s^{a},t^{b},x^{c}\in S$, $s^{a}\cdot t^{b}=x^{c}$ *и порядок* $\left|C_{S}(x^{c})\right|$ *максимален среди порядков централизаторов в S элементов из S сопряженных с* x *в* G. *Центр группы S – элементарная абелева группа.*

2.14 (С.Н.Черников [3]). *Бесконечная почти локально-разрешимая группа, обладающая конечной силовской p-подгруппой, обладает подгруппой конечного индекса, не содержащей p-элементов.*

2.15 (ТЕОРЕМА 4.4 [8]). *Бесконечная группа* G *проста тогда и только тогда, когда она обладает локальной системой состоящей из счетных бесконечных простых подгрупп.*

2.16 (ТЕОРЕМА ШМИДТА [2]). *Расширение локально-конечной группы при помощи локально-конечной группы локально-конечно.*

2.17 (Ю.К. Горчаков [23]). *Если в FC-группе коммутант подгруппы конечного индекса конечен, то коммутант самой группы конечен.*

2.18 ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. *Группой Фробениуса называется группа* G, *которая содержит подгруппу H такую, что H<G и* $(\forall g\in G\setminus H)\ (H\cap H^{g}=\mathrm{e})$. *Подгруппу H группы Фробениуса* G *называют дополнением (Фробениуса) группы* G.

2.19 (ТЕОРЕМА 1.V.2 [8]). *Пусть H – дополнение локально-конечной группы Фробениуса. Тогда G содержит единственное ядро*

$$K=(G\setminus\bigcup_{g\in G}H^{g})\bigcup<e>$$

и K является нормальным делителем группы G. Подгруппа K нильпотентна и существует множество простых чисел π такое, что G – π-замкнута и $K=O_{\pi}(G)$. Любое дополнение группы G сопряжено с H элементом из K. Любая абелева группа из H локально-циклическая. Если S – нетривиальная подгруппа из G, такая, что $K\cap S=e$, то $Z(S)\neq e$ и S сопряжена с подгруппой дополнения H.

2.20 ЛЕММА. *Почти FC-группа* G, *в которой собственные подгруппы FC-группы, либо FC-группа, либо черниковская группа вида* $G=A\ \ \lambda$ *<a>, где A – квазициклическая примарная группа, <a> – конечная циклическая примарная группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа G не является FC-группой. Пусть H – ее подгруппа конечного индекса, $M(g)$ – модулятор произвольного элемента $g\in G$.

Если $(\forall g\in G)(M(g)=G)$, то G - FC-группа (2.3). Противоречие. Таким образом, в группе G существует элемент $a\neq e$ такой, что $M(a)<G$ (собственная подгруппа).

Если предположить что $\left|C(a)\right|<\infty$, то $M(a)=G$. Противоречие. Таким образом, $C(a)$ – бесконечная группа. Поскольку $\left|G:H\right|<\infty$, то $\left|C(a):C(a)\cap H\right|<\infty$. Отсюда следует, что $C(a)\cap H$ – бесконечная группа. Так как H – собственная FC-группа, то $(\forall h\in H)(\left|G:C(h)\right|<\infty)$. Отсюда следует, что $M(a)$ – бесконечная группа. Так как

$$M(e)=\bigcap_{g\in G}M(g)=FC(G),$$

то, очевидно, $M(e)<G$, $H \le M(e)$, $|G:M(e)|<\infty$. Отсюда имеем, $|G:C(a)|<\infty$ и $M(a) \le M(e)$. С другой стороны $M(e) \le M(a)$. Таким образом, $M(a)=M(e)=FC(G)$.

Так как G не FC-группа, а $|G:M(e)|<\infty$, то существует элемент $x \in G \setminus M(e)$. Предположим, что $M(x)<G$. Тогда $M(x)$ – FC-группа и $M(e)=M(a) \le M(x)$, $a \in M(x)$. А так как $C(x)$ в этом случае бесконечен, то $|C(x):(x) \cap M(e)|<\infty$ и $M(e) \le M(x)$. Отсюда следует, что $x \in M(e)$. Противоречие. Таким образом, $M(x)=G$.

Предположим, что $M(x)<G$. Тогда $M(x)$ – FC-группа и $M(1)=M(a) \le M(x)$, $a \in M(x)$. А так как $C(x)$ в этом случае бесконечен, то $|C(x):(x) \cap M(e)|<\infty$ и $M(e) \le M(x)$. Отсюда следует, что $x \in M(e)$. Противоречие. Таким образом, $M(x)=G$.

Предположим, что $C(x)$ – бесконечная группа. Если $C(x)=G$, то $x \in M(\mathrm{e})$. Противоречие. Отсюда следует, что $C(x)<G$ и $C(x)$ – FC-группа. Так как $|C(x):(x) \cap M(e)|<\infty$, то существует элемент $h \in C(x) \cap M(e) \setminus e$ такой, что $|C(x):(x) \cap C(h)|<\infty$. Очевидно, $x \in C(h)$, а $C(h)$ – бесконечная FC-группа. Отсюда следует, что $|C(h):(h) \cap C(x)|<\infty$ и $x \equiv: h$, $x :\equiv h$. Таким образом, $h_{\mathrm{i}} \equiv x$, а так как $|G:C(h)|<\infty$, то $|G:C(x)|<\infty$ и $x \in M(e)$. Противоречие. Итак, $|C(x)|<\infty$.

Докажем, что $M(\mathrm{e})$ – абелева группа. Пусть $h \in M(e) \setminus e$, $C=C(h)$. Очевидно, $|G:C(h)|<\infty$. Так как $M_C(e)$ характеристическая подгруппа группы C и $C \nabla G$, то $M_C(e) \nabla G$ и $K=гр(M_C(e), x)$ бесконечна. Очевидно, K собственной в G быть не может. Отсюда следует, что $M_G(e) \le M_C(e)=C=C(h)$. Поскольку h – произвольный элемент из $M(e)$, то $M=M(e)$ абелева группа. Докажем, что группа M удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Предположим, что группа M обладает собственной бесконечной подгруппой A. Так как $A \nabla M$, а $|G:M|<\infty$, то $|\mathrm{G}:\mathrm{N(A)}|<\infty$. Отсюда следует, что для любых $g \in G$

$$\bigcap_{g \in G} A^g = A_1 < M$$

и $A_1 \nabla G$. Рассмотрим группу $K=гр(A_1, x)$, где $x \in G \setminus M$. Предположим, что $K<G$. Тогда, очевидно, K – FC-группа, т. е. $C(x)$ – бесконечная группа. Противоречие. Таким образом, $K=G$. Но тогда $M(e) \le A_1$, т.е. $M \le A_1 \le A$. Однако, это противоречит выбору группы A (как собственной в M).

Поскольку $|G:M|<\infty$, то группа G является конечным расширением абелевой группы M с условием минимальности. Отсюда следует, что группа G – черниковская группа и M не содержит бесконечных собственных подгрупп. В этом случае M – квазициклическая группа (Предложение 1.3 [3]). Очевидно, M – максимальная примарная нормальная подгруппа из G и $G=M\lambda<x>$, где $<x>$ – циклическая группа простого порядка.

Лемма доказана.

2.21 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Не FC – почти FC-группа G, всякая собственная подгруппа которой FC-группа – черниковская группа отличная от своего коммутанта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, очевидно, следует из Леммы 2.20 и очевидного равенства $G' = C_{p^\infty}$. Если же $|G'|<\infty$, то G – FC-группа, чего быть не может.

2.22 (С.Н.Черников [3]). *Класс черниковских групп замкнут относительно подгрупп гомоморфных образов и расширений.*

2.23 *Периодическое расширение локально разрешимой группы посредством локально разрешимой группы локально разрешимо [18].*

2.24 (В.П.Шунков [24]) .*Пусть* G *– локально конечная группа,* $K \lhd G$, *P – конечная p-подгруппа из* G $(P \notin \pi(K))$, $\bar{G} = G/K, \bar{P} = PK/K$. Тогда $N_{\bar{G}}(\bar{P}) = N_G(P)K/K$, $C_{\bar{G}}(\bar{P}) = C_G(P)K/K$.

2.25 (Н.Ф. Сесекин, О.С. Широковская [25]). *Бесконечная локально-разрешимая группа, все собственные подгруппы которой коммутативны, сама коммутативна.*

2.26 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Бесконечная FC-группа, все собственные подгруппы которой коммутативны, сама коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G обладает бесконечной системой порождающих. Если группа G не содержит элементов конечного порядка, то она абелева. Пусть $P(G)$ – периодическая часть G. Очевидно, коммутант $G' \leq P(G)$, а $G/P(G)$ – абелева. Так как периодическая FC-группа локально-конечна, то $P(G)$ – локально разрешима и, следовательно (2.25), абелева. Очевидно, G разрешима и, следовательно, локальною-разрешима. По предложению 2.25 в этом случае G абелева.

Если же группа G конечно-порождена, то $(\forall a \in G)(|G : C(a)| < \infty)$ и G – почти абелева FC-группа. В этом случае $|G : Z(G)| < \infty$ (2.6) и $|G'| < \infty$. Так как G/G' - абелева, то G – локально-разрешима и по предложению 2.25 G – абелева.

Предложение доказано.

2.27 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* G *– минимальная не почти FC-группа. Тогда группа* G *не обладает собственными подгруппами конечного индекса и* $M = M_G(1) \leq Z(G)$. *Если* N/K *конечный нормальный делитель факторгруппы* G/K, *то* $N/K \leq Z(G/K)$ *и* N' *– FC-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, очевидно, вытекает из свойств минимальных не почти FC-групп и того факта, что, если N/K абелева, то $N' \leq K$, где K – FC-группа.

2.28 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* G *не обладает подгруппами конечного индекса и* $M = M_G(e) = FC(G) \leq Z(G)$. *Если* N/K *– конечный нормальный делитель факторгруппы* G/K, *то* $N/K \leq Z(G/K)$ *и N не более чем трехступенно разрешима, а* K *не более чем двухступенно нильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $K = FC(N)$, то $K \lhd G$ и, так как N – почти абелева и $N/K \leq Z(G/K)$, то $N' \leq K$. Очевидно, K – почти абелева FC-группа и по предложению 2.6 она конечна над своим центром и, следовательно, коммутант K' – конечен. По предложению 2.27 $K' \leq Z(G)$. Таким образом, $N' = e$, а $[G,N] \leq K$ и K не более чем двухступенно нильпотентна.

Предложение доказано.

2.29 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* G *– группа,* $Z \leq Z(G)$. *Если факторгруппа* G/Z *– FC-группа, то* G *– FC-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

2.30 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* G *– группа,* $Z \leq Z(G)$. *Если в факторгруппе* G/Z *коммутант конечен, то группа* G *является FC-группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа с конечным коммутантом является FC-группой (1.11 [14]), то утверждение доказываемого предложения следует из предыдущего предложения.

Предложение доказано.

2.31 ЛЕММА. *Пусть* G *– периодическая группа,* G' *– ее коммутант. Если коммутант* G' *группы* G *черниковский, то* G *– почти FC-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a – фиксированный элемент группы G. Тогда $\forall g \in G$ верно равенство $g^{-1}ag = a[a,g]$. Так как $|a^G| = |G : C(a)|$, а элемент $[a,g]$ принадлежит коммутанту G', то верно соотношение

$$|a^G| = |G : C(a)| \le |G'|.$$

Если $|G'|$ конечен, то группа G является FC-группой. Пусть G' – бесконечная черниковская группа, а Z – ее черниковская полная часть. Так как $Z \lhd G$ и $|G : C(Z)| < \infty$ [1], то для доказательства леммы достаточно установить, что $C(Z)$ – почти FC-группа. Очевидно, в факторгруппе $C(Z)/Z$ коммутант конечен и она является FC-группой. Отсюда по предложению 2.30 $C(Z)$ – FC-группа, а G – почти FC-группа.

Лемма доказана.

§3 Основные леммы о минимальных не FC-группах

Леммы этого параграфа утверждают, что если в группе G каждая собственная подгруппа FC-группа, то произвольный класс ее индексно-эквивалентных элементов вместе с элементами центра группы образует подгруппу (Лемма 3.1), если же она содержит нормальный делитель ($M \lhd G$), то в этом случае она будет почти FC-группой, либо факторгруппа по ее центру $Z(G)$ будет простой группой (Лемма 3.2). В доказательствах этих лемм используется модуляторный метод.

3.1 ЛЕММА. *Пусть G – группа, в которой каждая собственная подгруппа – FC-группа. Тогда класс $\overset{i\equiv}{(x)}$ индексно эквивалентных элементов вместе с элементами центра Z(G) группы G образует подгруппу G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма неверна. Если $(\forall x \in G)(M(x) = G)$. Тогда в группе G один класс индексно эквивалентных элементов (1.4). Очевидно, в этом случае $L = \overset{i\equiv}{(x)} \cup \overset{i\equiv}{(e)}$ – группа. Противоречие. Таким образом, в группе G существует элемент x такой, что $M(x) < G$. Если $|C(x)| < \infty$, то $M(x) = G$. Противоречие. Таким образом, $C(x)$ – бесконечен.

Если $(\forall x \in G)(C = C(x) \,{}_i{\equiv}\, Z(G))$, то коммутант C' группы C конечен и C – FC-группа. Очевидно, $C < G$ и $x \notin Z(G)$. Если элемент $a \in Z(G), y \in G$, то из $x \,{}_i{\equiv}\, y$, очевидно, следует, что $ay \,{}_i{\equiv}\, ya \,{}_i{\equiv}\, xa \,{}_i{\equiv}\, x$ и $ay \in \overset{i\equiv}{(x)} \subset L$. Пусть $a \notin Z(G)$ и $[x,a] = e$. Тогда $C(a) < G$, $a \in C(x)$, а $x \in C(a)$. Так как $C(x), C(a)$ – FC-группы, то $a \,{}_i{\equiv}\, x$. Таким образом, перестановочные нецентральные элементы индексно эквивалентны и вместе с элементами $Z(G)$ образуют подгруппу группы G.

Пусть $y \,{}_i{\equiv}\, x \,{}_i{\equiv}\, z$. Очевидно, $y, z \notin Z(G)$. Если $y \cdot z \in Z(G)$, то L – подгруппа. Пусть $y, z \notin Z(G)$. Докажем, что $x \,{}_i{\equiv}\, yz$. Так как $x \,{}_i{\equiv}\, y \,{}_i{\equiv}\, z$, то в $C(x) \cap C(y) \cap C(z)$ существует элемент t такой, что $[t,x] = [t,y] = e$. Так как $C(t) < G$, то $x \,{}_i{\equiv}\, t \,{}_i{\equiv}\, yz \in L$ и L – подгруппа. Противоречие.

Таким образом, в группе G существует элемент z такой, что $C(x)$ – бесконечная группа и $|C(x) : Z(G)| = \infty$. Пусть, как и ранее, $x \,{}_i{\equiv}\, y \,{}_i{\equiv}\, z$ и $y, z \notin Z(G)$. Далее, очевидно, $A = C(x) \cap C(y) \cap C(z)$ имеет конечный индекс в $C(x)$ и в A существует элемент t такой, что $t \notin Z(G)$. Нетрудно видеть, что $[t,x]=[t,yz]=e$, $C(t)<G$ и $x, yz \in C(t)$. Следовательно, $x \,_i\!\equiv yz \,_i\!\equiv t$, $yz \in \overset{i\equiv}{(x)} \subset L$ и L – подгруппа. Противоречие.

Лемма доказана.

3.2 ЛЕММА. *Пусть G – группа, в которой каждая собственная подгруппа – FC-группа, $M \nabla G$. Тогда G – почти FC-группа, либо $G/Z(G)$ – простая группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{G}=G/M$, $\overline{H}=MZ(G)/Z(G)$. Предположим, что $|M : M \cap Z(G)|<\infty$. Тогда $\left|\overline{G}:C(\overline{H})\right|<\infty$ и $|G:C(M)|<\infty$. Если $C(M)<G$, то G почти FC-группа. Если $C(M)=G$, то $M \le Z(G)$. Так как M можно выбрать максимальным (Лемма Цорна), то $G/Z(G)$ – простая группа.

Пусть теперь $|M:Z(G)|=\infty$. Возьмем произвольный элемент $a \in M \setminus Z(G)$. Если $(\forall g \in G)(|C(g):Z(G)|<\infty)$, то, как нетрудно показать (см. доказательство леммы 3.1), в этом случае $L=\overset{i\equiv}{(a)} \cup Z(G)$ подгруппа группы G. Пусть теперь для фиксированного $a \in G \setminus Z(G)$ $|C(a):Z(G)|=\infty$. И в этом случае (лемма 3.1) $L=\overset{i\equiv}{(a)} \cup Z(G)$ – подгруппа. Очевидно, $\forall h \in M$ найдется нецентральный элемент t из $C(a) \cap C(h)$, что $a \,_i\!\equiv t \,_i\!\equiv h$ и $h \in \overset{i\equiv}{(a)}$. Отсюда следует, что $M \le L < G$. Так как индексная эквивалентность инвариантна относительно действия автоморфизмов (т.е. если $x \,_i\!\equiv y$, то $\varphi(x) \,_i\!\equiv \varphi(y)$, где φ - автоморфизм группы G), то $\forall g \in G \setminus L$ имеем $L \cap L^g = Z(G)$. С другой стороны, из $M \nabla G$ следует, что $M \subset L \cap L^g$ и $M \subseteq Z(G)$. Очевидно, M – можно выбрать максимальной, что обеспечит простоту факторгруппы $G/Z(G)$.

Лемма доказана.

3.3 (В.П. Шунков [15]). *Пусть G – группа, D – SF-подгруппа из G, A, C – некоторые подгруппы из G. Если D обладает такими подгруппами F и R, что $|D:R|<\infty$, $R<F$, $A, D \le NG(F)$ и $C, D \le N_G(R)$, то в D существует подгруппа X конечного индекса в D и $A, C, D \le N_G(X)$.*

3.4 (ТЕОРЕМА [7] В.П. Шунков). *Локально-конечная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп черниковская группа.*

3.5 ([3] С.Н. Черников). *Периодические подгруппы группы внешних автоморфизмов черниковской группы конечны.*

3.6 ([28] В.П. Шунков). *Если в бипримитивно-конечной p-группе (а при p=2 в произвольной 2-группе) централизатор некоторого элемента простого порядка черниковская группа, то сама группа черниковская.*

3.7 (ТЕОРЕМА 3.17 [8]). *В локально конечной группе, удовлетворяющей условию минимальности для p-подгрупп, индекс $|G:Op'p(G)|$ конечен тогда и только тогда, когда G не обладает конечными простыми группами, содержащими элементы порядка p.*

§4 Проблема минимальности в классе локально-конечных групп

Содержание этого параграфа в основном связано со строением локально-конечной группы с условиями конечности более общими, чем условие минимальности. Как известно, в большинстве случаев одной из самых трудных зада, стоящих на пути описания таких групп, является установление непростоты такой группы. Теорема 4.1, по существу, дает критерий непростоты локально - конечной минимальной не почти FC-группы. Для того чтобы такая группа обладала нормальным делителем необходимо, чтобы она содержала в точности не более двух классов индексно - эквивалентных элементов. Т.е. в ней должны быть индексно - эквивалентными все неединичные элементы. Этот факт необходим как база индуктивного шага, чтобы доказать Теорему 4.2 (локально-конечная минимальная не почти FC-группа не проста). Отсюда, как частный случай, выводится Теорема 4.3: локально-конечная минимальная не FC-группа отлична от своего коммутанта. Теоремы 4.3 и 4.4 решают утвердительно проблему 5.1 а) и б) из [19]. Теорема 4.5 – это знаменитая теорема Шункова: локально-конечная группа с условием минимальности – черниковская группа. Привожу свое доказательство этой уникальной теоремы, которая уже неоднократно передоказывалась многими авторами. Теорема 4.6 утверждает, что локально-конечная группа с условием минимальности для не почти абелевых подгрупп либо почти абелева, либо двуступенно разрешима (т.е. почти локально -разрешима). Далее следует теорема Беляева – локально-конечная группа все собственные подгруппы, которой почти абелевы, либо почти абелева, либо двуступенно разрешима (Теорема 4.7). Отсюда легко выводится следующие результаты: локально конечная минимальная не почти абелева группа не проста (Теорема 4.8) и отлична от своего коммутанта (Теорема 4.9). Теорема 4.10 это известный результат М. И. Каргаполова: бесконечная локально - конечная группа, каждая собственная подгруппа которой конечна - квазициклическая р-группа. (Решение проблемы Шмидта в классе локально - конечных групп). Теорема 4.11 (В.П.Шунков) устанавливает черниковость локально - конечной группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп. Наше доказательство этой теоремы выводится из Предложений 2.16, 2.26, 2.32 и Теорем 4.3, 4.5. Теорема 4.12 гласит, что локально-конечная группа, в которой все собственные подгруппы имеют конечный коммутант, имеет (либо конечный, либо бесконечный) черниковский коммутант. Эта теорема нам понадобилась, чтобы дать полное описание локально - конечных групп типа Миллера-Морено, ранее частично полученное В.В.Беляевым: локально конечная группа G типа Миллера-Морено не проста, отлична от своего коммутанта и факторгруппа G/G' – циклическая р-группа, где G' – квазициклическая группа (следствие 4.13).

Теорема 4.17 утверждает, что бесконечная локально-конечная группа с черниковским централизатором некоторой инволюции почти локально - разрешима. Этой теоремой дан утвердительный ответ на проблему (Б.Хартли) 13.6 из [19] для частного случая, когда централизатор некоторой инволюции есть черниковская группа. Теорема 4.15 дает описание локально - конечных групп с черниковскими силовскими р-подгруппами (Теорема Павлюка-Шункова-Беляева [11, 10]). Такие группы почти локально-разрешимы. Наш метод доказательства этой Теоремы отличный от метода В.В.Беляева. Если сохранить ограничения теоремы 4.15 лишь для централизаторов инволюций локально-конечной группы G, то в этом случае группа G будет либо почти локально-разрешимой, либо факторгруппа $G/O(G)$ будет обладать нормальным делителем изоморфным $PSL(2,F)$ над локально-конечным полем F нечетной характеристики. Доказательство этого результата использует индукцию по числу классов индексно эквивалентных инволюций группы. Теорема 4.18 дает описание локально-конечной группы с конечной силовской 2-подгруппой. Такая группа будет удовлетворять заключению предыдущей теоремы (4.15). Теорема 4.22 дает описание простой локально-конечной группы с условием минимальности для абелевых 2-подгрупп и с почти локально-разрешимыми централизаторами инволюций. Такая группа изоморфна $PSL(2,F)$ над локально- конечным полем F нечетной характеристики.

4.1 ТЕОРЕМА. *Локально-конечная минимальная не почти FC-группа с индексно эквивалентными неединичными элементами не проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует простая группа G, удовлетворяющая условию теоремы. В силу Предположения 2.1 группа G содержит инволюции, централизаторы которых бесконечны (2.2). Пусть S – максимальная 2-подгруппа из G. Как локально-разрешимая подгруппа S, будет собственной в G.

Предположим, что S бесконечна. Поскольку она бесконечная почти FC-группа, а значит (2.3), FC-группа, то для любой инволюции $i_1 \in S$ индекс $|S : C_S(i_1)|$ конечен и $C_1 = C_S(i_1)$ – бесконечен. Пусть $Z_1 = гр(i_1)$. В факторгруппе C_1 / Z_1 найдется бесконечная подгруппа K_1 / Z_1 с центральной подгруппой $Z_2 / Z_1 = гр(i_1 Z_1)$ порядка два. Очевидно, подгруппа четвертого порядка Z_2 центральна в K_1. Так как K_1 – FC- группа, то класс сопряженности элемента i_2 в K_1 конечен и бесконечен централизатор $C_2 = C_{K1}(i_2)$. Аналогично предыдущему, можно найти бесконечную подгруппу $K_2 < C_2$ с центральной подгруппой Z_3 / Z_2 в K_2 / Z_2 второго порядка. Продолжая этот процесс, получим объединение

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n .$$

Очевидно, A – бесконечная абелева 2-группа. Таким образом, группа G обладает бесконечной абелевой подгруппой. По Лемме 2.4 в группе G бесконечные собственные подгруппы соизмеримы. Так как группа G содержит бесконечную абелеву подгруппу, то в ней каждая собственная подгруппа почти абелева и является конечным расширением своего центра (2.3, 2.6).

Таким образом, S – конечна над своим центром и соизмерима с каждой своей бесконечной подгруппой. Так как S финитно-аппроксимируема (2.7), то она содержит бесконечную элементарную абелеву подгруппу B такую, что $B = B_1 \times B_2$, где B_1, B_2 – бесконечные подгруппы B. Так как $|S : S \cap B_1| < \infty$, $|S : S \cap B_2| < \infty$,то $|S : B_1 \cap B_2| < \infty$. Однако, $B_1 \cap B_2 = e$. Таким образом, в группе S элементарные абелевы подгруппы конечны. По Предложению 2.8 S - черниковская группа. Пусть $\breve{S}$ – черниковская полная часть группы S. Она бесконечна, ввиду бесконечности S. Поскольку в G неединичные элементы индексно эквивалентны, а группа $\breve{S}$ не содержит собственных подгрупп конечного индекса, то $\breve{S} \le C_G(g)$, где $g \in G \setminus e$. Отсюда следует, что $N_G(\breve{S}) = G$ и $\breve{S} \nabla G$. Противоречие.

Таким образом, в группе G силовские 2-подгруппы конечны. Пусть инволюция $i_1 \in Z(S)$, а $C_1 = C_G(i_1)$. Очевидно, $S < C(i_1)$. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_n$ - все инволюции из S, а $C_k = C(i_k)$, где $k = 1,2,\ldots,n$. Так как $|C_m : C_m \cap C_k| < \infty$, где $m, k = 1,2,\ldots,n$, то $H = гр(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ собственная (2.5) подгруппа из G_n $|H : H \cap C_k| < \infty$. Очевидно, H содержит централизатор любой инволюции из S, а поскольку $S < H$ и силовские 2-подгруппы сопряжены в H (2.10), то H - сильно изолирована в G. Так как C_k – финитно-аппроксимируемая FC-группа, то она обладает нормальным делителем $O(C_k)$ конечного индекса, не содержащим инволюций (Предложение 2.14). Отсюда и Предложения 2.13 вытекает, что центр S – элементарная абелева группа. Таким образом, группа G изоморфна одной из простых групп, указанных в Предложении 2.12. Но в этих группах силовские 2-подгруппы бесконечны. Противоречие.

Теорема доказана.

4.2 ТЕОРЕМА. *Локально-конечная минимальная не почти FC-группа не проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно полагать, что G счетная (2.15) бесконечная простая группа. Рассмотрим бинарное отношение индексной эквивалентности на элементах группы G. Если все элементы группы G индексно эквивалентны, то G - FC-группа и, следовательно, не проста. Противоречие. Если же для любого элемента $b \in G \setminus e$ $M_G(b) = G$, то в группе G индексно эквивалентны все неединичные элементы (2.16). В этом случае группа G не проста (Теорема 4.1). Противоречие. Таким образом, в группе G существует неединичный элемент a такой, что модулятор $M_G(a)$ – собственная подгруппа группы G.

Предположим, что $M(a)$ - конечная подгруппа G. Пусть $C = C_G(a)$. Поскольку $C < G$ и C - почти FC-группа, то индекс $|C : M_C(e)|$ конечен, где $M_C(e)$ - модулятор единицы группы C в группе C. Очевидно, $M_C(e)$ – FC-подгруппа из C. Так как для любого элемента $c \in M_C(e)$ группа $C_C(c)$ имеет конечный индекс в C, то $M_C(e) \le M_G(a)$. Поскольку $M_G(a)$ – конечная группа по предположению, то из $|C : M_C(e)| < \infty$ следует, что $C = C_G(a)$ –

конечная группа. Отсюда следует, что для любого элемента $g \in G$ $g \underset{i}{\equiv} a$ и $M(a) = G$. Противоречие.

Таким образом, $M = M(a)$ – бесконечная собственная подгруппа группы G и в группе G по меньшей мере три класса индексно эквивалентных элементов (нейтральный элемент составляет отдельный класс). Далее докажем, что M взаимно проста со своими сопряженными. Пусть $x \in M(a) \setminus e$. Предположим, что $[x,a] \neq e$. Так как $a^x \in M(a)$, то по Лемме 1.5 $a^g \in M(a)$, где $g \in G$. Отсюда следует, что $K = гр(a^g) \leq M \leq G$ и $K \nabla G$. Противоречие. Таким образом, $[x,a] = 1$ и $M(a) \leq C(a) = C$. Поскольку для любого $x \in M(a)$ $|C : C \cap C(x)| < \infty$, то $M(a)$ – FC-подгруппа в C. Так как $M(x) \leq M(a) \leq C(a)$ и M – FC-подгруппа C, то $x_i \equiv a$ в C. А поскольку $M(a), M(x) < C$, то $M(a) = M(x)$ (1.4). Отсюда имеем $a_i \equiv x$ в группе G (1.4). Пусть $N = N_G(M)$ и $e \neq y \in N \setminus M$. Так как $a^y \in M$, то $a^g \in M$ и $a_i \equiv a^g$ (1.4). Отсюда следует, что $гр(a^g) \nabla G$. Противоречие. Таким образом, M совпадает со своим нормализатором и $M \cap Mg = e$ $\forall g \in G \setminus M$. Очевидно G - группа Фробениуса. По Предложению 2.19 она не проста. Противоречие.

Теорема доказана.

4.3 ТЕОРЕМА. *Локально-конечная минимальная не FC-группа не проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G удовлетворяет теореме. Предположим, что существует простая локально-конечная минимальная не FC-группа G. Тогда, очевидно, она не почти FC-группа, а каждая ее собственная подгруппа почти FC-группа. По Теореме 4.2 группа G не проста. Противоречие.

Теорема доказана.

4.4 ТЕОРЕМА. *Локально-конечная минимальная не FC-группа отлична от своего коммутанта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа, удовлетворяющая условию теоремы. Если она почти FC-группа, то утверждение теоремы следует из Предложения 2.21. Пусть теперь группа G не содержит подгрупп конечного индекса, а M ее нормальный делитель (Теорема 4.3), $\overline{G} = G/M$, $\overline{M} = M \cdot Z(G)/Z(G)$. Предположим, что $|M : M \cap Z(G)| < \infty$. Тогда, очевидно, $\left|\overline{G} : C(\overline{M})\right| < \infty$, $|G : C(M)| < \infty$, $C(M) = G$ и $C(M) \leq Z(G)$, а факторгруппа $\overline{G} = G/Z(G)$ удовлетворяет всем условиям доказываемой теоремы. По Теореме 4.3 G не проста. Отсюда имеем, что $Z(\overline{G}) \neq E$, а G – отлична от своего коммутанта.

Пусть теперь $|M : M \cap Z(G)| = \infty$. Возьмем произвольный элемент $h \in M \setminus Z(G)$ Очевидно, что $|C(h) : Z(G)| = \infty$. По Лемме 2.30 $L = \overset{i\equiv}{(h)} \cup Z(G)$ – группа. Так как $\forall m \in M$ найдется нецентральный элемент t из пересечения $C(h) \cap C(m)$, то $m_i \equiv h$ и $M \leq L$. Так как $h \neq Z(G)$, то $C(h) < G$. Поскольку $|M : C(h)| < \infty$ и $Z(G) < C(h)$, то L - собственная в G. Поскольку индексная эквивалентность инвариантна относительно действия автоморфизмов, то $(\forall g \in G \setminus L)(L \cap L^g = Z(G))$. С другой стороны из $M \nabla G$ следует, что $M \subset L \cap L^g = Z(G)$. Очевидно, факторгруппа $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G/Z(G)}$ удовлетворяет условию теоремы. По Теореме 4.3 группа $\breve{G}$ не проста и $\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{G}}) \neq \mathrm{E}$. Теперь, очевидно, $G' < G$ [18].

Теорема доказана.

4.5 ТЕОРЕМА ШУНКОВА. *Локально-конечная группа с условием минимальности - черниковская группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, но не является черниковской группой. Если G – нечерниковская группа, то в ней существует собственная нечерниковская подгруппа G_1. Если же G_1 нечерниковская, то и она обладает нечерниковской собственной подгруппой G_2. Относительно G_2 рассуждаем аналогично. Рассуждая таким образом, построим строго убывающую цепочку нечерниковских подгрупп

$$G > G_1 > G_2 > \ldots > G_n \ldots .$$

Поскольку группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то она удовлетворяет условию минимальности для нечерниковских подгрупп. В силу последнего замечания, указанная цепочка подгрупп должна стабилизироваться на конечном шаге k. Пусть уже $G_n = G_k$ и в G_k всякая собственная подгруппа черниковская, а сама G_k не является таковой. Не теряя общности рассуждении, можно полагать, что $G = G_k$. Пусть K_1, K_2 - бесконечные собственные нормальные делители из G и, следовательно, они черниковские. В силу Предложения 2.22 $K = гр(K_1, K_2)$ так же черниковская группа. Отсюда следует, что в G существует максимальный полный абелев нормальный делитель A. В факторгруппе G / A любой собственный нормальный делитель конечен, причем, G / A нечерниковская группа, но каждая ее собственная подгруппа черниковская. Пусть уже группа G не обладает бесконечными нормальными делителями. Если H – конечный нормальный делитель в G, то $C_G(H) \nabla G$ и $\left|G : C_G(H)\right| < \infty$. Отсюда следует, что $C_G(H) = G$. Таким образом, любой собственный нормальный делитель из G содержится в $Z(G)$. Но тогда, очевидно $\overline{G} = G/Z(G)$ – бесконечная простая группа, причем G – нечерниковская, а всякая собственная ее подгруппа черниковская. Так как черниковская группа - это конечная группа, или конечное расширение абелевой группы с условием минимальности, то всякая собственная подгруппа из $\overline{G}$ почти FC-группа. Без потери общности (Предложение 2.22) можно полагать, что $Z(G) = e$ и $G = \overline{G}$. Так как G простая, то она не почти FC-группа. Таким образом, группа G удовлетворяет условию Теоремы 4.2. По Теореме 4.2 группа G не проста. Противоречие.

Теорема доказана.

4.6 ТЕОРЕМА. *Локально-конечная группа с условием минимальности для не почти абелевых подгрупп либо почти абелева, либо двуступенно разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы и не является почти абелевой. В этом случае в G существует убывающая цепочка подгрупп

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_n > \ldots$$

такая, что группа G_n не почти абелева, а каждая ее собственная подгруппа почти абелева. Не теряя общности, можно считать, что $G = G_n$. Пусть R_1, R_2 нормальные делители из G. В виду Предложения 2.23 $R = гр(R_1, R_2)$ – собственная подгруппа из G и, стало быть, почти FC-группа. Пусть уже R - максимальный нормальный делитель из G. В этом случае $M = M_R(e)$ – FC-подгруппа из R характеристическая в G. Очевидно, в факторгруппе $\overline{G} = G/M$ любой собственный нормальный делитель конечен и G / M не почти FC-группа, а каждая ее собственная подгруппа почти FC-группа. Поскольку $M < Z(G)$, то в силу Предложения 2.23, не утрачивая общности рассуждений, можно считать, что $\overline{G} = G$. Таким образом, в группе G нет бесконечных нормальных делителей. Если группа G обладает конечным нормальным делителем K, то $C_G(K) \Delta G$ и индекс $\left|G : C_G(K)\right|$ конечен. Следовательно, $C_G(K) = G$ и $K < Z(G)$. Таким образом, в группе G любой собственный нормальный делитель двуступенно разрешим. Далее покажем, что любой элемент из G содержится в собственной нормальной подгруппе. Пусть

$g \in G$. Выберем в группе G максимальный нормальный делитель из множества нормальных делителей группы G по отношению к свойству "не содержать элемента g" (Лемма Цорна) [29]. Пусть этим нормальным делителем будет M. Очевидно, в факторгруппе G/M любая собственная подгруппа является почти абелевой (почти FC-группой). Пусть K/M нормальный, делитель из G/M (Теорема 4.2). В силу выбора подгруппы M элемент g лежит в K (собственной нормальной подгруппе). Отсюда следует, что и любое конечное множество элементов из G лежит в двуступенно-разрешимом нормальном делителе группы G. Далее, очевидно, что факторгруппа $G/Z(G)$ - простая группа. По Теореме 4.2 $G/Z(G)$ не проста. Противоречие.

Теорема доказана.

4.7 ТЕОРЕМА (В.В.Беляев) *Локально - конечная группа, все собственные подгруппы которой почти абелевы, либо почти абелева, либо двуступенно разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, группа G, удовлетворяющая условию теоремы, удовлетворяет условию минимальности для не почти абелевых подгрупп, т.е. удовлетворяет условию Теоремы 2.6. По этой теореме группа G либо почти абелева, либо двуступенно разрешима.

Теорема доказана.

4.8 ТЕОРЕМА. *Локально - конечная минимальная не почти абелева группа не проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из Теоремы 4.2.

4.9 ТЕОРЕМА. *Локально - конечная минимальная не почти абелева группа отлична от своего коммутанта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По Теореме 4.8 группа G, удовлетворяющая условию доказываемой теоремы, не проста. Пусть F - максимальная подгруппа G относительно условий $F \Delta G$ и $F^{'''} = e$. Предположим, что $F < G$. Поскольку G не обладает подгруппами конечного индекса, то $G = G/F$ - бесконечна и в ней каждая собственная подгруппа почти абелева. По Теореме 4.8 $\overline{G}$ не проста и существует нормальный делитель N в G такой, что $F < N < G$. По Предложению 2.28 $N^{'''} = e$, что противоречит максимальности F. Таким образом, $F = G$ и $G^{'''} = e$.

Теорема доказана.

4.10 ТЕОРЕМА.(М.И. Каргаполов) *Бесконечная локально - конечная группа, каждая собственная подгруппа которой конечна, -квазициклическая р-группа, (для некоторого простого числа р).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что группа G, удовлетворяющая условию теоремы, удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. По Теореме 4.5 она черниковская. Поскольку группа G бесконечная не имеющая собственных бесконечных подгрупп, и к тому же она локально - конечная группа, несодержащая подгрупп конечного индекса, то она квазициклическая р-подгруппа.

Теорема доказана.

4.11 ТЕОРЕМА (В. П. Шунков) *Бесконечная неабелева локально - конечная группа с условием минимальности для неабелевых подгрупп - черниковская группа.*

4.12 ТЕОРЕМА. *Локально - конечная группа, в которой все собственные подгруппы имеют конечные коммутанты, имеет (либо конечный, либо бесконечный) черниковский коммутант.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы. Предположим, что G - FC-группа, а $|G'| = \infty$. Если в G для любого элемента $G = C(a)$, то G - абелева и $|G'| < \infty$. Таким образом, в группе G существует элемент g такой, что $C(g) < G$. Так как G - FC-группа, то $|G : C(g)| < \infty$. Поскольку коммутант $C(g)$ конечен, то по Предложению 2.27 коммутант группы G так же конечен. Противоречие. Далее предположим, что группа G не является FC-группой. В этом случае по Теореме 4.3 группа G обладает нормальным делителем

H с конечным коммутантом $H^{'}$. Очевидно, $\left|G:C(H^{'})\right|<\infty$ и G – почти FC-группа. Далее по Лемме 2.20 группа G - черниковская типа $G=A\lambda<b>$, где A - квазициклическая группа, $<a>$ - циклическая простого порядка: очевидно, $G^{'}\leq A$. Если $\left|G^{'}\right|<\infty$, то G - FC-группа. Противоречие. Таким образом, $G^{'}=A$ и $G^{'}$ - черниковская группа.

Теорема доказана.

4.12.1 ТЕОРЕМА. *Локально - конечная группа, в которой собственные подгруппы имеют черниковские коммутанты, сама имеет черниковский коммутант.*

4.13 СЛЕДСТВИЕ. (В.В. Беляев [14]) *Локально - конечная группа* G *типа Миллера-Морено не проста, отлична от своего коммутанта и* $G/G^{'}$ *- циклическая р-группа, где G' квазициклическая группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из Теоремы 4.12, так как группа типа Миллера-Морено - это минимальная неквазиабелева группа, т.е. не FC-группа, в которой каждая собственная подгруппа имеет конечный коммутант.

4.14 ТЕОРЕМА. *Локально-конечная группа с черниковским централизатором некоторой инволюции почти локально разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – счетная локально-конечная группа, i –инволюция группы G, $C(i)$ – черниковская группа. Предположим, что группа G не почти локально разрешима. Если централизатор $C(i)$ конечен, то по теореме Шункова (2.2) группа G почти разрешима, что противоречит предположению о группе G.

Рассмотрим на элементах группы G бинарное отношение индексной эквивалентности. Если $M(e)=G$, то $\left|G:C(i)\right|<\infty$, что противоречит предположению о группе G. Таким образом, в группе G, по меньшей мере, два класса индексно эквивалентных элементов. Если в точности два класса, то $(\forall g\in G\setminus e)(g\ {}_i{\equiv}\ i)$ и группа G удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. По теореме Шункова (3.5) группа G – черниковская группа. Противоречие. Таким образом, в G, по меньшей мере, три класса индексно эквивалентных элементов. Очевидно, $i\notin \overset{i\equiv}{(e)}$. Пусть ($\overset{i\equiv}{b}$) – некоторый третий класс индексно эквивалентных элементов $(i\notin \overset{i\equiv}{(b)})$.

Рассмотрим случай, когда $M(i)=G$. Поскольку $(\forall g\in M(i))(g\ {}_i{\equiv:}\ i)$, то полная часть R $C(i)$ будет лежать в любом $C(g)$ и $N(R)=G$. По результату С.Н. Черникова (3.6) $\left|N(R):C(R)\right|<\infty$. В силу Предложения 2.23, не теряя при этом общности рассуждений, можно полагать, что $R\leq Z(G)$.

Если $i\in R$, то G - черниковская группа и, следовательно, почти локально -разрешима. Противоречие. Таким образом, $i\notin R$. Пусть R_1 – максимальная 2-подгруппа из R. Очевидно, $R_1\lhd G$. В факторгруппе G/R_1 условия теоремы выполняются, а силовская 2-подгруппа конечна. Так как R_1 – локально- разрешима, то без потери общности рассуждений (2.23) будем считать, что в G силовские 2-подгруппы конечны. В $C(i)$ существует подгруппа конечного индекса, не содержащая инволюций (3.8). Пусть $B<R$, где B – черниковская полная абелева группа, не содержащая элементов порядка два, конечного индекса в R. Очевидно, $B\lhd G$. Рассмотрим факторгруппу G/B. Как следует из Предложения 2.24 в факторгруппе G/B централизатор $C(iB)$ конечен. По теореме Шункова (2.2) G/B- почти локально разрешима. Отсюда следует, что и G – почти локально разрешима (2.23). Противоречие. Таким образом, модулятор $M(i)$ инволюции i собственная подгруппа группы G.

Пусть $x\in M(i)$ и $[i,x]\neq e$. Очевидно, $i^x\in M(i)=M$ и $i^x\ {}_i{\equiv:}\ i$. По Лемме 1.5 $(\forall g\in G)(i^g\in M)$ и $i^g\ {}_i{\equiv:}\ i$. Пусть A – черниковская полная часть $C(i)$. Так как

$A < C(i^g) = (C(i))^g \cong C(i)$, то $A = A^g$ и $A \lhd G$. Таким образом, группа G обладает черниковским нормальным делителем. Этот случай нами уже рассмотрен. Он приводит к противоречию. Следовательно, $(\forall x \in M)([i,x] = e)$. Отсюда следует, что $M \le C(i) = C$ и $FC(C) = M$. Так как $M \lhd C$, то $(\forall c \in C)\forall x \in M(c^x \in M)$. Отсюда следует, что $(\forall g \in G)(c^g \in M)$ и $K = гр(c^g) \lhd G$. Очевидно, K – черниковская группа. Противоречие. Таким образом, $M \le Z(G)$ и M – бесконечная абелева черниковская группа. Так как $(\forall h \in M)(M(h) \le M)$, то в M все элементы индексно эквивалентны. Если $(\forall x \in G)(M^x \cap M = e)$, то $h^x \in M$ и $K = гр(h^g) \le M < G$. Этот случай ведет к противоречию. Таким образом, $(\forall g \in G \setminus M)(M \cap M^g = e)$ и группа G обладает парой Фробениуса. По предложению 2.19 $G = F\lambda M$. Поскольку M содержит инволюции, то F – группа без элементов порядка два и, следовательно (2.1), F – локально-разрешима. Отсюда G почти локально-разрешима (2.23). Противоречие.

Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научных исследований Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2013 год (договор № 92 от 04.02.2013 г. Астана) по приоритету «Интеллектуальный потенциал страны», по подприоритету «Фундаментальные исследования в области естественных наук», по теме «Разработка теории сравнений в группах».

Литература:

1. Черников С.Н. Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук. 1959. – Т. 14. - В. 5(89). – С.45–96.
2. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.Н. Основы теории групп. – М.: Наука. – 1982. – 384 с.
3. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука. – 1980. – 384 с.
4. Черников С.Н. О проблеме Шмидта // Укр. матем. ж. – 1971. – Т. 23. – № 5. – С. 598 – 603.
5. Каргаполов М.И. О проблеме О.Ю. Шмидта // Сиб. матем. ж. – 1963. – № 4. – С. 233–235.
6. Шунков В. П. О проблеме минимальности для локально-конечных групп // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9. – № 2. – С. 220–248.
7. Шунков В.П. О локально-конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9. – № 5. – С. 579–615.
8. Kegel O.H., Werhfritz B.A. Lokally finite groups. –Amsterdam-London. – 1973. – 210 p.
9. Беляев В.В. Локально-конечные группы, все собственные подгруппы которых почти абелевы // Сибирский матем. ж. – 1983. – №3. – С.11–17.
10. Беляев В.В. Локально-конечные группы с черниковскими р-подгруппами // Алгебра и логика. – 1981. – Т. 20. – № 6. – С. 605–619.
11. Павлюк И.И. Шунков В.П. О локально-конечных группах с условием min – p по всем p // Тезисы докладов VII Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Красноярск, 1980. – С. 84–85.
12. Черников Н.С. О бесконечных простых локально-конечных группах // Препринт АН УССР 37. – Киев, 1982. – № 82. – 20 с.
13. Bruno B. On Groups with “Abelin by Finite ” proper Subgroups // Bolletino U.M.I. – 1984. – № 6. 3–13. – P.197–225.
14. Беляев В.В. Группы типа Миллера-Морено // Сибирский матем. ж. – 1978. – № 3. – С. 509–514.
15. Шунков В.П. Локально-конечные группы конечного ранга // Алгебра и логика. – 1971. – Т.10. – № 2. – С.199–225.
16. Павлюк И.И. О сопряженно бипримитивно конечных группах с индексно - сравнимыми подгруппами // В кн. «Исследования по алгебраической теории чисел и конструктивной алгебре». – Алма-Ата, 1988. – С. 39–47.
17. Павлюк И.И. О бинарно конечных группах с черниковскими силовскими подгруппами // В кн. VIII Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. – Киев, 1982. – С. 92.

18. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
19. Feit W., Tompson J.G. Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. – 1963. – V. 13. – № 3. – P. 775–1029.
20. Шунков В.П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. – 1972. – Т. 11. – № 4. – С.470–493.
21. Беляев В.В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. – 1987. – Т. 26. – № 5. – С.531–535.
22. Шунков В.П. M_p-группы. – М.: Наука. – 1990. – 150 с.
23. Горчаков Ю.М. Группы с конечными классами сопряженных элементов. – М.: Наука. – 1978. – 120 с.
24. Шунков В.П. Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп // В книге «Алгебра. Матрицы и матричные группы». – Красноярск, 1970. – С.3–54.
25. Шунков В. П. Об одном классе *p*-групп // Алгебра и логика. – 1970. – № 4. – С. 484–496.

Резюме

В работе приведено новое решение проблемы Черникова в классе локально-конечных групп. Установлено, что локально-конечная группа с условием минимальности для подгрупп является черниковской. Дано полное описание локально-конечных минимальных не FC-групп. Доказана почтилокальная разрешимость локально-конечной группы с черниковским централизатором инволюции.

Ключевые слова: локально-конечная группа, индексная эквивалентность, условие минимальности, черниковская группа, FC-группа.

Түйіндеме

Жұмыста жергілікті-шекті топтар классында Черников мәселесінің жаңа шешімі келтірілген. Ішкі топтар үшін минималдық шарты бар жергілікті-шекті топ Черников тобы болып табылатыны анықталды. Жергілікті-шекті минималды FC емес топтардың толық сипаттамасы берілді. Инволюцияның Черников орталаушысы бар жергілікті-шекті топтың жақын жергілікті шешілімі дәлелденді.

Кілт сөздер: жергілікті-шекті топ, индекс эквиваленттігі, минималдық шарты, Черников тобы, FC-топ.

Summary

In this work a new decision of Chernikov problem in a class of the locally-finite groups is resulted. The locally-finite group with minimality condition for subgroups is group of Chernikov's is established. The complete description locally-finale minimum not FC-groups is given. Almost local solvability of locally-finite group with of Chernikov's centre lized involution is proved.

Key words: the locally-finite group, index equivalence, minimality condition, group of Chernikov's, FC-groups.

УДК 512.544.27

О СВОЙСТВАХ ЦЕНТРАЛЬНОГО ЯДРА ГРУППЫ

Ин.И. ПАВЛЮК, кандидат физико-математических наук, доцент
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова,
Республика Казахстан

В алгебре существует ряд систем аксиом выделяющих абстрактный объект – группу G. Среди аксиом, характеризующих основные свойства рассматриваемой бинарной операции на множестве элементов G, имеется аксиома, гарантирующая разрешимость уравнений $ax=b, yx=b$ на элементах G, т.е. гарантируется истинность высказывательной формы для элементов из G

$$((\forall a,b \in G)(R(ax=b)\neq\varnothing \wedge R(ya=b)\neq\varnothing)).$$

Такой подход следует исторической традиции развития алгебры, связанной с решениями уравнений. В приведенных математических выражениях использовано отношение эквивалентности элементов группы G. По этой причине выражение типа $ax=b$ в математике именуется уравнениями. На элементах алгебраических систем задаются и другие отношения эквивалентности, которые обобщают отношение равенства. Например, отношение $''_1\equiv''$ центральной эквивалентности [1], отношение $''_c\equiv''$ сопряженности [2]. Отношение сопряженности введено в науку Г. Фробениусом и достаточно продуктивно используется в теории групп. Более глубокое проникновение и постижение свойств алгебраических объектов возможно посредством сравнений свойств групповых отношений и во взаимодействии их в приложениях. Реализация этой идеи – глобальная задача изучения групп. В предлагаемой работе доминирует следующая идея: рассмотреть решения уравнения $xa=b$ лишь на узком классе эквивалентности элементов группы, классе центрально-эквивалентных элементов. Множество решений такого уравнения названо центральным ядром элемента a в группе [3].

Определение 1. Центральным ядром элемента a группы G в группе G назовем множество $Z(a)$ элементов $h\in G$ группы G, удовлетворяющих групповому равенству $ha=b$, где a и b – элементы класса $\overset{1\equiv}{a}$ центрально-эквивалентных элементов, т.е. центральное ядро элемента a в группе G – это множество решений $\{h\}=R(ha=b)$ сравнения $ha=b$, где $a,b\in\overset{1\equiv}{a}$:

$$Z(a)=\left\{h/ha=b; a,b\in\overset{1\equiv}{a}\right\}.$$

Лемма 1. В группе G центральные ядра центрально-эквивалентных элементов равны между собой, т.е. для любых элементов a и b из класса $\overset{1\equiv}{a}$ верна формула

$$(\forall a,b\in G)((a\,{}_1\!\equiv b)\Leftrightarrow(Z(a)=Z(b))).$$

Доказательство, очевидно, следует из определения 1.

Рассмотрим предварительные результаты исследований, которые базируются на понятии центрального модулятора.

Определение 2. Множество ${}_{1\equiv}M_G(a)$ элементов x группы G, удовлетворяющих сравнению $x\,{}_1\!\equiv: a$ $(a\in G)$, назовем центральным модулятором элемента a в группе G (по отношению $''_1\equiv:''$ центральной сравнимости), т.е. центральный модулятор ${}_{1\equiv}M_G(a)$ элемента a в группе G задается формулой

$$ {}_{1\equiv}M_G(a) \overset{def}{=} \{x / x\ {}_1\equiv\!:\ a\}. $$

Лемма 2 ${}_{1\equiv}M_G(a)$ – подгруппа группы G.

Доказательство. Очевидно, $|C(a):C(a)\cap G| = 1$. Так как $C(e) = G$, где e - нейтральный элемент группы G, то отсюда следует, что $e\ {}_1\equiv\!:\ a$ и $e \in {}_{1\equiv}M_G(a)$. Далее, очевидно, также, что $(\forall g \in G)(C(g)\ {:}_1\equiv_1{:}\ C(g^{-1}))$. Отсюда следует, что $(\forall g \in {}_{1\equiv}M_G(a))(g^{-1} \in {}_{1\equiv}M_G(a))$. Пусть теперь $x\ {}_1\equiv\!:\ a$ и $y\ {}_1\equiv\!:\ a$, где $x, y \in G$. Докажем, что $x \cdot y\ {}_1\equiv\!:\ a$. Действительно, так как $C(x)\ {}_1\equiv\!:\ C(a)$ и $C(y)\ {}_1\equiv\!:\ C(a)$,а $C(x) \cap C(y) \le C(xy)$, что очевидно. Из сравнений $C(x)\ {}_1\equiv\!:\ C(a)$, $C(y)\ {}_1\equiv\!:\ C(a)$ следует, что $C(a) \le C(y) \cap C(x)$. Отсюда очевидно, $C(a) \le C(xy)$ и $|C(a):C(a)\cap C(xy)| = 1$. Таким образом, $x \cdot y \in {}_{1\equiv}M_G(a)$.

Лемма доказана.

Определение 3 Элементы a , b группы G центрально эквивалентны в группе G ($a\ {}_1\equiv b$) тогда и только тогда, когда $C(a)\ {}_1\equiv\!:\ C(b)$ и $C(b)\ {}_1\equiv\!:\ C(a)$, т.е. отношение "${}_1\equiv$" центральной эквивалентности элементов a и b в группе G определяется формулой

$$ (\forall a, b \in G)((a\ {}_1\equiv b) \overset{def}{\Leftrightarrow} ((C(a)\ {}_1\equiv\!:\ C(b))\ \&\ (C(b)\ {}_1\equiv\!:\ C(a)))). $$

Лемма 3. В группе G верна формула

$$ (\forall a, b \in G)((a\ {}_1\equiv b) \Leftrightarrow (C(a) = C(b)) \Leftrightarrow ({}_{1\equiv}M(a) = {}_{1\equiv}M(b)). \qquad (1) $$

Доказательство. Необходимость. Так как $a\ {}_1\equiv b$, то $C(a) \le C(b)$ и $C(b) \le C(a)$. Отсюда, очевидно, $C(b) = C(a)$. Теперь нетрудно видеть из определения 2, что ${}_{1\equiv}M(a) = {}_{1\equiv}M(b)$.

Достаточность. Пусть ${}_{1\equiv}M(a) = {}_{1\equiv}M(b)$. Тогда $(\forall x \in {}_{1\equiv}M(a))(x\ {}_1\equiv\!:\ b)$ и $a\ {}_1\equiv\!:\ b$. Аналогично, $(\forall y \in {}_{1\equiv}M(b))$ $(y\ {}_1\equiv\!:\ a)$. Таким образом, $b\ {}_1\equiv\!:\ a$. Сравнения $a\ {}_1\equiv\!:\ b$ и $b\ {}_1\equiv\!:\ a$ имплицируют $a\ {}_1\equiv b$. Если же $C(b) = C(a)$, то, очевидно, ${}_{1\equiv}M(a) = {}_{1\equiv}M(b)$ и, как установлено, $a\ {}_1\equiv b$.

Лемма доказана.

Следствие 1. Центрально эквивалентные элементы группы перестановочны.

Доказательство вытекает из формулы (1), т.к. $a \in C(b)$.

Лемма 4 Бинарное отношение "${}_1\equiv$", заданное на элементах группы G, является отношением эквивалентности.

Доказательство. Очевидно, $(\forall a \in G)(a\ {}_1\equiv a)$ и отношение "${}_1\equiv$" рефлексивно. Так как $(a\ {}_1\equiv b) \Leftrightarrow (C(a) = C(b)) \Leftrightarrow (C(b) = C(a))$ (формула (1)), то $b\ {}_1\equiv a$ и отношение "${}_1\equiv$" симметрично. Далее пусть $a\ {}_1\equiv b$ и $b\ {}_1\equiv c$. Поскольку $C(b) = C(c)$, а $C(a) = C(b)$, то $C(a) = C(c)$ и $a\ {}_1\equiv c$ (формула (1)). Таким образом, отношение "${}_1\equiv$" транзитивно.

Лемма доказана.

Таким образом, группа G разбивается на непересекающиеся классы центрально эквивалентных элементов.

Теорема 1. Класс центрально эквивалентных элементов группы G, содержащий ее нейтральный элемент e, является нормальным делителем G, совпадающим с центром $Z(G)$ группы G.

Доказательство. Пусть $\overset{1\equiv}{a}$ - класс центрально эквивалентных элементов группы G такой, что $e\in \overset{1\equiv}{a}$. Очевидно, $a\,{}_1{\equiv}\, e$, $C(a)=C(e)=G$ и $(\forall g\in G)({}_{1\equiv}M(a)\le {}_{1\equiv}M(g))$. Поскольку ${}_{1\equiv}M(a)$ - подгруппа (лемма 2), то $a\in {}_{1\equiv}M(a)$ и $\overset{1\equiv}{a}\subseteq {}_{1\equiv}M(a)\le {}_{1\equiv}M(g)$. Отсюда следует формула

$$(\forall g\in G)\left(\overset{1\equiv}{a}\subseteq \bigcap_{g\in G} {}_{1\equiv}M(g)=Z\right). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что Z – подгруппа G. Пусть $x\in Z$. Так как g – произвольный элемент группы G, то при $g=e$ имеем $Z\le {}_{1\equiv}M(e)$. Далее, поскольку $e\in \overset{1\equiv}{a}$, а ${}_{1\equiv}M(e)={}_{1\equiv}M(a)$ (формула (1)), то $\left(\forall x\in {}_{1\equiv}M(a)={}_{1\equiv}M(e)\right)$ $(a\,{}_1{\equiv}\, e\,{}_1{\equiv}\, x)$. Таким образом, $(\forall x\in Z)(\, x\in \overset{1\equiv}{a})$ и $Z\le \overset{1\equiv}{a}$. По формуле (2) $\overset{1\equiv}{a}\subseteq Z$. Отсюда следует, что $Z=\overset{1\equiv}{a}$. Таким образом, установлено, что $\overset{1\equiv}{a}$ – подгруппа группы G. Так как $(\forall g\in G)\left({}_{1\equiv}M(e)\le {}_{1\equiv}M(g)\right)$, то $Z\le {}_{1\equiv}M(e)$. Далее, поскольку $\overset{1\equiv}{a}\le {}_{1\equiv}M(e)$, то $(\forall a\in \overset{1\equiv}{a})$ $\left(|G:C(a)|=1\right)$. Так как $|C(a)|=|C(a^g)|$, то отсюда следует, что

$$(\forall g\in G)\left(a^g\in {}_{1\equiv}M(e)=\overset{1\equiv}{a}=\bigcap_{g\in G} {}_{1\equiv}M(g)=Z=Z(G)\right). \tag{3}$$

Теорема доказана.

Следствие 2. Для произвольной группы G справедлива формула

$$(\forall g\in G)\left({}_{1\equiv}M(e)=Z(G)=\bigcap_{g\in G} {}_{1\equiv}M(g)=\bigcap_{g\in G} C(g)\right).$$

Доказательство следует из формулы (3) .

Лемма 5. Элементы смежного класса группы G по ее центру $Z(G)$ центрально эквивалентны, т.е.

$$(\forall a,b\in G)\big((aZ(G)=bZ(G))\Rightarrow(a\,{}_1{\equiv}\, b)\big).$$

Доказательство. Пусть $aZ(G)=bZ(G)$. Тогда $a^{-1}b\in Z(G)$. Так как $(\forall g\in G)$ $(Z(G)\le {}_{1\equiv}M(g))$, то $a^{-1}b\in {}_{1\equiv}M(a)$. Поскольку ${}_{1\equiv}M(a)$ – подгруппа G (лемма 2), то $b\in {}_{1\equiv}M(a)$ и $b\,{}_1{\equiv}{:}\, a$. Аналогично, $a^{-1}b\in {}_{1\equiv}M(b)$ и $a\in {}_{1\equiv}M(b)$, $a\,{}_1{\equiv}{:}\, b$. Из двух сравнений $b\,{}_1{\equiv}{:}\, a$ и $a\,{}_1{\equiv}{:}\, b$ следует, что $a\,{}_1{\equiv}\, b$ (формула (1)), т.е. элементы одного смежного класса группы G по ее центру центрально эквивалентны.

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $\overset{1\equiv}{a}$ класс центрально эквивалентных элементов группы G, $Z(G)$ – центр группы G. Тогда $L=\overset{1\equiv}{a}\cup Z(G)$ – подгруппа группы G.

Доказательство. Поскольку $Z(G)$ – группа, то достаточно рассмотреть случай, когда $\overset{1\equiv}{a}\cap Z(G)=\varnothing$ и, очевидно, что $a\ne e$. Докажем, что $L=Z(C(a))$, где $Z(C(a))$ – центр централизатора $C(a)$.

Рассмотрим модулятор ${}_{1\equiv}M(a)=\{x/x\,{}_1\equiv: a\}$. Так как $|C(a):C(a)\cap C(x)|=1$, то $C(a)\le C(x)$. Таким образом, $(\forall x\in{}_{1\equiv}M(a))\ (x\in Z(C(a)))$ и ${}_{1\equiv}M(a)\le Z(C(a))$. Пусть теперь $x\in Z(C(a))$. Отсюда следует, что $C(a)\le C(x)$ и $x\,{}_1\equiv: a$, а также $Z(C(a))\le{}_{1\equiv}M(a)$. Таким образом, ${}_{1\equiv}M(a)=Z(C(a))$.

Далее докажем, что в произвольной группе G верно равенство

$$(\forall a\in G)\left(\overset{1\equiv}{a}\bigcup Z(G)={}_{1\equiv}M(a)=Z(C(a))\right). \tag{4}$$

Пусть $x\in L$. Если $x\in Z(G)$, то $x\in Z(C(a))$. Пусть теперь $x\in\overset{1\equiv}{a}$. Тогда $x\,{}_1\equiv: a$ и $x\in{}_{1\equiv}M(a)=Z(C(a))$. Таким образом, в обоих случаях $L\subseteq Z(C(a))$. Обратно, пусть $x\in Z(C(a))$. Если $x\in\overset{1\equiv}{a}$, то $x\in L$ и $Z(C(a))\le L$. Если же $x\in Z(G)$, то также $x\in L$ и $Z(C(a))\le L$. Из полученных включений следует, что $L\subseteq Z(C(a))$. Пусть теперь, $x=y\cdot z$ где $y\in\overset{1\equiv}{a},\ az\in Z(G)$. Так как $\overset{1\equiv}{a}Z(G)\le Z(C(a))$, то $x=yz\in Z(C(a))$. Очевидно, $y\,{}_1\equiv: a$ и $z\,{}_1\equiv: a$. Так как $C(y)\bigcap C(z)\le C(zy)$ и $C(y)\le C(z)$, то $C(y)\le C(zy)$ и $zy\,{}_1\equiv: y$. Поскольку $y\,{}_1\equiv a$, то $zy\,{}_1\equiv: a$ и $zy\in{}_{1\equiv}M(a)$. Но ${}_{1\equiv}M(a)=Z(C(a))$. Очевидно, $C(y)=C(zy)$ и $y\,{}_1\equiv zy$. Тогда $zy\in\overset{1\equiv}{a}$. Если $zy\in Z(G)$, то $y\in Z(G)$ и все доказано. Поэтому $zy\in L\setminus Z(G)$. Тогда $zy\in\overset{1\equiv}{a}$. Таким образом, $x\in L$ и $Z(C(a))\le L$. И в этом случае $Z(C(a))=L$.

Теорема доказана.

Теперь перейдем к рассмотрению свойств центрального ядра группы.

Теорема 3. Группа G является абелевой тогда и только тогда, когда $(\forall g\in G)(Z(g)=G)$, т.е. $(\forall a,b,g\in G)((Z(g)=G)\Leftrightarrow(ab=ba))$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку в абелевой группе G $(\forall g\in G)(g\in\overset{1\equiv}{e})$ и $\overset{1\equiv}{e}=G$ (теорема 1), то из $(\forall g\in G)(h\cdot e=g)$ следует, что $Z(e)=G$. По лемме 1.1.24 $\left(\forall g\in\overset{1\equiv}{e}\right)(Z(g)=Z(e)=G)$.

Достаточность. Пусть $(\forall g\in G)(Z(g)=G)$. Тогда $(\forall a,b\in G)(Z(a)=Z(b))$ (лемма 1) Отсюда следует, что $(\forall a,b\in G)(a\,{}_1\equiv b)$ и $(\forall a,b\in G)\left(\forall a,b\in\overset{1\equiv}{e}\right)(ab=ba)$ (следствие 1).

Теорема доказана.

Теорема 4. В произвольной группе G центральное ядро нейтрального элемента равно центру группы, т.е. $Z(e)=Z(G)$.

Доказательство. По теореме 1 класс $\overset{1\equiv}{e}=Z(G)$, а по теореме 2 центральное ядро нейтрального элемента в центре группы G равно центру, т.е. $Z_{Z(G)}(e)=Z(G)$. Поскольку $Z(G)$ – подгруппа группы G и $\overset{1\equiv}{e}=Z(G)$, то $Z_{Z(G)}(e)=Z(e)=Z(G)$.

Теорема доказана.

Теорема 5. В нетривиальной группе G существует такой элемент a, центральное ядро $Z(a)$ которого нетривиально.

Доказательство. Предположим, что $(\forall a \in G)(Z(a) = e)$. Пусть $x, y \in \overset{1\equiv}{a}$, тогда $(\forall h \in Z(a))(hx = y)$ и $x = y$. Таким образом, $(\forall a \in G)(|\overset{1\equiv}{a}| = 1)$. Докажем, что $a^2 = e$. Предположим, что группа G содержит элемент b такой, что $b^2 \neq e$. Тогда $b \neq b^{-1}$. Так как $b_1 \equiv b^{-1}$, то класс $|\overset{1\equiv}{b}| \geq 2$. Отсюда и из равенства $hb = b^{-1}$ следует, что $b^2 \in Z(b)$ (лемма 6). Но $b^2 \neq e$. Противоречие. Таким образом, $(\forall a \in G)(a^2 = e)$. Очевидно, $(\forall a, b \in G)((ab)^2 = e)$, $a = a^{-1}$, $b = b^{-1}$, $ab = ba$ и группа G абелева. Но тогда $Z(a) = G$ и $|G| = 1$. Противоречие.

Теорема доказана.

Следствие 3. В нетривиальной группе G существует элемент *a*, класс $\overset{1\equiv}{a}$ центрально эквивалентных элементов которого имеет мощность $|\overset{1\equiv}{a}| > 1$.

Доказательство. Если предположить, что $(\forall a \in G \setminus e)$ мощность $|\overset{1\equiv}{a}| = 1$, то любой элемент группы G будет инволюцией, а сама группа G будет абелевой (см. доказательство теоремы 5). Если же $G = гр(a) = \{e, a\}$ циклическая, то $|\overset{1\equiv}{a}| = 2$. Противоречие. Отсюда следует, что $G = e$. Противоречие.

Следствие доказано.

Лемма 6. $Z(a)$ – подгруппа группы $_{1\equiv}M(a)$.

Доказательство. Поскольку $\overset{1\equiv}{a} \subset {}_{1\equiv}M(a)$, а $_{1\equiv}M(a)$ – подгруппа (лемма 2), то $\left(\forall x, y \in \overset{1\equiv}{a}\right)\left(h = yx^{-1} \in {}_{1\equiv}M(a)\right)$ и $Z(a) \subset {}_{1\equiv}M(a)$. Если же $\left(\forall x, y \in \overset{1\equiv}{a}\right)(h_1 x = y) \,\&\, (h_2 y = x)$, то $h_1 = h_2^{-1} \in Z(a)$. Очевидно также, то что $x \,{}_1\!\equiv x$ и $hx = x$. Отсюда $e \in Z(a)$.

Пусть $\left(\forall x, y, z \in \overset{1\equiv}{a}\right)(h_1 x = y,\ h_2 y = z,\ h_3 x = z)$. Тогда $h_2 h_1 x = z$ и $h_2 h_1 = h_3 \in Z(a)$. Так как в группе G x и z фиксированные элементы, а решения уравнения $(h_2 h_1)x = z$ относительно $(h_2 h_1)$ в G единственно, отсюда имеем $h_2 h_1 \in Z(a)$. Таким образом, $Z(a)$ – подгруппа $_{1\equiv}M(a)$.

Лемма доказана.

Лемма 7. В группе G элемент $a \in Z(a)$ тогда и только тогда, когда $Z(a) = {}_{1\equiv}M(a)$, т.е.

$$(\forall a \in G)\big((a \in Z(a)) \Leftrightarrow (Z(a) = {}_{1\equiv}M(a))\big).$$

Доказательство. Необходимость. Так как $\overset{1\equiv}{a} \in {}_{1\equiv}M(a)$, то $Z(a) \leq {}_{1\equiv}M(a)$ (лемма 6), поскольку $_{1\equiv}M(a)$ – абелева группа (формула (4)), то по теореме 3 $Z(a) = {}_{1\equiv}M(a)$.

Достаточность. Пусть теперь $Z(a) = {}_{1\equiv}M(a)$. Так как $a \in {}_{1\equiv}M(a)$ (лемма 2), то $a \in Z(a)$.

Лемма доказана.

Теорема 6. Пусть G – периодическая группа без инволюций. Тогда

$$\left(\forall a \in G\right)\left(Z(a) =_{1\equiv} M(a)\right).$$

Доказательство. Предположим, что $\exists a \in G$ такой, что $Z(a) \neq_{1\equiv} M(a)$. В силу сделанных предположений и леммы 1.1.30 $a \notin Z(a)$. Так как $a^{2k+1} = e = a^{2k} \cdot a \in Z(a)$, а $a_{1}\equiv a^{-1}$, то $ha^{-1} = a$ и $h = a^{2} \in Z(a)$. Отсюда следует, что $a^{2k} \in Z(a)$. Так как $Z(a)$ – группа (лемма 6), то $a \in Z(a)$. Противоречие.

Теорема доказана.

Лемма 8. Если элемент a группы G имеет конечный нечетный порядок, то $a \in Z(a)$.

Доказательство. Так как $a_{1}\equiv a^{-1}$, то в $Z(a)$ существует элемент h такой, что $ha = a^{-1}$, $h = a^{-2}$ и $a^{2} = h^{-1} \in Z(a)$ (лемма 6). Отсюда следует, что $a^{2k} \in Z(a)$. Очевидно, $a^{2k+1} = a^{2k} \cdot a \in Z(a)$. Поскольку $a^{2k} \in Z(a)$, то и $a \in Z(a)$.

Лемма доказана.

Теорема 7. В периодической группе без инволюций

$$\left(\forall x \in \overset{1\equiv}{a}\right)\left(\overset{1\equiv}{a} \subset Z(a) = Z(x)\right).$$

Доказательство следует из леммы 1.1.24 и леммы 1.1.32.

Лемма 9. В произвольной группе G без инволюций $\left(\forall a \in G \setminus e\right)\ (Z(a) \neq e)$.

Доказательство. Предположим, что в группе G существует элемент $a \in G \setminus e$ такой, что $Z(a) = e$. Тогда для любых $x, y \in \overset{1\equiv}{a}$ $hx = y$. Отсюда следует, что $h = yx^{-1} = e$, $y = x$. Таким образом, $|\overset{1\equiv}{a}| = 1$, но $a^{-1} \in \overset{1\equiv}{a}$ и $a^{2} = e$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 10. Для любого нецентрального элемента g группы G центральное ядро $Z(g)$ группы G содержит ее центр $Z(G)$, т.е. в группе G верна формула

$$(\forall g \in G \setminus Z(G))(Z(G) < Z(g)).$$

Доказательство. Если $Z(G) = e$, то утверждение леммы верно, поскольку $Z(g)$ - группа (лемма 6). Пусть $Z(G) \neq e$. По лемме 5 элементы смежного класса $gZ(G)$ группы G по ее центру центрально эквивалентны, т.е. $\left(\forall z \in Z(G)\right)\left(g\ {}_{1}\equiv gz\right)$. Отсюда $g(gz)^{-1} \in R(hg = gz) = Z(g)$ и $g(gz)^{-1} \in Z(g)$. Следовательно, $z \in Z(g)$ и $Z(G) < Z(g)$.

Лемма доказана.

Лемма 11. Пересечение центральных ядер нецентральных элементов группы G есть центр этой группы, т.е. верна формула

$$\bigcap_{g \in G \setminus Z(G)} Z(g) = Z(G) = Z.$$

Доказательство. По лемме 10 $Z(G) < Z$. Предположим, что группа Z обладает элементом $h \in Z \setminus Z(G)$. Тогда $\forall x \in G$ существует $y \in \overset{1\equiv}{x}$ такой, что $hx = y$. По формуле

(4) $Z \le_{1\equiv} M(x)$ и ${}_{1\equiv}M(x) = Z(C(a)) = \overset{1\equiv}{x} \cup Z(G)$. Таким образом, $x, y, h \in Z(C(x))$ и $x \in C(h)$. Поскольку х – произвольный элемент G, то $G = C(h)$ и $h \in Z(G)$. Противоречие.

Лемма доказана.

Теорема 8. Пересечение центральных ядер элементов группы G равно ее центру, т.е. для произвольной группы G верна формула

$$\bigcap_{g \in G} Z(g) = Z(G).$$

Доказательство. По теореме 1 $\overset{1\equiv}{e} = Z(G)$. По теореме 4 $Z(e) = Z(G)$. Теперь ввиду леммы 11

$$\bigcap_{g \in G \setminus Z(G)} Z(g) \cap \bigcap_{g \in Z(G)} Z(g) = Z(G) = \bigcap_{g \in G} Z(g).$$

Теорема доказана.

Предложение 1. В периодической группе G без инволюций $(\forall a \in G \setminus e)(\overset{1\equiv}{a} \not\subset \overset{c\equiv}{a})$, где $\overset{c\equiv}{a}$ – класс сопряженных с a элементов.

Доказательство. Предположим, что в группе G класс центрально эквивалентных элементов $\overset{1\equiv}{a} \subset \overset{c\equiv}{a}$. Тогда $a^{-1} \in \overset{c\equiv}{a}$ и $\exists x \in G$ такой, что $a^x = a^{-1}$, $a = (a^{-1})^{x^{-1}}$. $a^{x^{-1}} = a^{-1}$ и $a^{x^{-1}} = a^x$. Отсюда $a^{x^2} = a$ и $x^2 \in C(a)$. Но $x^{2k+1} = e$ и $x^{2k} \cdot x \in C(a)$. Так как $x^{2k} \in C(a)$, то и $x \in C(a)$. Противоречие.

Предложение доказано.

Предложение 2. $(\forall a \in G)(\overset{c\equiv}{a} \subset \overset{1\equiv}{a}) \Leftrightarrow (C(a) \triangleleft G))$.

Доказательство. Необходимость. Так как $\overset{c\equiv}{a} \subset \overset{1\equiv}{a}$, то $\overset{c\equiv}{a} {}_1\!\equiv a$, $(C(a))^G = C(a)$ и $C(a) \triangleleft G$ ($C(a)$ является нормальным делителем в G).

Достаточность. Из $C(a) \triangleleft G$ следует, что $(C(a))^G = C(a)$ и $a^G {}_1\!\equiv a$. Отсюда очевидно $\overset{c\equiv}{a} \subset \overset{1\equiv}{a}$.

Предложение доказано.

Следствие 4. $|G : C(a)| = 2 \Rightarrow C(a) \triangleleft G$ и $\overset{c\equiv}{a} \subset \overset{1\equiv}{a}$.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $(C(a))^g$ группы G. Так как $G = C(a) \cup gC(a)$, где g – произвольный элемент из $G \setminus e$, и только $C(a)$ – подгруппа из этого разложения, то $(C(a))^g = C(a)$. Отсюда $C(a) \triangleleft G$ и по предложению 2 $\overset{c\equiv}{a} \subset \overset{1\equiv}{a}$

Следствие доказано.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научных исследований Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2013 год (договор № 92 от 04.02.2013 г. Астана) по приоритету «Интеллектуальный потенциал страны», по подприоритету «Фундаментальные исследования в области естественных наук», по теме «Разработка теории сравнений в группах».

Литература:

1. Павлюк Ин. И. О единично сопряженных элементах группы // Вестник ПГУ им. С. Торайгырова. Серия физ.-мат. – 2004. – № 4. – С. 50–53.

2. Павлюк Ин. И., Павлюк И. И. К теории сравнений в группах // Вестник ПГУ им. С. Торайгырова. Серия физ.-мат. – 2004. – № 3. – С. 34–49.

3. Павлюк Ин. И. О центральном ядре группы // Материалы международной конференции «Мальцевские чтения». – Новосибирск: Институт математики им. Л. С. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, 2011. – С. 49–50.

Резюме

В работе определено понятие центрального ядра элемента группы. Множество решений сравнений двух любых элементов из класса центрально-эквивалентных элементов группы является центральным ядром группы. Установлено, что пересечение ядер центральных элементов группы есть подгруппа. Дано описание свойств центрального ядра элементов группы.

Ключевые слова: группа, класс центрально-эквивалентных элементов, центральный модулятор элемента, центральное ядро группы.

Түйіндеме

Жұмыста топ элементінің орталық ядро ұғымы анықталған. Топтың орталық- эквивалентті элементтер классындағы екі кез келген элементтің салыстыруларының шешімдер жиыны орталық ядро болып табылады. Топтың орталық элементтерінің ядроларының қиылысуы ішкі топ болатыны анықталды. Топ элементтерінің орталық ядросының қасиеттеріне сипаттама берілді.

Кілт сөздер: топ, орталық-эквивалентті элементтер классы, элементтің орталық модуляторы, орталық ядро.

Summary

In this work the concept of the central core of group is defined. The set of comparison solutions of two any elements from centrally-equivalent elements class is the group central core of the group. It is established that the conflux of the central elements cores is a subgroup.

Key words: group, class of centrally-equivalent elements, central modulator of element, central core of group.

УДК 517.43

ДВУМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА

Б.Т. САПАРБАЕВА, аспирант

Новосибирский государственный университет, Россия

В этой работе рассматриваются конечнозонные на одном уровне энергиидвумерные операторы Шредингерав электромагнитном поле вида

$$H = \left(i\frac{\partial}{\partial x} - A_1\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} - A_2\right)^2 + u(x, y).$$

Приведем некоторые основные определения связанные с конечнозонными операторами (см. [1]).

Определение 1. *Блоховским решением*ψ уравнения $H\psi = E\psi$ называется такое решение, что

$$\psi(x + T_1, y) = e^{ip_1T_1}\psi(x, y),$$

$$\psi(x, y+T_2) = e^{ip_2T_2}\psi(x,y),$$
где числа p_1, p_2называются *квазиимпульсами*(мы предполагаем что $\psi(0{,}0) = 1$).

Дискретный энергетический спектр $\mathcal{E}_n(p_1, p_2)$ такой, что $H\psi = \mathcal{E}_n(p_1,p_2)\psi$, определен для всех вещественных p_1, p_2.

Определение 2. Будем говорить, что Hобладает *хорошиманалитическимсвойством*, если
1) все ветвления $\mathcal{E}_n$ распространяются на комплексные значения квазиимпульсов p_1, p_2;
2) для всех комплексных (p_1, p_2) существует блоховская собственная функция как мероморфная функция от (p_1, p_2) на всех nлистах;
3) полный граф многовалентных функций $\mathcal{E}_n(p_1,p_2)$ формирует комплексное многообразие с действующей на нем группой перемещений $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

$$p_1 \to p_1 + \frac{2n\pi}{T_1},$$
$$p_2 \to p_2 + \frac{2n\pi}{T_2}.$$

Определение 3. Оператор Hназывается *конечнозонным* если род поверхности$\Gamma(E) = \mathcal{E}^{-1}(E)$конечен. Тогда на расслоении$\Gamma(E)$, $E \neq \infty$имеются в точности две бесконечные точки P_1, P_2, в окрестностях которых для блоховских функций имеется асимптотика

$$\psi = e^{k_1(x+iy)}\left(1 + \frac{c_1(x,y)}{k_1} + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right)\right),$$
$$\psi = e^{k_2(x-iy)}\left(c(x,y) + \frac{c_2(x,y)}{k_2} + O\left(\frac{1}{k_2^2}\right)\right),$$

где ${k_1}^{-1}, {k_2}^{-1}$ --- локальные параметры в окрестностях точек P_1, P_2. Поверхность $\Gamma(E)$ называется спектральной кривой оператора H.

Вне точек P_1, P_2блоховская собственная функция ψ мероморфна и имеет gполюсов $\gamma_1, \dots, \gamma_g$. При помощи метода обратной задачи рассеяния операторH восстановлен по спектральной кривой$\Gamma(E)$и набору $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ в работе[1]. Далее, оператор Hрассматривается в комплексных координатах:

$$H = \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}} + \nu(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial\bar{z}} + u(z,\bar{z}).$$

Верны следующие формулы:

$$\nu(z,\bar{z}) = A_{\bar{z}} = A_1 + iA_2 = -\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\theta(U_1z + U_2\bar{z} + V_1 + W)}{\theta(U_1z + U_2\bar{z} + V_2 + W)};$$
$$A_z = A_1 - iA_2 = 0;$$
$$u(z,\bar{z}) = \frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln\theta(U_1z + U_2\bar{z} + W),$$

где θ--- тэта-функция римана на многообразия Якоби спектральной кривой$\Gamma(E)$.

Отметим, что для любых мероморфныхфункцийf, gна$\Gamma(E)$сединственным полюсом в точке P_1существуют операторыL_f, L_g, коэффициенты которых зависят от двух переменных $z, \bar{z}$, такие что

$$L_f\psi = f\psi, \qquad L_g\psi = g\psi.$$

Аналогичнодля любых мероморфных функций $\tilde{f}$, $\tilde{g}$на$\Gamma(E)$сединственным полюсом в точке P_2существуют операторы$\widetilde{L_{\tilde{g}}}$, $\widetilde{L_{\tilde{f}}}$, такие что

$$\widetilde{L_{\tilde{f}}}\psi = \tilde{f}\psi, \qquad \widetilde{L_{\tilde{g}}}\psi = \tilde{g}\psi.$$

При этом операторы L_f, L_g,$L_{\tilde{g}}$, $L_{\tilde{f}}$ удовлетворяют следующим условиям :

$$[L_f, L_g] = 0, \quad [L_f, H] = B_fH, \quad [L_g, H] = B_gH, \tag{1}$$
$$[\widetilde{L_{\tilde{f}}}, \widetilde{L_{\tilde{g}}}] = 0, \quad [\widetilde{L_{\tilde{f}}}, H] = \widetilde{B_{\tilde{f}}}H, \quad [\widetilde{L_{\tilde{g}}}, H] = \widetilde{B_{\tilde{g}}}H. \tag{2}$$

Замечание 1. Условия (1) и (2)выделяют конечнозонные операторы Шредингера.

В этой работе найден пример конечнозонного оператора Шредингера коэффициенты которого выражены через эллиптические функции Вейерштрасса, при этом спектральная кривая рода больше 1.

Теорема. Оператора Шредингера

$$H=\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar z}+\frac{7a\wp'(az+b\bar z)}{20b_2a^2-14\wp(az+b\bar z)}\frac{\partial}{\partial \bar z}+\frac{b\wp(az+b\bar z)}{2a},$$

где $\wp$ --- эллиптическая функция Вейерштрасса, которая удовлетворяет следующемууравнению:

$$(\wp')^2=-\frac{1}{2a^2}\wp^3+b_2\wp^2-\left(\frac{7b_0}{10b_2a^2}+\frac{20b_2^2a^2}{49}\right)\wp+b_0,$$

являетсяконечнозонным и при этом выполняются следующие уравнения

$$[L_i,L_j]=0,\qquad [L_i,H]=B_iH\qquad i,j=4,5,6,7,$$
$$[\widetilde{L_i},\widetilde{L_j}]=0,\qquad [\widetilde{L_,},H]=\widetilde{B_i}H\qquad i,j=4,5,6,7,$$

где $L_i,\widetilde{L_i}$ --- обыкновенные дифференциальные операторы порядка iсоответственно по$z,\bar z$.

Приведем примеры операторов$L_4,L_5,\widetilde{L_4},\widetilde{L_5}$:

$$L_4=\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\wp(az+b\bar z)\right)^2+\frac{3}{8}\wp(az+b\bar z)^2-\frac{15}{14}b_2a^2\wp(az+b\bar z),$$

$$L_5=\frac{\partial^5}{\partial z^5}+\left(-\frac{5b_2a^2}{7}+\frac{5\wp(az+b\bar z)}{2}\right)\frac{\partial^3}{\partial z^3}+\frac{15}{4}a\,\wp'(az+b\bar z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$+\left(\frac{5\wp(az+b\bar z)}{2}-\frac{21\,b_0}{80\,b_2}-\frac{101\,b_2^2a^4}{196}\right)\frac{\partial}{\partial z}-\frac{15}{112}a\left(2b_2a^2-7\wp(az+b\bar z)\right)\wp',$$

$$\widetilde{L_4}=\frac{\partial^4}{\partial \bar z^4}+\frac{14\,b\wp'(az+b\bar z)}{10b_2a^2-7\,\wp(az+b\bar z)}\frac{\partial^3}{\partial \bar z^3}$$
$$+\frac{b^2(686\,b_0-100\,b_2^3a^4+1\,540\,b_2^2a^2\,\wp(az+b\bar z)-735\,b_2\,\wp(az+b\bar z)^2)}{70\,b_2a^2(10b_2a^2-7\,\wp(az+b\bar z))}\frac{\partial^2}{\partial \bar z^2}$$
$$+\frac{b^2(343\,b_0+400\,b_2^3a^4+980\,b_2^2a^2\,\wp(az+b\bar z)-735\,b_2\,\wp(az+b\bar z)^2)\wp'(az+b\bar z)}{70\,b_2a^2(10\,b_2a^2-7\,\wp(az+b\bar z))}\frac{\partial}{\partial \bar z},$$

$$\widetilde{L_5}=\frac{\partial^5}{\partial \bar z^5}+\frac{35\,b\wp'(az+b\bar z)}{20b_2a^2-14\,\wp(az+b\bar z)}\frac{\partial^4}{\partial \bar z^4}$$
$$+\frac{3\,b^2(343\,b_0-200\,b_2^3a^4+700\,b_2^2a^2\,\wp(az+b\bar z)-245\,b_2\,\wp(az+b\bar z)^2)}{56\,b_2a^2(10b_2a^2-7\,\wp(az+b\bar z))}\frac{\partial^3}{\partial \bar z^3}$$
$$+\frac{b^2(1\,029\,b_0-1000\,b_2^3a^4+980\,b_2^2a^2\,\wp(az+b\bar z)-735\,b_2\,\wp(az+b\bar z)^2)\wp'(az+b\bar z)}{8\,b_2\left(10b_2a^2-7\,\wp(az+b\bar z)\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial \bar z^2}$$
$$+\frac{b^4}{7\,840\,b_2a^4\left(10b_2a^2-7\,\wp(az+b\bar z)\right)^2}\big(352\,947\,b_0^2+411\,600\,b_0b_2^3a^4-184\,000\,b_2^6a^8$$
$$+280\left(1\,029\,b_0b_2^2a^2-1\,480\,b_2^5a^6\right)\wp(az+b\bar z)-98(1\,029\,b_0b_2-16\,480\,b_2^4a^4)\wp(az+b\bar z)^2$$
$$-1\,029\,000\,b_2^3a^2\wp(az+b\bar z)^3+180\,075\,b_2^2\wp(az+b\bar z)^4\big)\frac{\partial}{\partial \bar z}.$$

Отметим, что спектральная криваяΣ операторов L_4и L_6является эллиптической, заданная уравнением:

$$\lambda^2=\mu^3+\left(\frac{7\,b_0}{8\,b_2}+\frac{17\,b_2^2a^4}{14}\right)\mu^2+\left(\frac{5\,341\,b_0^2}{6\,400\,b_2^2}+\frac{415\,b_0b_2a^4}{224}+\frac{17\,161\,b_2^4\,a^8}{38\,416}\right)\mu+\frac{3\,087\,b_0^3}{51\,200\,b_2^3}$$
$$+\frac{1\,131\,b_0^2\,a^4}{1\,600}+\frac{16\,413\,b_0b_2^3a^8}{43\,904}+\frac{94\,875\,b_2^6a^{12}}{1\,882\,384}.$$

Аналогично для операторов $\widetilde{L_4}$и $\widetilde{L_6}$ спектральная кривая$\widetilde{\Sigma}$ задается уравнением:

$$\tilde{\lambda}^2 = \tilde{\mu}^3 + b^4\left(\frac{151\, b_2^2}{196} - \frac{49\, b_0}{80\, b_2 a^4}\right)\tilde{\mu}^2 + \frac{b^8}{39\,200\, b_2^2}\left(6\,000\, b_2^6 - \frac{2\,401\, b_0^2}{a^8} + \frac{4\,760\, b_0 b_2^3}{a^4}\right)\tilde{\mu} + \left(\frac{b^{12}\,(343 b_0 + 300\, b_2^3 a^4)^2}{11\,764\,900\, a^8}\right).$$

Имеются следующие морфизмы:

$$\varphi\colon\ \Gamma(E) \to \Sigma, \qquad \tilde{\varphi}\colon\ \Gamma(E) \to \tilde{\Sigma}.$$

Наличие морфизмов φ и $\tilde{\varphi}$объясняет то, что коэффициенты операторов $H, L_i, \widetilde{L_i}$выражаются через $\wp$-функции Вейерштрасса.

Литература:

1. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. Уравнение Шрёдингера в периодическом магнитном поле и римановы поверхности. // ДАН. – 1976.- 229:1. - С. 15-18.
2. Кричевер И.М., Новиков С.П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. // Успехи мат. наук. – 1980.- Т. 35. - В. 6. - С. 47-68.

Резюме

Изучаются двумерные операторы Шредингера. В работе [1] коэффициенты оператора Шредингера выражены-функции. В статье [2] дано определение алгебры коммутирующих операторов, которое помогает построит пример оператора Шредингера. Построен пример оператора Шредингера с коэффициентами, выраженными через эллиптические функции.

Ключевые слова:коммутирующие дифференциальные операторы, спектральная кривая, оператор Шридингера.

Түйіндеме

Екі өлшемді Шредингер операторы қарастырылады. [1] жұмыста Шредингер операторының коэффициенттері θ-функциямен өрнектелген. [2] Мақалада Шредингер операторының мысалдарын құрастыруға мүмкіндік беретін коммутацияланатын операторлар алгебрасының анықтамасы берілген. Коэффициенттері эллиптикалық функциялар арқылы өрнектелетін Шредингер операторының мысалдары тұрғызылды.

Кілт сөздер: коммутацияланатын дифференциалданатын операторлар, спектральді қисық, Шредингер операторы.

Summary

The two-dimensional Schrodinger operators are studied.In the work [1] coefficients are expressed by θ-functions. The definition of algebra of commuting operators thathelp to construct the example of Schrodinger operator are given in the paper. The example of Schrodinger operator with coefficients expressed by elliptic functions is construbeis.

Key words: commuting differential operators, spectral curve, Schrodinger operator.

УДК 510.6

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛЕЙ

З.Г.ХИСАМИЕВ, кандидат физико-математических наук

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы,

Республика Казахстан

Общая теория моделей позволяет конструктивно строить элементарные расширения полей, причем расширения любой мощности. В данной работе исследуется вопрос об алгебраических конструкциях элементарных расширений данного поля. Нетрудно видеть, что любое алгебраическое расширение данного поля не является его элементарным расширением, более того, оно не является даже универсальным расширением, т.е. в алгебраическом расширении поля не сохраняются универсальные предложения. В этой связи, в работе даказано, что каждое простое трансцендентное расширение является его универсальным расширением. Также доказано что, вообще говоря, простое трансцендентное расширение бесконечного поля не являтся его элементарным расширением. Далее, рассмотрены вопрсы об интерпритации трансцендентного расширения поля частных, в кольце трансцендентного расширения соответствующего кольца целостности.

Пусть F – бесконечное поле, $F(\alpha)$ – простое трансцендентное расширение F.

Теорема 1. *Поле* $F(\alpha)$ *является универсальным расширение поля* F, $F \prec_{\forall} F(\alpha)$.

Доказательство. 1. Если φ – универсальная формула с константами из F, то ввиду того что $F \subseteq F(\alpha)$, выполнено $F(\alpha) \models \varphi \Rightarrow F \models \varphi$.
2. Пусть φ – универсальная формула с константами из F и выполнено $F \models \varphi$. Допустим, что $F(\alpha) \models \neg\varphi$, тогда $\neg\varphi$ – $\exists$-предложение с константами из F. Дакажем следующее предложение.

Предложение 1. *Если выполнено* $F(\alpha) \models \exists\overline{x}\psi(\overline{a},\overline{x})$, *то выполнено* $F \models \exists\overline{x}\psi(\overline{a},\overline{x})$, *здесь* ψ *– бескаванторная формула,* $\overline{a} \in F^m, \overline{x} = (x_1,...,x_n)$,

Доказательство. Пусть $\psi(\overline{a},\overline{x}) = \vee \,\&\, f(\overline{a},\overline{x}) =^{\varepsilon} 0$, где $f(\overline{a},\overline{x}) \in F[\overline{x}]$, $f =^0 0$ означает $f \neq 0$ и $f =^1 0$ означает $f = 0$. Допустим выполнен один из дизъюктивных членов формулы $\exists\overline{x}\psi(\overline{a},\overline{x})$: это означает, что найдется набор
$\overline{g(\alpha)} = (g_1(\alpha),...,g_n(\alpha)) \in F(\alpha)^n$ и дизъюктивный член $\underset{f\in G}{\&} f(\overline{a},\overline{x}) =^{\varepsilon} 0$ такой, что выполнено $F(\alpha) \models \underset{f\in G}{\&} f(\overline{a},\overline{g(\alpha)}) =^{\varepsilon} 0$. Докажем существование конечного $N \subseteq F$, что для любого $b \in F \setminus N$ выполнено $F(\alpha) \models \underset{f\in G}{\&} f(\overline{a},\overline{g(\alpha)}) =^{\varepsilon} 0 \Leftrightarrow F(\alpha) \models \underset{f\in G}{\&} f(\overline{a},\overline{g(b)}) =^{\varepsilon} 0$. Рассмотрим конечное множество многочленов из $F[x]$ – $\{g_1(x),...,g_n(x), f(\overline{a},\overline{g(x)}) / f \in G\}$, это множество многочленов имеет конечное множество корней N, так как можно предполагать, что хотя бы один из многочленов $\{g_1(x),...,g_n(x)\}$ отличен от нуля. Так как поле F бесконечно $F \setminus N$ – непусто. Пусть $b \in F \setminus N$ и $f(\overline{a},\overline{g(\alpha)}) = 0$, тогда в силу трансцендентности α имеем $f(\overline{a},\overline{g(c)}) = 0$ при любом $c \in F$. Пусть теперь $b \in F \setminus N$ и $f(\overline{a},\overline{g(\alpha)}) \neq 0$, тогда в силу выбора элемента b при любом $f(\overline{a},\overline{g(b)}) \neq 0$. Таким образом, $F(\alpha) \models \underset{f\in G}{\&} f(\overline{a},\overline{g(b)}) =^{\varepsilon} 0$, в силу того что $F \subseteq F(\alpha)$, имеем $F \models \underset{f\in G}{\&} f(\overline{a},\overline{g(b)}) =^{\varepsilon} 0$. Предоложение а вместе с ней и теорема доказаны.

Рассмотрим об универсальности транцендентных расширениях колец целостности.
Аналогично теореме 1 доказывается следующая

Теорема 2. *Трансцендентное расширение* $K[\alpha]$ *бесконечного кольца целостности* K, *является его универсальным расширением.*

Построим интерпритацию элементарной теории поля частных $\overline{K}$ в элементарной теории кольца целостности K.

Теорема 3. *Пусть* $\overline{K}$ *– поле частных кольца целостности* K *одной и той же сигрантуры* $\sigma = \langle +, *, 0, 1 \rangle$. *Для каждой формулы* $\varphi(\overline{x})$ *сигнатуры* σ *и набора* $\overline{a} \in \overline{K}^n$ *сущесвуют формула* $\varphi^*(\overline{w})$ *этой же сигнатуры и набор* $\overline{e} \in K^{2n}$, *такие что выполнено* $\overline{K} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow K \models \varphi^*(\overline{e})$, *здесь* $\overline{x} = (x_1,...,x_n), \overline{w} = (u_1, v_1,...,u_n, v_n), \overline{a} = (a_1,...,a_n), \overline{e} = (b_1, c_1,...,b_n, c_n)$ *и* $a_i = b_i / c_i$.

Доказательство. Пусть $\sigma^* = \langle P,+,*,0,1\rangle$, $K^* = \langle \bar{K}; P,+,*,0,1\rangle$ – то же самое поле частных $\bar{K}$ в котором одноместный предикат P выделеляет элементы кольца K. Пусть $\varphi(\bar{x}) = Q_1x_1...Q_sx_s\psi(\bar{x})$ где $\psi(\bar{x}) = \vee \,\&\, f(\bar{x}) =^{\varepsilon} 0$, положим

$$\varphi_P(\bar{w}) \overset{df}{\Leftrightarrow} Q_1u_1Q_1v_1...Q_su_sQ_sv_s(\psi^*(\bar{w}) \,\&\, \underset{i}{\&}(P(u_i)\,\&\,P(v_i)) \,\&\, \underset{i}{\&} v_i \neq 0),$$ здесь

$$\bar{w} = (u_1, v_1, ..., u_n, v_n),\ \psi^*(\bar{w}) = \vee \,\&\, f^*(\bar{w}) =^{\varepsilon} 0$$ и

$f^*(\bar{w})$ получено заменой в каждой переменной x_i на u_i / v_i и последущим приведением, полученного выражения, к общему знаменателю. Докажем эквивалентность $\bar{K} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \bar{K} \models \varphi_P(\bar{e})$. Если $\varphi(\bar{x}) = \vee \,\&\, f(\bar{x}) =^{\varepsilon} 0$ – бескванторная формула, то $\bar{K} \models \&$ $f(\bar{a}) =^{\varepsilon} 0$, $\bar{a} = (a_1,...,a_n), \bar{e} = (b_1, c_1,..., b_n, c_n)$, $a_i = b_i / c_i$ $\Leftrightarrow$ $\bar{K} \models \& f(\overline{b/c}) =^{\varepsilon} 0$, где $\overline{b/c} = (b_1 / c_1,..., b_n / c_n)$ $\Leftrightarrow \bar{K} \models \& f^*(\overline{b/c}) =^{\varepsilon} 0$ $\Leftrightarrow$ $\bar{K} \models \varphi_P(\bar{e})$. Дальнейшее доказательство проводится, индукцией по рангу формулы. Положим теперь, $\varphi^*(\bar{w}) \overset{df}{\Leftrightarrow} Q_1u_1Q_1v_1...Q_su_sQ_sv_s(\psi^*(\bar{w}) \,\&\, \underset{i}{\&} v_i \neq 0)$, здесь как выше $\bar{w} = (u_1, v_1,..., u_n, v_n)$, $\psi^*(\bar{w}) = \vee \,\&\, f^*(\bar{w}) =^{\varepsilon} 0$. Теперь, нетрудно видеть, что выполнено $\bar{K} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \bar{K} \models \varphi_P(\bar{e}) \Leftrightarrow K \models \varphi^*(\bar{e})$. Теорема доказана.

Приведем еще следующие результаты, дополняющие свойства трансцендентных расширений колец и полей.

Теперь построим интерпритацию элементарной теории транцендентного расширения поля частных в элементарной теории трансцендентного расширения кольца целостности K.

Теорема 4. *Пусть $\overline{K}(\alpha)$ – транцендентное расширение поля частных кольца целостности K одной и той же сигрантуры $\sigma = \langle +,*,0,1\rangle$. Для каждой формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры σ и набора $\bar{f} \in \overline{K}(\alpha)^n$ сущесвуют формула $\varphi^*(\bar{w})$ этой же сигнатуры и набор $\overline{gh} \in \bar{K}[\alpha]^{2n}$, такие что выполнено $\bar{K} \models \varphi(\bar{f}) \Leftrightarrow K \models \varphi^*(\overline{gh})$, здесь $\bar{x} = (x_1,...,x_n), \bar{w} = (u_1, v_1,..., u_n, v_n), \bar{f} = (\bar{f}_1,..., \bar{f}_n), \overline{gh} = (g_1, h_1,..., g_n, h_n)$ и $f_i = g_i / h_i$.*

Доказательство. Так как простое трансцендентное расширение $\overline{K}(\alpha)$ поля $\bar{K}$ является полем частным кольца целостности $K[\alpha]$, то теорема является следствием предыдущей теоремы.

Предложение 2. *1. Простое транцендентное расширение кольца целых чисел не является его элементарным расширением. 2. Простое транцендентное расширение поля рациональных чисел не является его элементарным расширением.*

Доказательство. 1. $\exists\forall$ формула $\varphi(x) = \exists x \forall y (x \neq y + y \,\&\, x + 1 \neq y + y)$ истинна в модели $\langle\, Z[\alpha];\, +,\, \cdot \,\rangle$, но ложна в модели $\langle\, Z\,;\, +,\, \cdot \,\rangle$, рассматриваемых в сигнатуре $\langle\, +,\, \cdot, 0, \pm 1, \pm 2, ... \,\rangle$. Впрочем, слегка усложнив формулу, можно утверждать что рассматриваемые кольца не являются элементарно эквивалентными в исходной сигнатуре $\langle\, +,\, \cdot \,\rangle$: Формула $\psi(x) = \exists x \exists z \forall y (z + z \neq z \,\&\, z \cdot z = z \,\&\, x \neq y + y \,\&\, x + z \neq y + y)$ истинна в модели $\langle\, Z[\alpha];\, +,\, \cdot \,\rangle$ и ложна в модели $\langle\, Z\,;\, +,\, \cdot \,\rangle$ сигнатуры $\langle\, +,\, \cdot \,\rangle$

2. Воспользуемся известной теоремой из теории чисел. Каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов. Отсюда, как известно, легко вывести такое же утверждение и для рациональных чисел. Действительно, пусть $\frac{m}{n} \in Q,\ n \neq 0, \frac{m}{n} > 0$ тогда имеем

$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot n}{n^2} = \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{c}{n}\right)^2$, где $m \cdot n = a^2 + b^2 + c^2 + d$, $a, b, c, d \in Z$.

Тогда каждое рациональное число или его отрицание представимо в виде четрых квадратов. Это представление является $\forall\exists$ формулой. Но эта формула не выполняется в модели $Q(\alpha)$, так как трансцендентный элемент α не предствим в виде суммы четырех многочленов от α.

Литерература:

1. Хисамиев З.Г. Об элементарных теориях трансцендентных расширений кольца целых и поля рациональных чисел // Материалы международной конференции, посвященной памяти и 70-летию известного советского и казахстанского математика д.ф-м.н, профессора Мустафина Т.Г., 18–20 сентября 2012г. – Караганда, 2012. – С.50.

Резюме

В данной работе исследуется вопрос об алгебраических конструкциях элементарных расширений данного поля. Нетрудно видеть, что любое алгебраическое расширение данного поля не является его элементарным расширением, более того, оно не является даже универсальным расширением т.е. в алгебраическом расширении поля не сохраняются универсальные предложения. В этой связи, в работе доказано, что каждое простое трансцендентное расширение является его универсальным расширением. Также доказано что, в общей сложности, простое трансцендентное расширение бесконечного поля не является его элементарным расширением.

Ключевые слова: элементарная теория, поле, универсальное расширение поля, кольцо целлостности, поле частных.

Түйіндеме

Мақалада өрістердің элементар алгебралық кеңеюлер қарастырылады. Өрістің алгебралық кенеюлері элементар кеңеюлер болмайды, тіптен универсал кеңеюлері де болмайды, яғни алгебралық кеңеюде универсал тұжырымдар сақталмайды. Бұл жұмыста ақырсыз өрістің әр трансцендент кеңеюі, универсал кеңеюі болатыны дәлелденген. Жалпы жағдайда, ақырсыз өрістің қарапайым трансцендент кеңеюі элементар кеңею бола бермейтіні дәлелденген.

Кілт сөздер: элементар теория, өріс, өрістің универсал кеңею, тұтастығын сақтайтың сақина, бөлшектер өрісі.

Summary

In this paper, we study the algebraic structures of elementary extensions of the field. It is easy to see that any algebraic extension of the field is not his elementary extension, moreover, it is not even a universal extension of that in an algebraic extension of the field are not saved universal demand. In this regard, the work dakazano that every simple transcendental extension is its universal extension . We also prove that, in general, a simple transcendental extension of an infinite field is not yavlyatsya his elementary extension.

Key words: The elementary theory өris, universal extension of the ring tsellostnosti, the field of private.

ӘОЖ 338.242:[338.26.015:51:004]

ЖАҢА АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ МАТЕМАТИКА САБАҒЫНДА ҚОЛДАНУДЫҢ ТИІМДІЛІГІ

Д.Р. БЕЙСЕНОВА,
Н.К. СЫЗДЫКОВА, физика-математика ғылымдарының кандидаты,
Д.М.АХМАНОВА, физика-математика ғылымдарының кандидаты
Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Қазіргі таңда пәндерді оқытуда оқушылардың творчестволық қабілеттіліктерін дамытуға бағдарланған жаңа технологияларды, ақпараттық және коммуникациялық технологияларды қолдану қажет, әрі тиімді. Заманауи дәрістерде компьютердің ролі үлкен, ол күрделі математика ғылымын барынша қолжетімді етеді.

ЭЕМ-ді мектепте математика курсында қолдану туралы сұрақтар әлі де зерттеуді қажет етеді. Мектепте математика курсында компьютерлерді қолданудың зор мүмкіншіліктерін айтар алдында, жаңа заман дербес ЭЕМ – нің мүмкіншіліктерін жете меңгеріп және оны қолдану әдістерімен танысу керек.

ЭЕМ-де программалау тілдерінде дифференциалдық теңдеулерді шешуге, интегралдық мәнін есептеуге, жалпы жуықтап есептеу әдістерін пайдаланып, күрделі есептер шығаруға бағдарламалар құруға болады. Бұдан ЭЕМ тек қана күрделі математикалық есептеулерді жүргізу үшін ғана қажет деген қате пікір тумауы тиіс. Қазіргі кезде ЭЕМ күнделікті тұрмыста етек алып бара жатқандықтан, оны оқу барысында пайдаланудың маңызы ерекше. Ол біріншіден, оқушылардың сабаққа деген ынтасын, қызығушылығын арттырады, жаттығу жұмыстарын көбірек жасауға мүмкіндік береді; екіншіден, мұғалімдердің оқушылардың қабілетіне қарай олармен жекелей жұмыс істеуге мүмкіндігі туады [1].

Компьютердің педагогикалық мүмкіндіктері математиканы оқытудың қолданбалылығын арттырудың әдістерін жетілдіруге, оған жаңашыл сипат беруге, білімді өмір талабымен үйлестіруге, есептеу эксперименті сияқы түбірімен жаңа танымдық құралдарды оқыту процесіне енгізуге мүмкіндік жасайды.

Математиканы оқытудың қолданбалы бағытын арттыруда оқыту бағдарламаларын қолдану оқушылардың математиканы оқып білуге құштарлығын арттырып, қандай да бір мәселені компьютердің көмегімен шешуге үйретеді.

Жаңа ақпараттық технологияларды метематика сабағында қолданудың тиімділігі төмендегі мәселелерді шешу қажеттілігінен туындап отыр:

– әлеуметтік – экономикалық (жаңа ақпараттық технологиялардың мүмкіншіліктерін оқушылардың жалпы білімін жоғарлатуда қолдану және оны жете меңгеру);

– философиялық (қазіргі заманға сай ғылыми әлемдік көзқарасы бар түлек дайындау);

– ғылыми – педагогикалық (жаңа ақпараттық технологияларды әр түрлі психологиялық – педагогикалық проблемаларды шешуде, сонымен қатар білім қалыптасуда және эксперименттік – зерттеушілік қызметтің қалыптасуында, пайдалану, математика оқыту мазмұнын тандауда пайдалану, тағы да ақпараттық технологияларды оқыту әдісі ретінде, ғылыми – зерттеушілік және басқару құралы ретінде қолдану) [2];

Компьютерді оқу кезінде пайдалану үшін, психологиялық және педагогикалық тұрғыдан қойылатын талаптарды ескеретін арнайы оқу бағдарламалары қажет. Қай оқу бағдарламасын алсақ та, ол пайдаланушы мен компьютер арасындағы сұхбаттан тұрады.

Компьютерді қолдану математиканы оқытудың мазмұны мен тәсіліне жан-жақты ықпал етті. Математиканың қолданбалы бағытын оқытуда ақпараттық технологияларды қолдану, ол компьютерлік оқу бағдарламаларын құру мен қолдануды да білдіреді. Бұл бағдарламаларда оқушылардың логикалық ойы жүзеге асырылады, сабақтар жаңаша ұйымдастырылады, оқытушының қызметі мен рөлі өзгереді.

Оқыту бағдарламалары – оқушылардың жұмысына бағытталған, арнайы оқыту жоспары. Олардың жұмысын жекешелендіре және оларға өздеріне өзінің танымдық әрекеттік басқаруға мүмкіндік бере отырып, оқушылардың белсенділігін арттыруға әрекет етуі тиіс. Оқыту бағдарламалары оқыту жүйесінің бір ғана бөлігі болып табылады, сәйкесінше өзінің арнайы функциясын орындай отырып, барлық оқу материалымен байланысты болуы тиіс. Бағдарламаларды оқытушы бағдарлама деп атайды, себебі оларды құру принципі оқыту сипатында жүреді (түсініктемелермен, ережелермен, тапсырма орындау үлгілерімен және т.б.) [3].

Бағдарламалар деп аталатын себебі, олар бағдарламаланған оқытудың барлық бес принципін ала отырып құрылған:

– оқыту жұмысының мақсаты және сол мақсатқа жету алгоритмінің толуы;

– қадамның іске асуын қамстамасыз ететін, сәйкес мөлшердегі ақпаратпен байланысқан, оқу жұмыстарының қадамға бөлінуі;

– әр қадам өзін-өзі тексерумен немесе түзетуші әрекетпен аяқталуы;

– автоматты құрылғылар пайдалану;

– оқытуды жекешелендіру.

Оқыту бағдарламаларын құру кезінде ақпаратты қабылдаудың психофизиологиялық заңдылықтарын есепке алу қажет. Жағымды эмоционалды фактор құру, жұмысқа қызығушылық тудыру және оны барлық оқыту бағдарламаларын орындау кезінде қолдау өте маңызды – бұл сәтті оқытудың маңызды шарты. Жақсы ұйымдастырылған оқыту бағдарламасын төмендегідей мүмкіндік береді:

– тапсырмалардың монотонды (бірсарынды) болмауына, оның деңгейі бойынша әрекеттің ауысуын ескеруге: тану, жаңғырту, қолдану;

– жақсы, орташа, нашар оқитын оқушыларға оқыту бағдарламасын пайдалы жұмыс жасау мүмкіндігін беру;

– есте сақтау факторын есепке алу (жылдам, қысқа мерзімді, ұзақ мерзімді).

Оқыту бағдарламасымен жұмыс жасау кезінде тапсырманы орындау үшін үзілістің ұзақтығы үлкен мәнге ие. Оқушыларды ыңғайсыз жағдайға қалдырмау үшін жұмысты орындауға арналған үзілісті шектемеген жөн екенін, ал тапсырманы орындауды бақылау үшін үзілісті шектеуге болады немесе шектеу керек, бірақ бұл оқыту бағдарламаларын ұзақ тәжірибелі тексерістен кейін ғана мүмкін екенін есте сақтаған жөн.

Нақты дағдылар мен біліктіліктерді қалыптастыру іріктелген материалдар негізінде әрекет принципі бойынша іске асырылады. Сонымен бірге оқушылардың психологиялық жас ерекшеліктерін, ойлау тапсырмаларына бағыттала білу қабілетін ескеру қажет.

Ереже бойынша оқыту бағдарламаларын дискеттерде немесе CD, BBS және FTP-лерде таратылады. Көп жағдайда ондай бағдарламаларды оқу сабақтары барысында көрсету үшін қолданады [4].

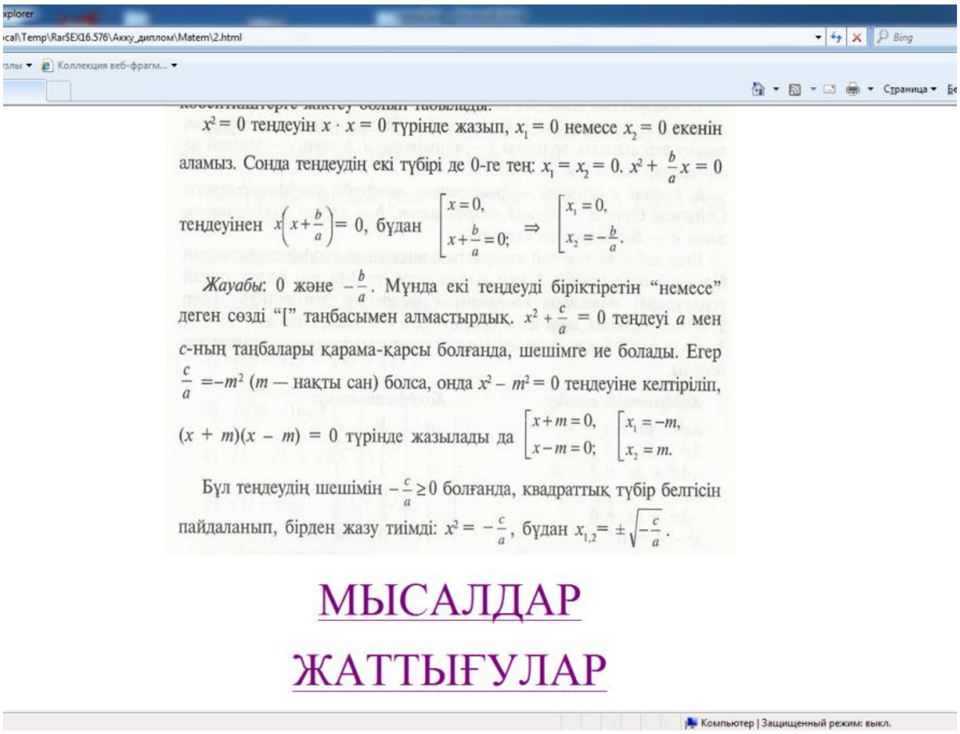
Оқыту бағдарламаларының бір түрі – электрондық оқулықтар. Электрондық оқулықтар дайындау Қазақстан Республикасының Білім және Ғылым министрлігінің Республикалық білімді ақпараттандыру ғылыми-әдістемелік орталығының негізгі қызметі болып табылады.

Электрондық оқулық деп білім берудің компьютерлік технологиясын кеңінен пайдалануға негізделген оқып-үйрену бағдарламасын айтады.

Педагогикалық іс-тәжірибеде болған уақытта сабақ беру барысында «Математика 8 сынып» электрондық оқулығын құрастырып, пайдаландық. Математика курсын мысал арқылы салыстыра отырып, түсіндіріп оқытқан тиімді. Берілген мысалдардың нәтижесін көре отыра, тапсырманы орындау ыңғайлы. Оқытудың арнайы әдісі – демонстрациялық мысалдар әдісі математика курсын оқытқан кезде көп қолданылады.

Электрондық оқулыққа іс-тәжірибе уақытында өткен тақырыптарды біріктірдік. Квадраттық теңдеу бөлімі қарастырылады, оқулықтағы теориялық материалдар берілген соң, мысалдар көрестілген. Жаттығулар ретінде 8-сынып алгебрасы оқулығындағы есептер берілген.

Электрондық оқулықтың материалдары көзге жағымды түстермен, оқуға ыңғайлы түрде берілген.

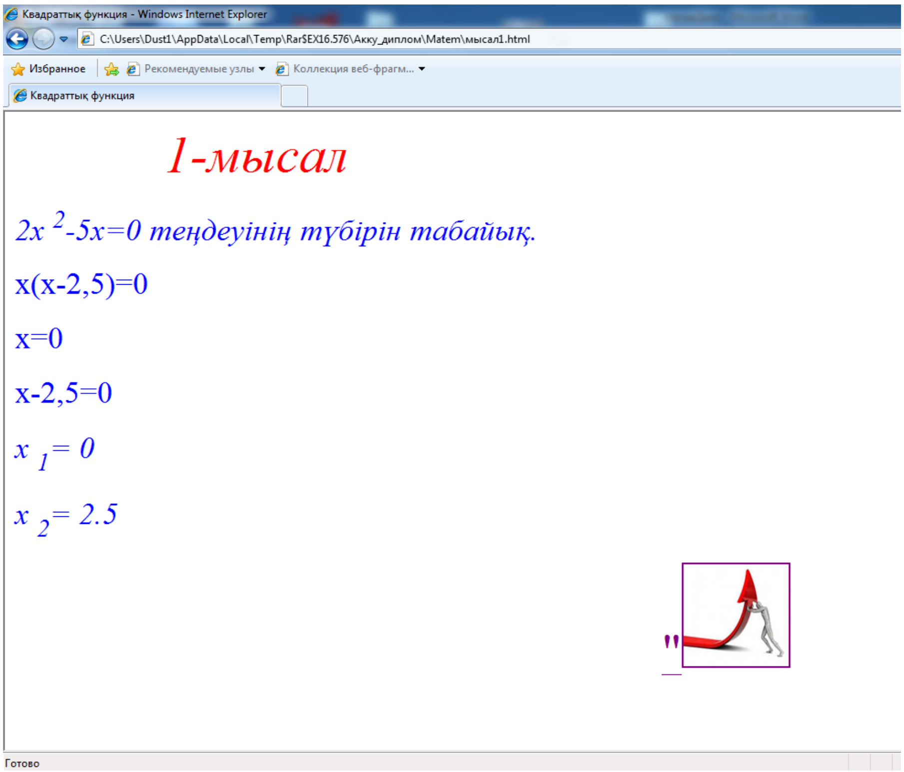


$x^2 = 0$ теңдеуін $x \cdot x = 0$ түрінде жазып, $x_1 = 0$ немесе $x_2 = 0$ екенін аламыз. Сонда теңдеудің екі түбірі де 0-ге тең: $x_1 = x_2 = 0$. $x^2 + \frac{b}{a}x = 0$ теңдеуінен $x\left(x+\frac{b}{a}\right)= 0$, бұдан $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x+\frac{b}{a}=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-\frac{b}{a}. \end{array}\right.$

Жауабы: 0 және $-\frac{b}{a}$. Мұнда екі теңдеуді біріктіретін "немесе" деген сөзді "[" таңбасымен алмастырдық. $x^2 + \frac{c}{a} = 0$ теңдеуі a мен c-ның таңбалары қарама-қарсы болғанда, шешімге ие болады. Егер $\frac{c}{a} = -m^2$ (m — нақты сан) болса, онда $x^2 - m^2 = 0$ теңдеуіне келтіріліп, $(x + m)(x - m) = 0$ түрінде жазылады да $\left[\begin{array}{l} x+m=0, \\ x-m=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1=-m, \\ x_2=m. \end{array}\right.$

Бұл теңдеудің шешімін $-\frac{c}{a} \geq 0$ болғанда, квадраттық түбір белгісін пайдаланып, бірден жазу тиімді: $x^2 = -\frac{c}{a}$, бұдан $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Сурет 1 - Теориялық материалдың берілуі

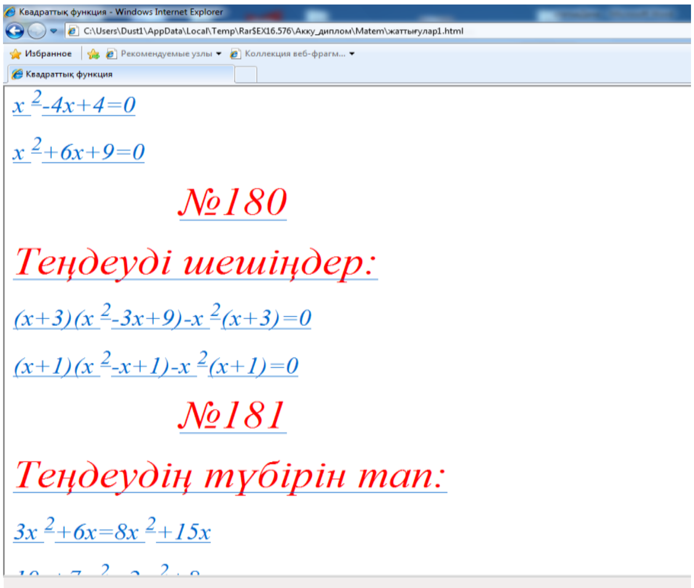


Сурет 2 - Тақырып бойынша мысалдардың қарастырылуы

Жалпы электрондық оқулықтар мен Web-парақтарды пайдалану үшін FrontPage, HTML және т.б. программалары қолданылады. Бұл программалар электрондық оқулықтар мен Web-парақтағы мәліметке мәтін, графика, дыбыстық, бейнелік ақпарат түрлерін орналастыруға мүмкіндік береді. Берілген оқулық HTML форматта оңай құрылған, оқуға ыңғайлы, көзге де жағымды.

Білім берудің кез-келген саласында электрондық оқулықтарды пайдалану оқушылардың танымдық белсенділігін арттырып қана қоймай, ойлау жүйесін қалыптастыруға, шығармашылықпен еңбек етуге жағдай жасайды.

Берілген теориялық материалдарды бекіту үшін оқулықта жаттығулар берілген.

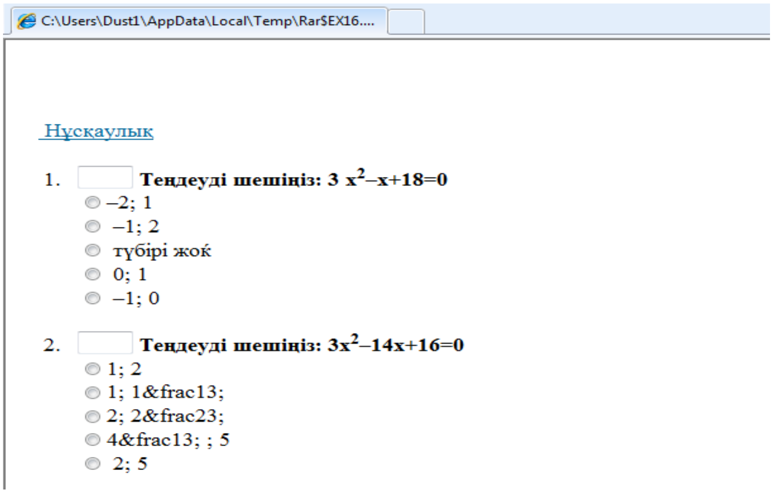


Сурет 3 - Электрондық оқулықтағы жаттығулар

Оқулықтағы мазмұн мен материалдар арасында байланыс үшін арнайы бағыттауыштар қойылған.

Жаттығулар, мысалдар берілгенде бейнелік сурет пен жан бітірім пайдаланылған. Осындай көрнекі түрде берілген оқу материалы оқушының математикалық терминдерді, ұғымдарды, формулаларды түсініп, меңгеруіне жол ашады. Бағдарламада оқушы білімін пысықтау мақсатында тапсырмалар берілген.

Берілген электрондық оқулықтың интерфейсі көрнекті, түсінікті. Электрондық оқулықты дискіде және жеке компьютерде немесе локальді желіде орналастыруға болады. Берілген электрондық оқулықтың мазмұнына қажетті өзгертулерді және өзгертулерді қарапайым түрде енгізуге мүмкіндік бар.



Сурет 4 - Тест тапсырмасының берілуі

Тесттің нәтижесі тест бітісімен қолма-қол көрсетіледі. Бұл оқушылардың өз еңбегінің нәтижесін, қателіктерін сабақ барысында талқылауға мүмкіндік береді.

Электронды оқулықты пайдалана оқытып, оқытуда мультимедиялық құралдарды пайдаланудың нәтижесінде мынадай қорытынды жасай аламыз:

✓ оқушылардың белсенділігі артады;

✓ оқу көрнекірек болғандықтан, оқушыларда кеңістіктік және математикалық ойлауы дамиды;

✓ оқушыларды жылдам тестілеу мүмкіндігі пайда болады;

✓оқушылар сабақтың элеметін құруда қатыса алады, соның арқасында шығармашылық ойлауын дамытады;

✓уақытты үнемдеуге және үлкен көлемдегі есептерді шығаруға мүмкіндік береді.

Әдебиеттер:

1. Сағымбеков А. Ақпараттық-коммуникациялық технологияның артықшылығы // Математика және физика.– 2012. -№6.
2. Дистанционное обучение: Учебное пособие для вузов/ Под ред. Е. С. Полат. - М., 1998.
3. Калягин И. Новые информационные технологии и учебная техника // Высшее образование в России. - 1996. - №1.
4. Кершан Б. Основы компьютерной грамотности. - М.: Мир, 1989.

Түйіндеме

Мақалада компьютердің педагогикалық мүмкіндіктері математиканы оқытудың қолданбалылығын арттырудың әдістерін жетілдіруге, оған жаңашыл сипат беруге, білімді өмір талабымен үйлестіруге, есептеу эксперименті сияқы түбірімен жаңа танымдық құралдарды оқыту процесіне енгізуге мүмкіндік жасайтындығы, электронды оқулықтың іс-тәжірибеде қолданылғандағы туралы айтылған.

Кілт сөздер: ақпараттық технологиялар, оқыту бағдарламалары, математиканы оқыту, электронды оқулық.

Резюме

В данной статье показаны влияние педагогических возможностей компьютера на совершенствование методов изучения прикладной математики, передаваемых ему новых свойствах, о соответствии знании с современными требованиями, о введении в процесс обучения новых познавательных средств, таких, как процесс вычисления, и об использовании электронных учебников на практике.

Ключевые слова: информационные технологии, программа обучения, обучение математике, электронный учебник.

Summary

This work narrates about the influence of pedagogical ability of computer on improving of methods of studying of applied mathematics, given to new properties, to knowledge with life requirements, about introduction of new informative means to the training process, such as calculation process and about using electronic textbooks in practice.

Key words: information technologies, training program, teaching mathematics, electronic textbooks.

УДК 378.2:51:002.5

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СИСТЕМЕ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

А.И. ГАЙСАКОВА, магистрант,
А.А.КУЛЬЖУМИЕВА, кандидат физико-математических наук, доцент
Западно-Казахстанский государственный университет им. М.Утемисова,
г.Уральск, Республика Казахстан

В Казахстане применение информационно-коммуникационных технологий в системе образования, в том числе в вузах, осуществляется в рамках государственной политики информатизации общества и образования. Вместе с тем, в государственной программе развития образования Республики Казахстан на 2011-2020 годы приоритетным направлением является внедрение электронного обучения, что предполагает внедрение и разработку цифровых интерактивных мультимедийных образовательных ресурсов для профессиональной подготовки студентов. Педагогические вузы, в первую очередь, должны включаться в процессы обновления, готовя учителей, владеющих современными компьютерными технологиями, получивших хорошую теоретическую подготовку, способных работать в условиях вариативного обучения, а также умеющих учить и учиться, используя современные достижения.

В вузах Казахстана наработан достаточно большой опыт разработки цифровых образовательных ресурсов по кейсовым, сетевым и ТВ технологиям. В целом 10% содержания вузовского образования переведено на цифровой формат, что создало определенные предпосылки для развития электронного обучения [1].

Современная конкурентно-способная, оснащённая новыми технологиями, экономика существенно расширила спрос на математическое образование. Нынешнее математическое образование помимо фундаментальной подготовки (владение математикой как инструментом познания, способом решения конкретных задач), предполагает знание компьютера и средств коммуникации. Заметим попутно, что многие из этих знаний и умений необходимы и для естественных, и для гуманитарных наук. Поэтому математическое образование можно выделить как одну из ведущих степеней свободы, в определённом смысле влияющую на все остальные, в рассматриваемой системе – образование.

Процесс внедрения информационных технологий в математическое образование в вузах стремительно набирает темпы, использование информационных технологий в процессе обучения позволяет решить ряд проблем: методических, организационных, психологических. Приведем ниже подробное обоснование необходимости использования информационных технологий в процессе обучения математическому анализу в педагогическом вузе.

Во-первых, для лучшего усвоения большого количества изученных формул и правил дифференцирования, интегрирования, свойств пределов и т.п. необходимо систематизировать и структурировать получаемые студентами знания. Обычно, хранилищем информации у студента является книга, записи лекций и семинаров, память. Обработка этой информации в лучшем случае сводится к работе с конспектами и учебниками. В этом смысле у компьютера неограниченные возможности. Простейшими формами такого использования компьютера является создание электронных справочных материалов (например, систематизация основных формул интегрирования, правил вычисления определенного интеграла, приложений определенного интеграла, геометрических приложений кратных и криволинейных интегралов). Системный подход обеспечивается не только соотношением теоретического и практического материала, но и комплексным подходом к отбору средств обучения, предполагающим использование как традиционных, так и современных информационных технологий. Они направлены на развитие информационной культуры личности, учебно-профессиональной деятельности студентов и на развитие их организационных и управленческих умений. Многие исследователи (Е.И. Гужвенко, Г.Е. Иванов, С.С. Кравцов и др.) настаивают на том, что локальное применение средств информационных технологий (в виде отдельных прикладных программных средств или эпизодического применения специализированных пакетов) не обеспечивает математическое образование базовой подготовкой в области реализации возможностей информационных технологий (ИТ). Они доказывают необходимость систематического использования ИТ в процессе обучения.

Систематическое использование информационных технологий в обучении математическому анализу и, в частности, интегральному исчислению необходимо проводить в разумном сочетании с традиционными образовательными технологиями. В настоящее время не представляется целесообразным перейти в обучении на использование только информационных технологий, дидактика и методика сейчас находятся в процессе поиска такой стратегии внедрения информационных технологий в образование, чтобы, с одной стороны, привнести в образование все преимущества использования компьютеров и тем самым обогатиться, а с другой стороны, избежать возможных потерь, которые могут отрицательно сказаться на всех компонентах учебно-воспитательного процесса, поэтому комплексность использования информационных технологий с традиционными образовательными технологиями должна проходить некой «красной линией» через весь процесс обучения студентов - будущих учителей математики математическому анализу.

Во-вторых, остановимся на целесообразности использования информационных технологий и различных компьютерных средств, предназначенных для организации и облегчения процесса познания, для повышения качества усвоения учебного материала. При помощи компьютерных технологий учебный процесс можно сделать более управляемым. Следует отметить, что получить требуемое качество подготовки учащихся возможно только на основе четкой и взаимосвязанной реализации всех этапов управленческого цикла, который схематично можно представить следующим образом.

1. Диагностика знаний студентов на начальном этапе. На ее основе принимается решение об основных направлениях работы с различными группами студентов.

2. Следующий этап управления - планирование работы по ликвидации пробелов знаний у отстающих студентов, распределяются индивидуальные домашние задания, сообразно их математической подготовке.

3. Реализация. На этом этапе управления осуществляется организация учебной деятельности студента. Функционирование и развитие учебного процесса требует мониторинга его качества, поэтому на данном этапе на первый план выступает текущий контроль, анализ информации, получаемой на его основе, и принятие частных решений относительно регулирования учебного процесса.

4. Завершением управленческого цикла является итоговый контроль и анализ общекультурной и профессиональной подготовки студентов.

Все этапы описанного управленческого цикла требуют от преподавателя больших временных затрат, однако, использование компьютера в организации учебного процесса расширяет возможности преподавателя в учете индивидуальных качеств каждого студента, обеспечивает своевременную обратную связь и снижает временные затраты преподавателя, высвобождая время для творческой работы. Как следствие, управление учебным процессом делается более гибким, а результат - более точным.

В-третьих, как отмечалось выше, целесообразно использовать информационные технологии в качестве инструмента познания (в смысле J.Jonassena). Использование только обучающих программ не оправдало возлагавшихся на них надежд, особенно в условиях вузовского обучения. При использовании информационных технологий в вузовском курсе математического анализа недостаточно демонстрировать лишь готовые компьютерные модели областей интегрирования или ограничиваться задачами, в которых требуется посчитать определенный интеграл с помощью той или иной обучающей системы. Большинство студентов - будущих учителей математики - должно быть ориентировано на самостоятельную разработку компьютерных программ, как с помощью языков высокого уровня, так и внутренних языков соответствующих пакетов. С помощью инструментов познания учащиеся активно вовлекаются в процесс формирования знаний, что способствует качественному усвоению учебного материала.

В связи с уменьшением времени на аудиторные занятия в учебных планах, все большее значение приобретает самостоятельная работа студентов. «Информационные технологии играют большую роль в организации самостоятельной работы студентов, так как в этом случае удачно используются возможности реализации таких принципов обучения, как активность и доступность. Кроме того, развиваются такие мыслительные операции и общие умения, как анализ, синтез, аналогия и моделирование, причем в таких формах, которые не дублируют формы традиционного обучения. На этой основе формируется поисковая активность личности при отборе и структурировании информации» [2].

В-четвертых, с применением компьютера расширяются возможности визуализации абстракции. Процесс обучения интегральному исчислению важно иллюстрировать. Для того чтобы противодействовать процессу формализации математического анализа достаточно изменить характер использования компьютера: не ограничиваться его вычислительными возможностями, а стараться связывать вычисление различных интегралов с процессом визуализации интегрируемых функций или областей интегрирования на экране монитора. Однако государственным стандартом специальности не предусмотрено дополнительное время на повторение фактов из геометрии и стереометрии в рамках изучения интегрального исчисления, а студент не всегда может связать самостоятельно, например, аналитическое выражение с той криволинейной трапецией, площадь которой подсчитывается с помощью определенного интеграла, особенно, если выражение задано в полярных координатах или параметрически, что необходимо для нахождения пределов интегрирования.

Еще труднее для студентов построить пространственное изображение трехмерного объекта, объем которого требуется вычислить, чтобы определить область и пределы интегрирования. Это связано с наметившейся тенденцией на сокращение количества часов, выделяемых на изучение геометрического материала. Компьютер же в этом случае предоставляет практические неограниченные возможности в плане визуализации геометрических образов на экране. Это способствует развитию пространственного воображения и установлению более четкой связи между аналитическими конструкциями и их наглядно-образным выражением, интеграции математического анализа и геометрии, умений в вычислении площадей криволинейных трапеций, объемов тел и т.п.

Интересен опыт зарубежных исследователей. Начало 90-х годов в математическом образовании многих англоязычных стран (в частности, США) ознаменовалось движением по реформированию обучения математическому анализу, а точнее некоторым темам дифференциального и интегрального исчисления. Фундаментальной работой в этом направлении явилась книга "Визуализация в обучении математике", изданная в 1990 г. Математической ассоциацией Америки (МАА). В этом сборнике статей видных педагогов-математиков убедительно доказан тот факт, что многие проблемы в обучении математике, и в частности началам анализа, связаны с недостаточной визуальной поддержкой абстрактных научных понятий. Так, лишь только 5,4% учащихся (из выборки - 937 испытуемых), прошедших курс начал анализа, смогли правильно вычислить следующий интеграл:

$$-3 * \int 3 * (x + 2)dx$$

Одной из причин такого низкого результата при вычислении элементарного интеграла, как показали результаты эксперимента, проводимого под эгидой математической ассоциации Америки, является оторванность аналитических процедур от визуальных (геометрических) процедур.

В-пятых, будущие учителя математики должны владеть приемами разработки собственных цифровых интерактивных образовательных ресурсов.

Таким образом, используя компьютерные тренажеры для отработки навыков вычисления неопределенных интегралов, выполняя лабораторные работы в математических пакетах, которые выполнены на основе использования компьютерных технологий в качестве инструмента познания, студенты повышают свой уровень усвоения знаний, умений и навыков интегрального исчисления.

Литература:

1. Нургалиева Г.К. Применение ИКТ в высшем образовании Республики Казахстан: текущее состояние, проблемы, проблемы и перспективы развития. / www.nci.kz.
2. Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: Монография. - Красноярск: РИО КГПУ, 2001. - 368 с.
3. Государственная программа развития образования Республики Казахстан на 2011-2020 годы.

Резюме

В Казахстане применение информационно-коммуникационных технологий в системе образования, в том числе в вузах, осуществляется в рамках государственной политики информатизации общества и образования. Вместе с тем, в государственной программе развития образования Республики Казахстан на 2011-2020 годы приоритетным направлением является внедрение электронного обучения, что предполагает внедрение и разработку цифровых интерактивных мультимедийных образовательных ресурсов для профессиональной подготовки студентов. Педагогические вузы в первую очередь должны включаться в процессы обновления, готовя учителей, владеющих современными компьютерными технологиями, получивших хорошую теоретическую подготовку, способных работать в условиях вариативного обучения, а также умеющих учить и учиться, используя современные достижения.

Ключевые слова: информационные технологии, интеграл, компьютерные средства.

Түйіндеме

Қазақстанда оқу жүйесінде, сонымен қатар жоғарғы оқу орындарында ақпараттық–коммуникациялық технологияның қолданылуы білімді және қоғамды ақпараттандырудың мемлекеттік саясаты тұрғысынан жүзеге асады. Сонымен қатар ҚР-ның мемлекеттік білім беруді дамыту бағдарламасында 2011-2020 жылдарға студенттерді кәсіби тұрғыда дайындау үшін интерактивті мультимедиялық білімі ресурстарды жасау және еңгізу басымды бағыт болып табылады. Педагогикалық ЖОО-дары ең алдымен заманауи компьютерлік технологияларды жеткілікті теориялық әзірлік алған, көпсалалы білім беру жағдайына бейімді, сонымен қатар оқыта және оқи алатын мұғалімдерді даярлау арқылы оқытудың мазмұнын жаңарту үрдісіне ат салысуы тиіс.

Кілт сөздер: ақпараттық технологиялар, интеграл, компьютерлік құралдар.

Summary

In Kazakhstan using information-communication technology in education system including in high schools is realized within the framework of state politicy in society and education informatiration. Together with that, in state program of education in the education the Republic of Kazakhstan on 2011-2020 priority direction is an introducing the electronic education that expects introduction and development of digital multimedia educational resource for students training. The Pedagogical high schools in the first place must be included in processes of the renovation, preparing teachers, having modern computer technology skills, got prettier theoretical preparation, capable to work weder the conditions of variant education, as well as knowing how to teach and learn, using modern achievements.

Key words: Information technologies, integral, computer facilities.

ӘОЖ 165:37.025.7:371.26:371.3

ЭЛЕКТРОНДЫ ОҚЫТУДЫ ЖҮЗЕГЕ АСЫРУДА ОҚУШЫЛАРДЫҢ МЕТАТАНЫМДЫҚ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІН ЕСКЕРУДІҢ МАҢЫЗДЫЛЫҒЫ

Н.Ж. ИБРАГИМОВА, педагогика ғылымдарының кандидаты,
Г.А.ТҰЯҚБАЕВА, магистрант
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Қазіргі таңда қоғамның дамуы адам өмірінің барлық салаларына озық ақпараттық технологияларды интеграциялаумен байланысты болуда. Осы талаптар отандық білімді реформалау және оқу үрдісіне инновациялық технологияларды ендіру, сонымен қатар, осы технологияларды оқу үрдісінде қолдану бойынша ғылыми-педагогикалық зерттеулерді жүргізу қажеттілігін тудыруда.

Елбасы Н.Назарбаевтің Қазақстан халқына Жолдауында «Біз білім саласын модернизациялауды жалғастыруымыз қажет. Сапалы білім Қазақстанның индустриалды және инновациялды дамуының негізі болуы тиіс» деп атап өтті [1].

Қазіргі таңда республикамызда мемлекеттік бағдарламалар белсенді түрде іске асырылуда: 2011-2020 жж. арналған Қазақстандық білім беру жүйесін дамыту бағдарламасының бір тапсырмасы «Электронды оқыту жүйесін» ендіру (e-learning). Электрондық оқыту деп:

- қосымша оқытуды қамтамасыз ету немесе оқытудың дәстүрлі әдістерін және білімдік процесс субъектілерінің өзара әрекеттестігін ішінара алмастыру үшін АҚТ-ды пайдалану;
- білімдік процесс субъектілері (білім беруші/білім алушы) мен ақпараттық қатынастық технологиялар арасындағы кірігу;
- АКТ (CD-ROM, DVD және Интернет) арқылы жүзеге асырылатын оқу іс-әрекеті, контентті жеткізудің синхронды және асинхронды тәсілдері;
- Оқытудың бағдарламалық құралдарымен, компьютерлермен, жергілікті және/немесе ауқымды желілермен және бағдарланған оқыту құралдарын пайдаланып білімдерді (е-материалдар, е-курс) жеткізу түсініледі [2].

2007- 2012 жж. мемлекеттік бағдарламаның нәтижесінде білім саласы жүйелі дамуда және әлемдік стандарттарға классификациялануда.

Білім жүйесін реформалауға бағытталған бағдарламалар келесі стратегиялық міндеттерді шешуі көздейді:

- Барлық әлемдік ақпараттық білім ресурстарына оқушылардың және мұғалімдердің on-line қолжетімділігін қамтамасыз ету;
- Үздіксіз және динамикалық білім беру қызметін қамтамасыз ету;
- Ақпараттық-коммуникациялық технологиялар (АКТ) арқылы білім сапасын көтеру;
- АКТ арқылы әлемдік білім беру ортасына қосылу;
-АКТ көмегімен орталықтандырылған мониторинг, анализ және білім беру ұйымдарын басқару.

e-learning жобасын іске асыру 2 кезеңде жүргізілуде 1 кезеңінде республикамыздың білім беру ұйымдарының 50%, ал 2 кезеңде 90 % білім мекемелері қолдана бастайды.

Электронды оқыту келесідей компоненттерден тұрады:

- мұғалімнің автоматтандырылған жұмыс орны (электронды журнал, күнделік, жоспар, ата аналарға SMS хабарлама)
- автоматтандырылған басқару жүйесі
- сандық білім ресурстары – кітапханалар, порталдар (электронды оқулықтар, ойындар, треножерлар, вертуальді зертханалар).

«Электронды оқыту жүйесі» жобасы аясында білім беру ұйымдары компьютерлік жабдықтармен, кеңжолақты интернет желісімен қамтамасыз етілуде.

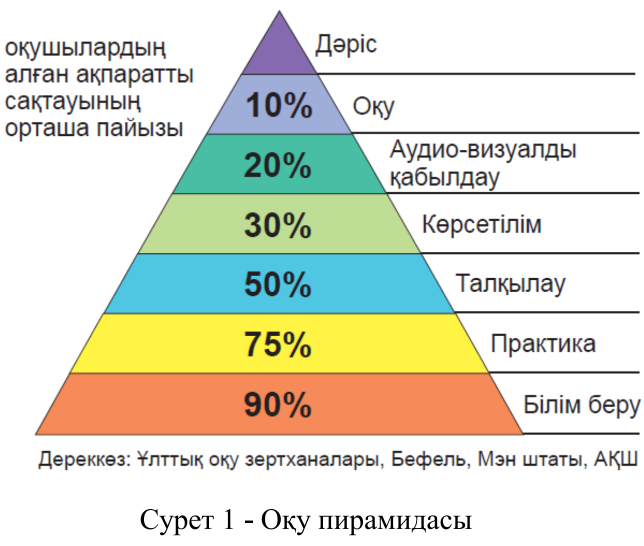
Білім беру жүйесін ақпараттық-коммуникацияның мүмкіндігін толық, кеңінен қолданатын жаңа педагогикалық тәсілдерсіз жетілдіру мүмкін емес.

Бұл ретте білікті мұғалім үшін теориялық және тәжірибелік білімдер өзара тығыз байланыста болуы тән. АКТ енгізілген кезде, теориялық және тәжірибелік білімдердің біртұтастығы оларды тиімді қолдануды қамтамасыз етеді, ал бұл оқыту және оқу үрдістерін жақсартуға жағдай жасайды. Осыған байланысты оқытуда қолданылатын әдіс-тәсілдер, әдістемелер, технологиялар жаңартылып отыруы қажет.

А.В.Уваровтың пікірі бойынша «Мектеп жаңаша жұмыс істеуі үшін онда компьютерлерді әкелу мен педагогтарды компьютерлік сауаттылыққа оқыту жеткіліксіз. Осылармен бірге оқу жұмысының мазмұны мен ұйымдастыруын өзгертуге оған көмектесу керек».

Әлемдік практикада электронды оқыту заманауи білім берудің ажырамас бөлігі болып отыр. АКТ-ның графикалық, мультимедиалық мүмкіндіктерін оқу процесінде қолдану, интерактивті ойындар, симуляторларды пайдалану оқу материалдарын меңгеруге және оқу процесінің сапасы мен нәтижесіне оң әсерін тигізеді. Электронды оқулықтарда, тренажерлар мен зертханаларда қарастырылып отырған құбылыстардың өзара байланысын және олардың негізін ашатын анимациялар ерекше орын алады.

1980 жылдары АҚШ-та жүргізілген зерттеулер (Ұлттық оқу зертханалары, Бефель, Мэн штатында) нәтижесінде оқытуда қолданылған түрлі әдістердің тиімділігін көрсеткен. Олар оқушылардың алған ақпаратты есте сақтау мен меңгерудің орташа пайызыдарын анықтаған. Бұл нәтижелер «Оқу пирамидасында» сызбасында (№1 сурет) келтірілген дәріс (оқу) форматы ең төменгі, ал аудио-визуалды және көрсетілім тек ұсынылған білімнің 1/3 үлесін көрсетуде.



Сурет 1 - Оқу пирамидасы

Осыған орай, оқушылар электронды оқулықта берілген мәтінді оқып қана қоймай, сұрақтарға жауап бере отырып, өзара талқылап оқу үрдісінің белсенді қатысушысы болуы керек.

Ғылыми зерттеу нәтижелері сабақта диалогтің маңызды рөл атқаратынын көрсетті. Мерсер мен Литлтон өз еңбектерінде диалог сабақта оқушылардың қызығушылығын арттырумен қатар, олардың білім деңгейінің өсуіне үлес қосатындығын атап көрсетеді. Зерттеулерде ересектермен интерактивті қарым-қатынас пен достарымен бірігіп жүргізілген жұмыстың балалардың оқуына және когнитивті дамуына әсер ететіндігі айтылған [3].

Выготскийдің оқытудағы сөздің, сөйлеудің негізгі рөлі туралы пікірі эмпириялық зерттеуде қолдау тапқан. Барнстың зерттеуі бойынша сыныпта тіл қаншалықты қолданылса, оқушылардың оқуына соншалықты әсер ететінін айтады. Оқыту мұғалімді селқос тыңдағанда ғана емес, вербалды құралдарды қолдану нәтижесінде, яғни сөйлесу, талдау және дәлелдеу барысында жүзеге асатынын көрсетті [4].

Электронды оқытуда мұғалім әр оқушының танымдық ерекшеліктері мен қажеттіліктерін ескеру қажет. Білім беру бағдарламасының басында мұғалімдер оқушылар не біледі, оларда қандай қате пайымдаулар бар және бұны қалай түзету дұрыс екенін білу үшін арнайы құралдарды пайдаланады. Оқу үдерісінің нәтижелі болуы мұғалімдердің оқушы өздігінен меңгеріп, таныта білген білім-дағдылары мен амал, көзқарастарын зейін қойып, зерделей білген білім модельдері аясында ғана жүзеге асырылады. Бұл үдерісте оқушылар метатану үдерісі арқылы түсіну, бақылау және оқу тәжірибесіне қадағалау жүргізу қабілеттерін дамытады.

«Оқуды үйретудің» қозғаушы күші «*метатану*» болып табылады. Метатану «таным туралы тану» деп анықталады және өзінің ойлау қабілеттерін түсінудің айрықша түрі. Бұл үдерісте мұғалім оқушыға:

- білім қоятын талаптарды түсінуге;
- жеке ойлау үдерістерін және олардың жұмыс қағидаттарын зерттеуге;
- тапсырмаларды орындау стратегияларын әзірлеуге және ойластыруға;
- нақты міндет үшін сәйкес келетін стратегияларды таңдауға көмектеседі.

Мұғалімдер, өз кезегінде, өзінің сабақ беруіне емес, оқушылардың оқу ептілігін дамытуға назар аударуы тиіс. Осы мақсатта мұғалім оқыту ортасын құру керек, соның арқасында оқушылар ақпаратты енжар қабылдамай, оқу үдерісіне белсенді қатысатын болады.

Негізгі идея білім мен түсінік оқушы бойында қалыптасады, ал мұғалім – бұл үдерісте көмек көрсететін жан.

Оқушылардың оқу жетістіктерін бағалау он-лайн тест тапсырумен жүзеге асады және тест нәтижесінің графигін көре алады. Дегенмен суммативті бағалаумен қатар қалыптастырушы бағалаудың маңызы зор.

Қалыптастырушы бағалау – оқушылар өз білімдерінің деңгейін өздері бағалайтын, кейін мұғалімдермен бірге өзін-өзі жетілдіру жолындағы болашақ қадамдарын айқындайтын үдеріс. Қалыптастырушы бағалауды пайдалану арқылы мұғалімдер оқушылардың қойылған мақсатқа жетуде таңдаған стратегияларының табыстылығын талдай отырып, кері байланыс әдісімен өз білімін қадағалауға және бағалауға көмектеседі [5].

Электронды оқулықтар мен білім беру ресурстарының басқа да түрлерінде оқушының жауаптары елеусіз қалмайтын шынайы қарым-қатынастың элементтерін ендіру арқылы оқыту үшін бағалауды жүзеге асыру болады.

Егер мұғалімдер оқу үдерісін оқушылар білімді игеріп қана қоймай, оқуға деген өз қабілетін дамыта алатындай етіп әзірлей алса, бұл тиімдірек оқуға мүмкіндік береді және оқушыларға өзінің білім алуына жауапкершілігін артады. Бұл өз кезегінде «өзін-өзі реттеу» дағдысын қалыптастырады.

Электрондық оқулық, бейнероликтердің, аудиооқиға желістерінің және тестілеудің бар болуымен шектелмей нақты интерактивтікті тапсырмалары мақсатты бағытталған және олар пәндік және жалпыоқу біліктері мен машықтарын қалыптастыруы тиіс.

Түрлі үйретуші және тексеруші тапсырмалар: карта мен сызбалармен жұмыс істеу, кроосвордтарды шешуді, тұжырымдамалық карта құру, хронологиялық оқиғаларды даталармен сәйкес қалпына келтіруді, шығармашылық міндеттерді орындауды және т.б. тапсырмалар беру тиімді балмақ [6].

Интерактивтік тапсырмалардың маңыздылығы мезеттік кері байланысты орнатады, мысалы, оқушы өз жауабының дұрыстығын бірден тексере алады. Сондай-ақ оқушылардың өзара басып шығару мүмкіндігі бар оқушылардың жазба жауабын білдіретін тапсырмаларды, бірлесіп талқылауға болатын сұрақтар ауқымын қамтуы тиіс.

Осы арқылы оқушыларды белсенді өзіндік жұмысқа қосуға, материалды меңгеруді ынталандыруға, өзіндік білім алуға үйретуге мүмкіндік береді.

Сонымен электронды оқыту жүйесін қолдану, оқу үрдісінің барлық қатысушылары өзара қарым-қатынас орын алған оқу процесімен интеграцияланғанда ғана тиімді болмақ.

Әдебиеттер:

1. Назарбаев Н.Ә. «Болашақтың іргесін бірге қалайық» 2011 жылғы Қазақстан халқына Жолдауы (28.01.2011ж.) // Егемен Қазақстан. - 2011. - 30 қаңтар.

2. Беркімбаев К. Электрондық оқулықтарды пайдаланудың педагогикалық ұстанымдары // Қазақстан мектебі. - 2008. - №11. - 13-18 бб.

3. Мерсер Н., Литлтон К. Диалог және ойлауды дамыту. Әлеуметтік мәдени тәсіл // Нью-Йорк Routledge, 2007.

4. Выгодский Л.С. Қоғамдағы сана // Ке́мбридж. - Гарвард университеті баспасы, 1978.

5. Барнс Д. Сыныптағы тіл және оқыту // Journal of Curriculum Studies. - 1971. - 3(1). -27–38 бб.

6. Ұлттық ақпараттандыру орталығы АҚ // Электрондық оқытудың тұжырымдамасы: қазақстандық көзқарас. – Алматы, 2011.

Түйіндеме

Мақалада электронды оқытуды жүзеге асыруда мұғалім балалардың қалай оқитынын назарда ұстай отырып, әр оқушының танымдық ерекшеліктері мен қажеттіліктерін ескерудің маңыздылығы тиімдірек оқуға мүмкіндік береді. Электронды оқыту жүйесін ақпараттық-коммуникацияның мүмкіндігін толық, кеңінен қолданатын жаңа педагогикалық тәсілдермен интеграциялау сапалы білім мен оқушылардың «өзін-өзі реттеу», бағалау, сын тұрғысынан ойлау дағдыларын жетілдіреді.

Электронды оқулықтардағы интерактивті тапсырмалардың белсенді өзіндік білім алуға, материалды меңгеруді ынталандыратындығы көрсетіледі.

Кілт сөздер: қалыптастырушы бағалау, виртуальдық тренажерлар, электронды оқулық, интерактивтік тапсырмалар.

Резюме

В данной статье освещаются вопросы электронного обучения, в реализации которого учителям необходимо учитывать потребности и познавательные способности каждого учащегося для эффективного обучения. Интеграция электронного обучения с новыми педагогическим подходами, с использованием всех возможностей информационо-коммуникационных технологий, развивает навыки саморегуляции, критического мышления и оценивания.

Задания в электронных учебниках развивают у учащихся активное самостоятельное освоение материала и повышают их мотивацию.

Ключевые слова: формативное оценивание, виртуальные тренажеры, электронный учебник, интерактивные задания.

Summary

This article is about the effectiveness of e-learning, teachers should take into account the necessities and cognitive particularities of each pupil. Integration of e-learning and new pedagogic approaches such as “self-regulatory”, assessment, critical thinking gives an opportunity to use ICT.

Materials of electronic-books arise motivations students to individuall study.

Key words: assessment for learning, virtual simulators, e-book, interactive job.

ӘОЖ 517.518

МЕКТЕП КУРСЫНДАҒЫ ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕСІН ШЕШУДЕ ДЕҢГЕЙЛЕП ОҚЫТУДЫ ҚОЛДАНУ

Қ.Е. КЕРВЕНЕВ, Н.Қ.МЕДЕУБАЕВ

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

XXI ғасырдың бет - бейнесі біліммен өлшенбек. Ертеңгі келер күннің бүгінгіден гөрі нұрлы болуына ықпал етіп, азамат қоғамын алға апаратын құдіретті күш тек білімге ғана тән. Қай елдің болсын өсіп – өркендеуі, өркениетті дүниеде өзіндік орын алуы оның ұлттық білім жүйесінің деңгейіне, даму бағытына тікелей байланысты.

Қазақстан Республикасының Білім туралы Заңында: «Білім беру жүйесінің басты міндеті – ұлттық және азаматтық құндылықтар, ғылым мен практика жетістіктері негізінде жеке адамды қалыптастыруға және кәсіби шыңдауға бағытталған білім алу үшін қажетті жағдайлар жасау, оқытудың жаңа технологиясы мен деңгейлеп әдіс – тәсілдерді енгізу, білім беруді ақпараттандыру, халықаралық ғаламдық коммуникациялық желілерге шығу»-деп білім беру жүйесін одан әрі дамыту міндеттерін көздейді [1]. Бұл міндеттерді шешу үшін мектеп ұжымдарының, әрбір мұғалімнің күнделікті ізденісі арқылы, барлық жаңалықтар мен қайта құру, өзгерістерге батыл жол ашарлық жаңа практикаға, жаңа қарым – қатынасқа өту қажеттігі туындайды.

Жылдар бойы сабақ жүргізу нәтежесінде оқушының білімі сапасын көтеруге, олардың пәнге деген қызығушылығын артыру барысында жан-жақтылыққа ұмтыламыз және ізденеміз. Алдында отырған оқушының білім деңгейі, білімді меңгеру дағдысы барлығында бірдей болу мүмкін емес жағдайда. Сондықтан Қараевтың насихаттап жүрген деңгейлеп оқыту технологиясында оқушының жан-жақты мүмкіндігін ескере отырып жеңілден ауырына қарай деген принципті ұстанумен жүйелі түрде қолданылатын білім, білік, дағдыларының тұрақты болуына өз бетімен жұмыс істеу қабілетінің дамуына ықпал ету [2].

Ол үшін оқушылар мынандай әдіс-тәсілдерді қолдану қажет:

Берілген тапсырмалардың ерекшелігіне көңіл бөлу.

Берілген тапсырма қызықты маңызды болған кезде ғана оқушылардың сабаққа қызығушылығы артатынын есте сақтау.

Оқыту технологиясының негізгі сатылары.

1. Жаңа тақырыпты түсіндіру.
2. Төменнен, жоғары қарай деңгейлеп тапсырмалар беру.
3. Оқушылардың тақырыптан алған білімдерін бекіту.
4. Оқушылардың білімдеріне сай ілестермелер тарату. Яғни, «5» «4» «3» тік білімге сай.
5. Оқушылардың білімін қолма қол бағалау.

Мақсатты:

1. Әр оқушының оның қабілеті мен мүмкін деңгейіне қарай оқыту.
2. Деңгейі төмен оқушылар мен жеке жұмыс жасау, қолдау көрсету.
3. Дарынды оқушының тереңірек білім алуына жағдай жасау.
4. Оқушының ынтасын қабілетін арттыру.

Ерекшелігі:

1. Таланттар, дарынды оқушылар өздерінің қабілеті мен икемділігін одан әрі бекіте түседі, әлсіздер оған ниет білдіріп, сенімсіздіктен айрылады.
2. Оқушылардың оқуға деген ынтасы артады.
3. Білім дәрежесі бірдей топтарды оқыту ісі жеңілдейді.

Күтілетін нәтеже:

1. Оқушылардың писихологиалық ерекшелігін, ақыл-ойының дамуы және өзін-өзі жетілдіру.
2. Дарынды балалар болса, оқушының зерттеу жұмыстарын дамыту.
3. Мұғалімнің жан-жақты дамуына мүмкіндік туғызады.

Иррационал теңсіздіктер – мектеп математика курсының ең күрделі бөлімдерінің бірі, ал енді оған өте аз уақыт берілетінін ескерсек, онда оқушылар бұл бөлімді мүлдем дұрыс игермейтіндігін көреміз. Тіпті иррационал теңдеулерді жақсы шығаратын оқушылардың өздері де, иррационал теңсіздіктерді шешуде қиындықтарға ұрынады. Иррационал теңсіздіктерді шешу қиындауының себебі, онда теңдеудегідей орнына қою, тексеру мүмкіндіктері жоқ, сондықтан барлық түрлендірулерді теңшамалы ету қажет.

Егер иррационал теңдеулердегі теңдікті келесі теңсіздіктің біріне ауыстырсақ: >, $\geq$, <, $\leq$, то онда иррационал теңсіздік аламыз. Сондықтан иррационал теңсіздік деп белгісіз шамалар түбір астында болып келген теңсіздіктерді айтамыз [3].

Мұндай теңсіздіктерді шешу үшін теңсіздіктің екі бөлігін де дәрежелеу арқылы рационал теңсіздікке түрлендіреміз.

Иррационал теңсіздіктерді шешуде қателеспес үшін, алдымен теңсіздіктің ММЖ (мүмкін мәндер жиыны) тауып алуымыз керек, содан соң оның тек осы аралыққа кіретін шешімдерін ғана қарасытыру қажет.

Иррационал теңсіздіктерді шешу барысында ескеретін ережелер: теңсіздіктің екі бөлігін де тақ дәрежеге шығарсақ, бастапқы теңсіздікке теңшамалы теңсіздік шығады.

Ал егер теңсіздікті шешу барысында жұп дәрежеге шығаратын болсақ, онда бөгде түбірлер (тексеру арқылы көз жеткізуге болады) пайда болуы мүмкін, яғни жұп дәрежеге шығарғанда бір мезгілде түбірлер жоғалуы да, бөгде түбірлер жасалуы да мүмкін.

Мысалға, квадраттап жіберсек:

- дұрыс теңсіздік $-1<2$, алатынымыз дұрыс теңсіздік $1<4$;
- дұрыс теңсіздік $-5<2$, алатынымыз дұрыс емес теңсіздік $25<4$;
- дұрыс емес теңсіздік $1<-2$, алатынымыз дұрыс теңсіздік $1<4$;
- дұрыс емес теңсіздік $5<2$, алатынымыз дұрыс емес теңсіздік $25<4$.

Дұрыс және дұрыс емес теңсіздіктер комбинациялары шығатындағын көріп отырмыз.

Алайда мұнда қолданылатын негізгі дұрыс тұжырым: егер теңсіздіктің екі бөлігін де жұп дәрежеге шығарсақ берілген теңсіздікке тең шамалы теңсіздік, тек берілген теңсіздіктің екі бөлігі де оң болған жағдайда ғана, шығады.

Иррационал теңсіздіктерді шығару әдістеріне тоқталайық. Бұл тақырып жай сыныптарда жеке оқытылмайды. Ал біздің жағдайымызда бір параграф болып берілген. Екі теорема көрсетілген.

Теорема 1: Егер теңсіздіктің таңбасын өзгертпей екі бөлігін тақ көрсеткіш дәрежеге шығарсақ, онда шыққан теңсіздік ізделіндіге теңбе-тең.

Теорема 2: Егер теңсіздіктің таңбасын өзгертпей екі бөлігін жұп көрсеткіш дәрежеге шығарсақ, онда теңсіздіктің әр бөлігі теріс емес болғанда ғана шыққан теңсіздік ізделіндіге теңбе-тең.

Есептерді шығару барысында мына теңбе-теңдіктерді білу қажет:

1) $\sqrt{f} < \varphi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \varphi \geq 0 \\ f \leq 0 \\ f < \varphi^2 \end{cases}$

4) $\sqrt{f} \geq \varphi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \varphi < 0 \\ f \leq 0 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} \varphi \geq 0 \\ f \geq \varphi \end{cases}$

2) $\sqrt{f} > \varphi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \varphi < 0 \\ f \geq 0 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} \varphi \geq 0 \\ f > \varphi^2 \end{cases}$

5) $\sqrt{f} < \sqrt{\varphi} \;\Leftrightarrow\; 0 \leq f < \varphi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f \geq 0 \\ f < \varphi \end{cases}$

3) $\sqrt{f} \leq \varphi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \varphi \geq 0 \\ f \geq 0 \\ f \leq \varphi^2 \end{cases}$

6) $\sqrt{f} > \sqrt{\varphi} \;\Leftrightarrow\; f > \varphi \geq 0$.

Жаттығулар жүйесі бес жаттығудан тұрады. Үшеуі иррационал теңсіздіктерді жоғарыдағы теңбе-теңдіктерді қолданып шешу. Төртіншісі параметрі бар теңсіздіктер. Бесіншісі модулі бар теңсіздіктер. Осы берілген жаттығулар жүйесі материалды меңгеруге жеткілікті деп ойлаймыз.

Эквивалентті жүйеге немесе рационал теңсіздіктер жиынтығына келтіру әдісі

Иррационал теңсіздіктерді шығарудың негізгі әдісі берілген теңсіздікті эквивалентті жүйеге немесе рационал теңсіздіктер жиынтығына келтіру болып табылады.

Ең қарапайым иррационал теңсіздіктің түрлері:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ немесе $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ немесе $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ немесе $\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)}$.

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ немесе $\sqrt{A(x)} \le B(x)$ иррационал теңсіздіктері келесі теңсіздіктер жүйесіне тең шамалы

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} A(x) \le B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \quad . \qquad (1)$$

(1) жүйедегі бірінші теңсіздік бастапқы теңсіздікті дәрежелегенде шыққандағы нәтиже, екінші теңсіздік берілген теңсіздікте түбірдің бар болу шартын көрсетеді, ал жүйедегі үшінші теңсіздік бұл теңсіздікті квадраттауға болу шартын анықтайды.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ немесе $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$ иррационал теңсіздіктері келесі теңсіздіктер жүйесіне тең шамалы

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \text{ немесе } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) \ge B^2(x), \\ B(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \quad . \qquad (2)$$

(2) схемадығы бірінші жүйеге тоқталайық. Бұл жүйенің бірінші теңсіздігі бастапқы теңсіздікті квадраттағаннан шығып отыр, екіншісі – мұны жүзеге асыруға болатын шарт.

(2) схемадығы екінші жүйе оң бөлігі теріс болып, квадраттауға болмайтын жағдайға сәйкес. Оған қажеттілік те жоқ: бастапқы теңсіздіктің сол бөлігі – арифметикалық түбір – ол анықталып отырған барлық x үшін теріс емес. Сондықтан сол бөлігі анықталған барлық x үшін бастапқы теңсіздік орындалады. Екінші жүйенің бірінші теңсіздігі сол бөлігінің бар болу шартын білдіреді.

$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ немесе $\sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}$ иррационал теңсіздіктері келесі теңсіздіктер жүйесіне тең шамалы

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} A(x) \ge B(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \quad . \qquad (3)$$

Бастапқы теңсіздіктің екі бөлігі де өзі анықталған барлық x үшін теріс емес болғандықтан, оны квадраттауға болады. (3) жүйедегі бірінші теңсіздік бастапқы теңсіздікті дәрежелеу негізінде пайда болады. Екінші теңсіздік бастапқы теңсіздікте түбірдің бар болу шартын көрсетеді, алайда, $A(x) \ge 0$ теңсіздігі бұл жағдайда автоматты түрде орындалады.

(1)–(3) схемалары – иррационал теңсіздіктері шешу барысындағы негізгі құралдарымыз болып табылады. Оған барлық дерлік теңсіздіктер әкелінеді. Бірнеше мысалдар қарастырайық.

Мысал 1. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{10x+5} < -3$.

Шешімі. Теңсіздіктің оң бөлігі теріс ал сол бөлігі өзі анықталған барлық x үшін оң екенін байқаймыз. Сондықтан теңсіздіктің шешімі болмайды. Жауап. Шешімі жоқ.

Мысал 2. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{3x-9} > -5$.

Шешімі. Алдыңғы мысалдағдай, теңсіздіктің оң бөлігі теріс ал сол бөлігі өзі анықталған барлық x үшін оң екенін байқаймыз. Ол сол бөлігінің $x \ge 3$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін орындалатынын білдіреді. Жауап. $x \in [3;+\infty)$.

Мысал 3. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{2x-3} < 1$.

Шешімі. (1) схемаға сәйкес мұндай типті теңсіздіктерді шешу үшін оған сәйкес рационал теңсіздіктер жүйесін жазып аламыз

$$\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \ge 0. \end{cases}$$

$B(x)=1\geq 0$ шарты барлық x үшін орындалған және оның жазылған жүйеге ену қажеттілігі жоқ. Жауап. $\left[\frac{3}{2};2\right)$.

Мысал 4. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{4x-3}>1$.

Шешімі. Бұл теңсіздік (2) схемаға сәйкес шығарылады. Берідген жағдай үшін $B(x)=1$, сондықтан берілген теңсіздікке теңшамалы теңсіздікті бірден жазуға болады

$4x-3>1^2$. Жауап. $x>1$.

Мысал 5. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{x+18}<2-x$.

Шешімі. Бұл теңсіздік (1) схемаға сәйкес шығарылады. Бастапқы теңсіздікке теңшамалы теңсіздіктер жүйесі келесі түрде жазылады

$$\begin{cases} x+18\geq 0, \\ 2-x\geq 0, \\ x+18<(2-x)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -18, \\ x\leq 2, \\ x^2-5x-14>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18\leq x<2, \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>7, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -18\leq x<-2.$$

Жауап. $x\in[-18;-2)$.

Мысал 6. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{x^2+x-2}>x$.

Шешімі. Бұл теңсіздік (2) схемаға сәйкес шығарылады. Ол екі жүйелер жиынтығына теңшамалы

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ x^2+x-2\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0, \\ x^2+x-2>x^2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -2, \\ x\geq 1, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0, \\ x>2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -2, \\ x>2. \end{array}\right.$$ Жауап. $x\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$.

Мысал 7. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{2x+1}>\sqrt{2-3x}$.

Шешімі. (3) схемаға сәйкес, берілген теңсіздік келесі теңсіздіктер жүйесіне теңшамалы

$$\begin{cases} 2x+1>2-3x, \\ 2-3x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5}, \\ x\leq\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{3}.$$ Жауап. $\frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{3}$.

Келесі түрдегі иррационал теңсіздіктердің шешімін қарастырайық

$\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}<C(x)$.

$\sqrt{A(x)}\geq 0$, $\sqrt{B(x)}\geq 0$ болғандықтан, онда келесі $A(x)\geq 0$, $B(x)\geq 0$, $\sqrt{B(x)}<C(x)$ (сәйкесінше $\sqrt{A(x)}<C(x)$) шарттары орындалуы тиіс. Бұл шарттар орындалатын жиында берілген теңсіздік келесі теңсіздікке теңшамалы

$A(x)<(C(x)-\sqrt{B(x)})^2$

(сәйкес теңсіздікке $B(x)<(C(x)-\sqrt{A(x)})^2$), бұлар жоғарыда қарастырылған теңсіздік типтеріне сай.

Мысал 8. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}<6$.

Шешімі. Берілген теңсіздік келесі теңсіздіктер жүйеіне теңшамалы:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x+7 \ge 0, \\ \sqrt{x} < 6, \\ x+7 < (6-\sqrt{x})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge -7, \\ x < 36, \\ x+7 < 36 - 12\sqrt{x} + x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 36, \\ 12\sqrt{x} < 29, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 36, \\ 0 \le x < \dfrac{841}{144}. \end{cases}$$

Бастапқы теңсіздіктің шешімі жүйедегі барлық теңсіздіктерді қанағаттандыратын аралық, яғни $\left[0; \frac{841}{144}\right)$. Жауап. $x \in \left[0; \frac{841}{144}\right)$.

Енді біраз күрделі есептерді шешу жағдайларын, яғни оларды жоғарыда қарастыырылған, қарапайым теңсіздіктерге түрлендіру арқылы шығарылатын есептер қарастырайық. Мысалдардың барлығы иррационал теңдеулерді шешу жолдарына аналогиялы түрде шығарылады.

Егер теңсіздікте екі квадрат радикал кездесетін болса, онда, бұл операцияларға қажетті жағдайлар жасай отыра, оны екі рет квадраттауға тура келеді.

Мысал 9. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2$.

Шешімі. Екі бөлігі де теріс болмауы үшін бір радикалды теңсіздіктің оң жағына шығарып, квадраттауға қолайлы етіп аламыз:

$$\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-2} + 2 \Leftrightarrow 2x+3 > x-2+4\sqrt{x-2}+4 \Leftrightarrow x+1 > 4\sqrt{x-2}.$$

Біз (1) схемаға сәйкес, қарапайым теңшамалы теңсіздіктер жүйесіне әкелеміз:

$$\begin{cases} x-2 \ge 0, \\ x+1 > 0, \\ 16(x-2) < x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x^2 - 14x + 33 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 11 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x < 3, \\ x > 11. \end{array}\right.$$

Жауап. $x \in [2;3) \cup (11;+\infty)$.

Ескере кететіні, $x+1 > 4\sqrt{x-2}$ теңсіздігін алғанда, біз белгісіздің мүмкін болатын мәндерін жазып алған жоқпыз, себебі онда $\sqrt{x-2}$ өрнегі болды, оның $x \ge 2$ болғанда мәні болады, ал бұл x мәнінде $\sqrt{2x+3}$ өрнегінің де мәні бар болады.

Мысал 10. Теңсіздікті шешіңіз $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6} < 1$.

Шешімі. Белгісіздің мүмкін болатын мәндерін тауып алайық:

$$\begin{cases} x^2 - 25 \ge 0, \\ x+6 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ x \ge 5, \end{array}\right. \\ x \ne 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -6, \\ -6 < x \le -5, \\ x \ge 5. \end{array}\right.$$

Радикалдан құтылу үшін теңсіздікті квадраттау жеткілікті. Ал ол үшін теңсіздіктің екі бөлігі де теріс емес болуы керек, бұл шарт $x+6 > 0$ (себебі теңсіздікке кіретін бұдан басқа барлық өрнек теріс емес) болғанда ғана орыындалады. Бірақ бұл шартқа сай берілген теңсіздікті оң $x+6$ өрнегіне көбейтуіміз керек.

Сонымен, егер $x > -6$ болса, онда берілген теңсіздік түрленеді және келесі түрде ешіледі:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \le -5, \\ x \ge 5, \end{array}\right. \\ \sqrt{x^2-25} < x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \le -5, \\ x \ge 5, \end{array}\right. \\ x^2 - 25 < x^2 + 12x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \le -5, \\ x \ge 5, \end{array}\right. \\ x > -\dfrac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{61}{12} < x \le -5, \\ x \ge 5. \end{array}\right.$$

бұл жағдайда, $x < -6$ орындалғанда, берілген теңсіздік орындалады, себебі оның теріс болып келген сол бөлігі оң болатын оң бөлігінен кіші болады.

Жауап: $x \in (-\infty;-6) \cup \left(-\frac{61}{12};-5\right] \cup [5;+\infty)$.

Тағы да ескеретіні, соңғы теңсіздікті шығаруда (1) және (2) схемаларынан оңай ғана шығатын жаңа схема алдық:

$$\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) > 0, \\ A(x) > B^2(x); \end{cases} \qquad (4)$$

$$\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) > 0, \\ A(x) \geq B^2(x); \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)} < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B(x) > 0, \\ 0 \leq A(x) < B^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} B(x) < 0, \\ A(x) > 0; \end{cases} \end{array} \right. \qquad (5)$$

$$\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)} \leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B(x) > 0, \\ 0 \leq A(x) \leq B^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} B(x) < 0, \\ A(x) \geq 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

Егер мұндай теңсіздіктің оң бөлігінде бір саны емес, басқа қандай да бір сан тұрса, онда теңсіздіктің екі бөлігін де осы санға бөліп жіберіп, таңбасын сай (4) немесе (5) схемаларға сәйкес теңсіздіктерге көшеміз.

Теңсіздіктің екі бөлігін де функцияға көбейту

$\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b}$ және $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}$ өрнектері бір-біріне түйіндес деп аталады. Бұлардың көбейтіндісі $\alpha^2 a - \beta^2 b$ өрнегі болатыны белгілі, ол өрнекте a және b түбірлері жоқ. Сондықтан кейбір есептерде теңсіздіктің екі бөлігін де квадраттап, ұзақ есептеулер жүргізу орнына, берілген теңсіздікке түйіндес теңсіздікке көбейтіп алған жөн.

Мысал 11. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+3} < 2x - 1$.

Шешімі. ММЖ табамыз:

$$\begin{cases} 5x+1 \geq 0, \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}.$$

Берілген теңсіздіктің екі бөлігін де, ММЖ да оң болатын, оның сол бөлігінің түйіндес өрнегіне көбейтеміз:

$$(5x+1) - (x+3) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3}\right) \Leftrightarrow 2(2x-1) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3}\right).$$

ары қарайғы шешімі, алынған өрнектің оң және сол бөлігіндегі ортақ $(2x-1)$ көбейткіштің таңбасына тәуелді.

Егер ол нольден кіші болса, яғни $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{2}$ болса, онда осы теріс көбейткішке қысқартып, келесі теңсіздікке көшеміз:

$\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3} < 2$,

Осыдан тура квадртаттау жолымен алатынымыз (себебі бұл теңсіздіктің екі бөлігі де оң) $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{4-\sqrt{19}}{2}$.

Екінші жағдайда ортақ көбейткіш оң (яғни $x > \frac{1}{2}$ мәнінде), осыған қысқарту арқылы алатын теңсіздігіміз

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3} > 2,$$

Осыдан тура квадрттаттау жолымен алатынымыз (себебі бұл теңсіздіктің екі бөлігі де оң) , ол $x > \frac{1}{2}$ болғанда дұрыс болып табылады.

Енді үшінші мүмкін болатын жағдайда оның нольге тең болған түрі: онда алатыныымыз $0 > 0$, дұрыс емес.

Жауап: $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{4-\sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Жаңа айнымалы енгізу әдісі

Иррационал теңсіздіктері шығару барысында иррационал теңдеулерді шығарғандай, жаңа айнымалы енгізу әдісін қолдануға болады. Кейде теңсіздікке енетін иррационал функцияны жаңа айнымалымен ауыстырып, теңсіздігіміз жаңа айнымалыға байланысты рационал теңсіздікке айналдыратын етуге болады.

Мысал 12. Теңсіздікті шешіңіз $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

Шешімі. Бастапқы теңсіздікті келесідей жазып алайық $-9\sqrt[4]{x} + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + 18 \geq 0$.

айнымалыны $t = \sqrt[4]{x}$, $t \geq 0$ ауыстырайық. Сонда алатынымыз

$$\begin{cases} -9t + t^2 + 18 \geq 0, \\ t \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 6, \\ t \leq 3, \end{array}\right. \\ t \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6, \\ 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Сонымен, x айнымалыны табу үшін теңсіздіктер жиынтығын аламыз

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} \geq 6, \\ 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 6^4, \\ 0 \leq x \leq 3^4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1296, \\ 0 \leq x \leq 81. \end{array}\right.$$ Жауап. $x \in [0;81] \cup [1296; +\infty)$.

Мысал 13. Теңсіздікті шешіңіз $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

Шешімі. Жаңа айнымалы енгізейік $\sqrt{15-x} = t$, $t > 0$.

Онда $x = 15 - t^2$ және t айнымалысы үшін де рационал теңсіздік аламыз

$$\begin{cases} \frac{3-(15-t^2)}{t} < 1 \\ t > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - t - 12}{t} < 0 \\ t > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t-4)(t-3)}{t} < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 4. \\ t > 0, \end{cases}$$

Кері ауыстыру жасап x айнымалысын табу қалды:

$0 < \sqrt{15-x} < 4 \Leftrightarrow 0 < 15 - x < 16 \Leftrightarrow -1 < x < 15$. Жауап. $x \in (-1;15)$.

Иррационал теңсіздіктерді оның құрамына енетін функцияның қасиеттерін қолданып шешу

1. Функция монотондылығын қолдану.

Айталық, $(a;b)$ аралығында өспелі $y = f(x)$ функциясы беріліп, $f(x) < c$ (немесе $f(x) > c$) теңсіздігін шешу керек болсын. Егер x_0 – саны $y = f(x)$ теңдеуінің түбірі болсын, сонымен бірге $a < x_0 < b$, онда берілген теңсіздіктің шешімі – бүкіл $(a; x_0)$ аралығы (сәйкес $(x_0; b)$ аралығы) болады. Жалғыз ғана түбірі f монотондығынан шығады. Егер қатаң емес теңсіздік шешу керек болса, онда дәл осындай талдау нәтижесінде жауапқа $f(x_0)$ саны енеді, ал егер функция тұйық немесе жартылай ашық аралықта берілсе, онда жауапқа сәйкес аралықтың ұштары да кіреді.

Мысал 14. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}<6$.

Шешімі. Бұл теңсіздіктің сол жағы өспелі функция (оны $f(x)$ арқылы белгілейік). $x=5$ болғанда сол бөлігі оң бөлігіне тең болады. Бастапқы теңсіздіктің $(x\geq 1)$ ММЖ ескерейік және оны $1\leq x<5$ аралығында қарастырайық. $f(x)<f(5)=6$ мәнін аламыз, тнда берілген теңсіздік орындалады. $x\geq 5$ болғанда, сондай себеппен (f функциясының өспелі болуына байланысты) $f(5)\leq f(x)$, онда берілген теңсіздік орындалмайды. Дәл осылайша барлық мүмкін болатын x үшін тексеріледі, шешімі аяқталды. Жауап: $x\in[1;5)$

2. ММЖ қолдану.

Мысал 15. Теңсіздікті шешіңіз $\log_5 x<\sqrt{1-x^4}$.

Шешімі. Бұл теңсіздіктің ММЖ $0<x\leq 1$ шартын қанағаттандыратын барлық x. Айта кететіні, $x=1$ саны берілген теңсіздіктің шешімі болмайтыны айқын. $0<x<1$ аралығынан алынған барлық x үшін алатынымыз $\log_5 x<0$, ал $\sqrt{1-x^4}>0$. Сондықтан, $0<x<1$ аралығынан алынған барлық x берілген теңсіздіктің шешімі болады. Жауап: $x\in(0;1)$.

Мысал 16. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3}$.

Шешімі. Бұл теңсіздіктің ММЖ $-3\leq x\leq 9$ аралығынан алынған барлық x. Бұл жиынды $-3\leq x\leq 0$ және $0\leq x\leq 9$ аралықтарына бөлеміз.

$-3\leq x\leq 0$ аралығындағы x үшін алатынымыз $\sqrt{x+3}\geq 0$, $\sqrt[4]{9-x}\geq\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$. Сондықтан, бұл аралықта $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}\geq\sqrt{3}$ және сондықтан да, бастапқы теңсіздіктің бұл арлықта шешімі болмайды.

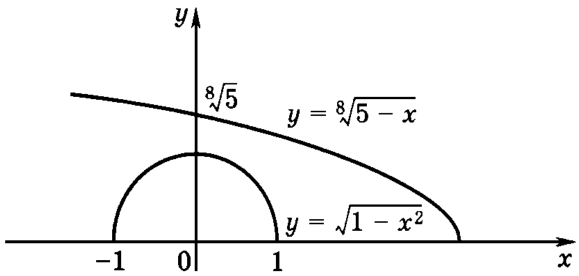
Айталық x айнымалысы $0\leq x\leq 9$ аралығында жатсын, онда $\sqrt{x+3}>\sqrt{3}$ және $\sqrt[4]{9-x}\geq 0$. Сондықтан, $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}>\sqrt{3}$ теңсіздігі x үшін орындалады, және, сондықтан да, бастапқы теңсіздіктің бұл арлықта шешімі болмайды. Жауап: Жауаптары жоқ.

3. Функция графиктерін қолдану

Мысал 17. Теңсіздікті шешіңіз $\sqrt{1-x^2}<\sqrt[8]{5-x}$.

Шешімі. Бұл теңсіздіктің ММЖ $[-1;1]$ аралығынан алынған барлық x болады. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ және $g(x)=\sqrt[8]{5-x}$ фукнцияларының графиктерінің кескіні 6 суретте көрсетілген. Суреттен көріп отырғанымыздай, барлық x үшін теңсіздіктің ММЖ дұрыс болады.

Осыны дәлелдейік. $[-1;1]$ аралығынан алынған барлық x үшін



$0\leq f(x)\leq 1$, ал осындай барлық x үшін алатынымыз $\sqrt[8]{5-x}\geq\sqrt[8]{4}>1$. Яғни, әрбір $x\in[-1;1]$ үшін $f(x)\leq 1<g(x)$. Сондықтан, берілген теңсіздіктің шешімдері $[-1;1]$ аралығынан алынған барлық x болып табылады. Жауап: $x\in[-1;1]$.

Білім сапасы білім беру мазмұны оқыту формалары мен әдістері, технологиялар негізінде анықталады. 12 жылдық білім жағдайында білім сапасын артыруға және нәтежеге бағытталған оқыту технологияларының бірі деңгейлеп саралап оқыту технологиясы. Деңгейлеп саралап оқыту технологиясы пайдалану оқушы белсенділігін артырып білімін саралап қана қоймай қол жетімді нәтежеге жеткізеді көздейді.

Мұнан кейін деңгейлік тапсырмаларды орындай білу керек. Тақырып бойынша жасақталған деңгейлік тапсырмалар жүйесі дамыта оқыту идеясын жүзеге асыруға мүмкіндік береді. Өйткені, ол оқушының ойлауын, елестеу мен еске сақтауын, белсенділігі мен дағдысын, білім сапасыннның дамуын қамтамасыз етеді. [4]

Сонымен қатар, бұл жұмыстағы негізгі қол жеткен мәселелер:

- Қазіргі кезеңдегі мектеп оқушыларына инновациялық-дидактикалық оқыту технологиясы арқылы білім берудің ғылыми - теориялық негізделуі.
- Жаңа педагогикалық технология – деңгейлеп саралап оқыту технологияның мазмұны және оны пәнді оқыту сапасын арттыруда пайдалануы.
- Оқыту үрдісін деңгейлеп оқыту технологиялары арқылы оңтайландыру.
- Оқытуды оңтайландыру тәсілдерінің жүйесі жасалуы.
- Деңгейлеп саралап оқыту технологиясының білім саласында пайдаланудың маңыздылығы анықталуы.
- Деңгейлік тапсырмалап даярлау технологиясы.
- Деңгейлеп саралап оқыту технологиясында оқушы қызметін бағалау.
- Оқушылардың білім, білік, дағдыларын бақылау және тексеру.
- Деңгейлеп-саралап оқыту технологиясында оқытудың белсенді әдістерін пайдалану.
- Деңгейлеп саралап оқыту ерекшеліктерінің анықталуы.

Деңгейлеп саралап оқыту технологияларын пайдаланудың білім беру үрдісіндегі маңызы бүгінгі күні дәлелденуде.

Әдебиеттер:

1. Қазақстан Республикасының Білім туралы Заңы. - 2007.
2. Қараев Ж.А. Педогогическая технология дифференцированного обучения -Алматы, 1999. - 5-21 бб.
3. Егоров А. Иррациональные неравенства // Математика. Первое сентября. – 2002. – №17. – С. 13-14.
4. Баймаханова С. Деңгейлеп саралап оқыту. // Қазақстан мектебі. – 2004.- №10. - 63-67 бб.

Түйіндеме

Мақалада жалпы білім беретін мектепте иррационал теңсіздіктер және олардың жүйелері тақырыбын деңгейлеп оқыту мәселелері мен әдістері қарастырылып, әр түрлі мысалдар келтірілген. Аталмыш тақырыпты деңгейлеп, саралап оқыту мәселесі қарастырылып отырған ақпарат көлемін азайтумен емес, оқушыларды бұл тақырыпты игеруге қатысты әр түрлі талаптарға бағыттау негізінде жүзеге асырылады.

Кілт сөздер: иррационал теңсіздік, теңсіздіктер жүйесі, теңсіздікті шешу, деңгейлеп саралап оқыту, педагогикалық технология.

Резюме

В статье рассматриваются вопросы и способы изучения уровневого обучения темы иррациональных неравенств и их систем в общеобразовательной школе, показаны различные примеры. Уровневая дифференциация данной темы осуществляется не за счет уменьшения объема изучаемой информации, а обеспечивается ориентацией школьников на различные требования к его усвоению.

Ключевые слова: иррациональное неравенство, система неравенств, решение неравенств, уровневая дифференциация обучения, педагогическая технология.

Summary

The article deals with the problems and level-training ways of irrational inequality and its systems at comprehensive schools. Various examples are also shown in this article. Level differentiation of this theme is carried out not at the expense of reduction of volume of studied information, and provided with orientation of pupils to various requirements to its assimilation.

Key words: irrational inequality, system of inequalities, solution of inequalities, level differentiation of training, pedagogical technology.

УДК 51:53

РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ В ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ

А.Е.КУЗЬМИЧЕВА, кандидат физико-математических наук, профессор,
Л.Г.ОРЛОВА, Р.М.СЕРИКОВА, магистрант
Западно - Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, г.Уральск,
Республика Казахстан

Система образования развивается одновременно с развитием общества и в соответствии с его запросами. Для современного этапа в развитии образования характерен переход от знаниецентристского подхода к компетентстному. В педагогической науке разработана классификация компетентностей, формирование которых должно стать одной из основных целей образования. В отдельную группу выделены ключевые компетентности, проявляющиеся в способах поведения. В иерархии компетентностей вершину представляют ключевые суперкомпетентноти. Для системы школьного образования выделяют несколько суперкомпетентностей, среди которых на первое место поставлена «математическая компетентность - умение работать с числом, числовой информацией - владение математическими умениями» [1].

Одной из актуальных проблем математического образования, на наш взгляд, является необходимость повышения роли математического аппарата в возрастании эффективности обучения различных предметов школьного цикла. В первую очередь, это относится к физике, в которой именно математический аппарат позволил описать состояния, явления и процессы в знаково-наглядной форме, позволяющей проводить их исследования. На основе эксперимента и математического аппарата сформулированы фундаментальные физические теории.

Математика для учителя физики является важным образовательным инструментом. От уровня владения учителем физики этим инструментом в значительной степени зависит реализация целей и задач обучения физики, определяемых Государственными общеобязательными стандартами образования [2,3].

Математика органически входит во весь курс физики. Одни из математических операций используются чаще, другие реже. В условии физических задач важное место занимают числа, которые в большинстве своем являются именованными.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Большие и малые числа.

Понятия «большое» и «маленькое» непосредственно связано с понятием относительности. В быту эти понятия осознаются интуитивно. Низкий балл успеваемости может казаться большим несчастьем в одной ситуации и мелочью в другой. В физике для одних и тех же физических величин используются различные единицы измерения: системные, внесистемные, краткие, дольные. Отсюда проблема - преобразование значения, выраженных в одних единицах к другим.

У учащихся возникает вопрос - зачем такая сложность, нельзя ли договориться пользоваться только одними единицами (например, СИ). Их появление связанно с тем, что при изучении физики они встречают величины в различных единицах, в том числе в СИ (м, мм, км, парсек и т.д.), а, например, электроемкость конденсатора составляет только кратные доли единицы электроемкости в СИ.

В процессе решения учащимися задач, объекты которых реальны, можно показать относительность «большого» и «малого» и целесообразность использования единиц измерения в различных представлениях.

Задача 1. *Ученые подсчитали, что на корне растения пшеницы имеется 10 000 000 волосков (10 миллионов) служащих растению для питания. Какова общая длина этих волосков и какова площадь поперечного сечения волоска, если средняя длина его равна 2 мм, а общий объем их составляет 1,5 и 3? (Как получили среднюю длину и объем?) (20 км, 0,00075 мм^2)* [4].

Использование различных единиц измерения физических величин позволяет записывать их различными числами, удобными для конкретной задачи.

2. О конденсаторе.

Емкость конденсатора, как известно, зависит от его формы, размеров и диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками. Можно оценить размеры конденсатора чтобы его электроемкость была ~1Ф. Оценку можно сделать на примере уединенного проводника. Простейшая система-шар. Его электроемкость $C=4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Оценим радиус шара, электроемкость которого была равна 1Ф. Примем $\varepsilon=1$.

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9\times 10^9}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

$$R = \frac{1\times 4\pi\times 9\times 10^9}{4\pi} = 9\times 10^9 \text{ м} = 9\times 10^6 \text{ км}$$

Радиус Земли 6480 км $\rightarrow \frac{R}{R_З} = 1400$

Радиус шара оказался значительно больше радиуса Земли. Отсюда можно сделать вывод, что реальные конденсаторы, размеры которых значительно меньше $R_З$ могут иметь электроемкость C<<1Ф. Ее удобно измерять в дольных единицах.

Задача 2. *Тело бросают вертикально вверх в комнате с высотой потолка h. Найти зависимость времени полета от момента броска до удара об пол от начальной скорости ($t=t(\vartheta_0)$)*

Решение задачи требует внимательного анализа ситуации, проведение мысленного эксперимента. Представьте, что вы бросаете мяч к потолку. И сразу неопределенность - на какой высоте рука находится от пола. По видимому, для решения следует сделать предположение, что бросок делается от пола (предположим - отскакивает от пола)

Примечание: Такой анализ ситуации полезен, чтобы учащиеся приобрели навык применения физических законов к реальным ситуациям, выполняя операции абстрагирования и идеализации.

Ситуации:1) оно падает не долетев до потолка, или максимальная высота подъема совпадает с высотой потолка ($\frac{v_0{}^2}{2g} \leq$ h).

2) отражается от потолка и падает вниз $h \leq \frac{v^2}{2g}$

Решение для этих двух ситуаций различно.

Решение для ситуации 1. Тело движется вверх до остановки, а затем падает вниз. Время движения $t=\frac{2v_0}{g}$, то есть между t и v прямо пропорциональная зависимость. На графике $t=t(v_0)$- прямая проходящая через начало координат, тангенс угла наклона к оси v_0 $\quad tg \propto = 2/g$

Решение для ситуации 2. Полное время t движения будет состоять из двух слагаемых, так как движение вверх и вниз

$t= t_1+ t_2$

t_1-время движения вверх

t_2-время движения до пола после отражения от потолка

Удар о потолок считается упругим, то есть тело при столкновении с потолком изменяет скорость только по модулю. В этом случае по принципу обратимости движений продолжительность движения тела до отражения от потолка и после одинаковое, $t_2 = t_1$. Тогда $t=2t_1$

t_1-? Движение вверх равнозамедленное, с ускорением по модулю равным g.

$$h=v_0t_1 - \frac{gt^2}{2} \quad => \quad gt_1^2 - 2v_0t_1 + 2h = 0 \quad => \quad t_1=\frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

По условию $t_1<\frac{v_0}{g}$, так как $\frac{v_0}{g}$ равно времени подъема тела, брошенного вертикально вверх. Но тело не долетело до своей максимальной высоты. Поэтому из двух полученных значений выбираем значение со знаком «-» перед корнем.

Запишем $\mathbf{t_1} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = \frac{v_0}{g} - \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$

Полное врем движения $t = 2t_1 = \frac{2v_0}{g} - \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$

Итак, при условии $h<H_{max}$ зависимость $t=t(v_0)$ оказывается более сложной.

Примечание. Ситуация два может рассматриваться как общее решение. Анализ полученного результата позволяет сделать выводы о характере движения.

Решение. Под корнем не может быть число меньше нуля.

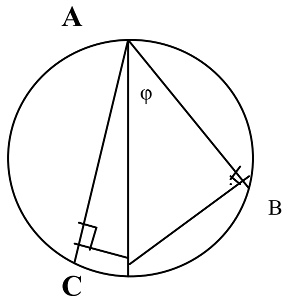
$v_0^2 - 2gh \geq 0$ => $v_0=\sqrt{2gh}$ - тело, долетев до потолка падает, и $v_0>\sqrt{2gh}$- тело отскакивает от потолка, максимальная высота подъема больше высоты потолка

К условию $v_0^2 - 2gh < 0$ => $v_0^2 < 2gh$ $v_0 < \sqrt{2gh}$ - второе слагаемое в ответе мнимое, не имеет физического смысла, и отбрасывается.

К ней общая формула неприменима, так как получение этой формулы заложено отражение от потолка.

Задача 3. Из *крайней точки вертикально расположенной окружности по желобам, установленным вдоль ее хорд, одновременно начинают скользить грузы. Показать, что все грузы достигнут окружности одновременно. Трения нет* [5].

Решение:



Задача относится к типу задач, о которых учащиеся спрашивают, как решать, если «ничего не дано», имея в виду отсутствие количественных данных. Однако, именно такие задачи позволяют учащимся приобретать навык анализа физической ситуации, и тем самым более глубоко понимать физические явления, процессы. Так что же дано в задаче? Задано движение в вертикальной плоскости, следовательно, под действие силы тяжести, которая сообщает грузу ускорение «g», не зависящее от его массы. Есть информация о траекториях- хорды окружности. Из состояния A груз может скользить по хордам, выберем одну из них, например, AB. Достроим до треугольника проведя линию BC.

Δ ABC – прямоугольный, так как угол ABC опирается на диаметр, пусть AB=d. Начальная скорость $v_0 = 0$ (по условию) =>$d = \frac{at^2}{2}$=>$t=\sqrt{\frac{2d}{a}}$. В любой траектории ускорение a -это проекция g на хорду, a= g cos φ, cos $\varphi = \frac{d}{2R}$ => $a = \frac{gd}{2R}$ => $\mathbf{t} = \sqrt{\frac{2d2R}{gd}} = \mathbf{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$

Действительно, время одинаково для всех хорд, но почему одинаково, если длина хорд разная? Это следствие соотношения между a и d.

a=g cos φ, d=2Rcosφ =>$d=\frac{2Ra}{g}$, между d и a прямо пропорциональная зависимость.

Владение учащимися математическим аппаратом, знание свойств, формул и умение использовать их, во многих случаях позволяет сократить путь решения задачи.

Задача. *Два проводящих шарика емкостью C_1, C_2 зарядами q_1 q_2 соответственно, соединили тонкой проволокой. Определить установившийся потенциал после их соединения.*

Решение: После соединения проводящие шарики будут эквипотенциальными т.е их потенциал одинаков

$\varphi' = \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2}$, q_1', q_2' - заряды шариков после соединения

Справа от φ_1' стоит пропорция. По свойству пропорции $\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2} = \frac{q_1'+q_2'}{C_1+C_2}$

Но по закону сохранения заряда: $q_1' + q_2' = q_1 + q_2$ следовательно $\varphi_1' = \frac{q_1+q_2}{C_1+C_2}$

Решение без использования математического свойства отношений, сводится к нахождению зарядов q_1' и q_2'.

$q_1' + q_2' = q_1 + q_2 \Rightarrow q_2' = q_1 + q_2 - q_1'$

Подставим в отношение $\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q1+q2-q_1'}{C_2}$

Находим q_1' и q_2', а затем потенциал φ_1',который оказывается одинаковым на шариках.

Приведенные примеры иллюстрируют роль математической компетентности учащихся в понимании физической ситуации и решении физических задач.

Литература:

1. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. - М.: НИИ школьных технологий. - 2006.

2. Государственные общеобязательные стандарты среднего общего образования Республики Казахстан. – Алматы: РОНД, 2002. – 368 с.

3. ГОСО РК 6.08.066-2010 по специальности 5В011000 «Физика». Бакалавриат. –Астана, 2010.

4. Лукашик В.И. Физическая олимпиада. - М.: Просвещение, 1987.

5. Истомин В.Л., Лукьянчиков Л.А., Карпов Д.И. Задачи по физике. - Новосибирск, 2009.

Резюме

Статья посвящена роли компетентностного подхода в образовании. Рассматривается математическая компетентность учащихся, как средство более эффективного изучения физики. Обращается внимание на особенность использования больших и малых чисел в физике. Показано применение знаний алгебры и геометрии при решении конкретных задач.

Ключевые слова: математический аппарат, физика, число, математическая компетентность.

Түйіндеме

Мақала білім берудегі құзыреттіліктің роліне арналға. Бұл мақалада физиканы оқытудың ең тиімді жолы ретінде оқушылардың математикалық құзыреттілігі қарастырылған. Негізгі коңіл физиканы оқытуда үлкен және кіші саңдарды қолдануға арналған. Нақты физикалық есеп шығаруда оқушылардын алгебра мен геометрия бойынша білімдерін қолдануы көрсетілген.

Кілт сөздер: математикалық аппарат, физика, саң, математикалық құзыреттілік.

Summary

The article dedicated to role of competent approach in the education. Mathematical competence considers as more effective way (method) of studying physics. The attention is drawn to the feature of using of large and small numbers in physics. The application of knowledge of algebra and geometry to solve specific problems is showed in the article.

Key words: Mathematical apparatus, physics, number, mathematical competence.

ӘОЖ: 330.832.1:371.84:5

ТУЫНДЫНЫҢ КӨМЕГІМЕН ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАЗМҰНДЫ ЭКСТРЕМУМДАРДЫ ТАБУ

Л.С.ҚАЙЫҢБАЕВА, педагогика ғылымдарының кандидаты,
Г.Қ.ЕШМҰРАТ, магистр,
Ғ.А.КҮДЕБАЕВА, магистр
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Базалық білімнің негізгі компоненті ретіндегі математиканың мәні практикалық іс-әрекетте қолдану үшін қажетті, басқа оқу пәндерін зерделеу үшін, үздіксіз білім беру жүйесінде оқуды жалғастыру үшін жеткілікті нақты математикалық білімді игерту арқылы оның адамзат өркениетін, ғылыми-техникалық прогресті дамытуға, қазіргі ғылымдағы және өндірістегі рөлімен, сондай-ақ өскелең ұрпақтың рухани ортасын қалыптастырудағы, олардың интеллектуалдық және басқа да сапаларын дамытудағы математикалық білімнің маңыздылығымен анықталады.

Математиканың басқа көптеген ұғымдары сияқты, туынды ұғымын оқытуды басынан бастап көрнекілік модельдермен байланыстырылса, онда оқушылар бұл ұғымды оңай меңгереді. Мұндай модель ретінде функция графигінің «көлбеуі» бола алады, дәлірек айтсақ, графиктің берілген нүктесіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті. Сондықтан, оқушылармен шығарылатын есептер жанаманы қарастырудан басталады. Екінші ерекшілік, туындының механикалық мағынасын ұғындыру үшін геометриялық иллюстрацияларды қолдану. Мұндай реттілік, біріншіден, туынды ұғымының ең кемінде екі неғұрлым нақты ұғымдарды жалпылау үшін пайда болғанын түсіндіруге көмектеседі: қисыққа жүргізілген жанама және лездік жылдамдық; екіншіден, туындының геометриялық мағынасын ертерек енгізу локальды жылдамдық ұғымын ұғынуға да көмектеседі және кейбір фактілерге геометриялық иллюстрация жасауға мүмкіндік береді. Бұдан басқа, бұл реттілік туынды ұғымының қолданбалылығына жаттығуларды енгізуді ертерек бастап және олардың мазмұнын көбірек түрлендіруге мүмкіндік береді.

Туындының көмегімен геометриялық есептерді шығарту - математикалық талдау элементтерінің геометрияда қолдануын көрсетудің тиімді формасынын бірі болып табылады. Ал бұл, өз кезегінде, оқушыларды математиканың ішкі байланыстарын нығайтуға, нақты білімін тереңдетуге мүмкіндіктер береді. Осыған орай, бұл мақалада, мысал ретінде үш есеп шешімдерімен көрсетілген. Бірінші есеп планиметриялық фигуралардың, екінші есеп стереометрия фигураларының экстремумдарын табуға арналған, ал үшінші есепте туындының қолданысы аналитикалық геометрия курсында қарастырылған.

1 есеп. Тастан қаланған қабырға жанындағы алаңды тік бұрышты етіп қоршау керек. Сонда алаңның бір қабырғасы тастан қаланған қабырға болады да, ал үш қабырғасы сымнан жасалған тор болсын. Барлығы *a* метр тор бар. Бұл алаңды қоршағанда оның ауданы ең үлкен болу үшін қабырғаларының арасында қандай қатыс болуы керек?

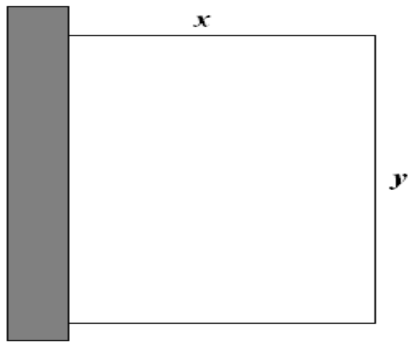
Шешуі: Алаңның қабырғалары 1-суретте қөрсетілгендей *x* пен *y* арқылы белгілейміз. Сонда ауданы $S = xy$ болады. Есептің шарты бойынша $a = 2x + y$, сонда $y = a - 2x$ болады және $S = x(a - 2x)$ шығады, мұнда $0 \le x \le \frac{a}{2}$ (функция S-тің бар болу облысы ені мен ұзындығы теріс сан болмайтындығынан анықталады). Енді өзімізге белгілі жолмен шешеміз:

$$S' = (x(a - 2x))' = a - 4x$$

$$S' = 0\,,\; a - 4x = 0\,;\; x = \frac{a}{4}$$

$$S'\left(\frac{a}{4} - \varepsilon\right) > 0,\; \left(\frac{a}{4} + \varepsilon\right) < 0$$

$$y = a - 2\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{2}$$



Сурет 1

Егер $x < \frac{a}{4}$ болса, $S' > 0$ болады, ал $x > \frac{a}{4}$, болса $S' < 0$, болады, яғни туынды S' таңбасын плюстен минусқа ауыстырады. Ендеше $x = \frac{a}{4}$ болғанда функцияның максимумы болады. Функцияның мәні

$$S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{4}\left(a - 2\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{8} \text{ квадрат бірлік.}$$

S функциясы $\left[0;\frac{a}{2}\right]$ кесіндіде үздіксіз және кесіндінің ұштарында $S(0)$ және $S\left(\frac{a}{2}\right)$ нольге тең, олай болса табылған мән функцияның ең үлкен мәні болады. Сонымен, есептің берілген шартына сәйкес алаңның қабырғалары арасындағы ең пайдалы қатыс $\frac{y}{x} = 2$ болады.

2 есеп. H биіктігі және жасаушының табан жазықтығымен жасайтын α көлбеу бұрышы белгілі. Конусқа іштей сызылған цилиндр қандай максимал көлемге тең болуы мүмкін?

Шешуі: ZO=H

$$\angle ZAO = \alpha,$$

Цилиндрге сызықтық элемент ендірейік. Мысалы: $FO = r$, $ZO_1 = r\,tg\alpha$, $OO_1 = H - r\,tg\alpha$, $V_ц = \pi r^2(H - r\,tg\alpha)$. Енді $y(r) = r^2H - r^3tg\alpha$ (1) функциясын қарастырамыз. $\max V_ц$ мәнін қабылдайтындай $y_{\max}$ -нан r -дің кризистік мәндерін табамыз.

$$y'(r) = 2rH - 3r^2tg\alpha$$

$$y'(r) = 0,\ 2rH - 3r^2tg\alpha = 0,\ r(2H - 3r\,tg\alpha) = 0$$

1. Шарт бойынша $r \neq 0$ болуы керек.
2. $2H - 3r\,tg\alpha = 0$

$$r = \frac{2H}{3tg\alpha} = \frac{2}{3}Hctg\alpha$$

,

$$y'\left(\frac{1}{3}Hctg\alpha\right) = r\left(2H - 3\cdot\frac{1}{3}H\right) = rH > 0$$

$$y'(Hctg\alpha) = r(2H - 3H) = -rH < 0$$

$$\frac{1}{3}Hctg\alpha < r < Hctg\alpha$$

Олай болса r-дің мәнінде функция (1) максимал мәніне ие болады және $V_ц = V_{ц\max}$;

Сонымен

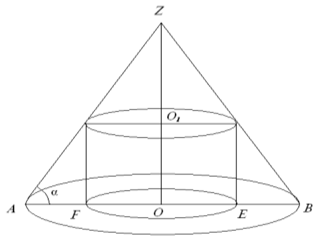
$$V_ц = \pi\left(\frac{2Hctg\alpha}{3}\right)^2 \cdot \left(H - \frac{2Hctg\alpha}{3} \cdot tg\alpha\right) = \pi \cdot \frac{4H^2ctg^2\alpha}{9} \cdot \frac{H}{3} = \frac{4\pi H^3}{27}ctg^2\alpha .$$

3 есеп. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ эллипске жүргізілген жанама мен координаталар осьтері арқылы жасалған үшбұрыштың ауданы ең кіші болу үшін жанаманы эллипстің қандай нүктесінен жүргізу керек?

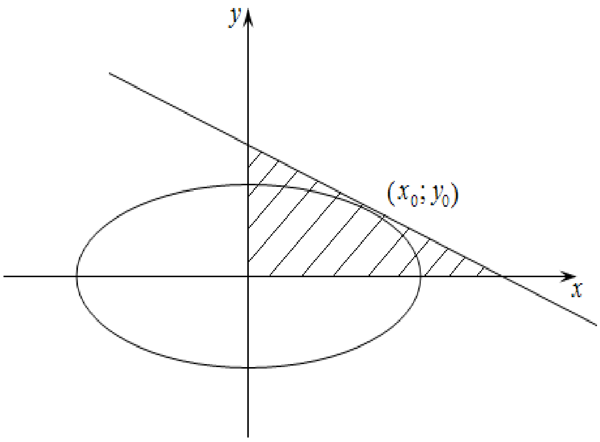
Шешуі: Егер сол айтылған бір нүкте табылса, онда эллипстің симметриялылығы бойынша ондай нүкте төртеу болатындығын алдын-ала байқау қиын емес. Сондықтан тек бірінші ширектегі бір нүктені ғана іздейміз. Эллипстің теңдеуінен мынаны табамыз:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{8 - x_0^2}$$

Егер ізделініп отырған нүктенің абсциссасын x_0 арқылы таңбаласақ, онда ординатасы $y_0 = \frac{3}{2}\sqrt{8 - x_0^2}$ болады. Аналитикалық геометриядан белгілі $y - y_0 = k(x - x_0)$ формуласын пайдаланып $\left(x_0;\ \frac{3}{2}\sqrt{8 - x_0^2}\right)$ нүктеде эллипске жүргізілген жанаманың теңдеуін құрамыз.



Сурет 2



Сурет 3

Біздің жағдайымызда $y' = -\frac{3x}{2\sqrt{8 - x^2}}$

және $k = \frac{y'}{x} = x_0 = -\frac{3x_0}{2\sqrt{8 - x^2}}$. Сондықтан жанаманың теңдеуі:

$$y = -\frac{3}{2}\sqrt{8 - x_0^2} = -\frac{3x_0}{2\sqrt{8 - x_0^2}}(x - x_0)$$

болады.

Енді жанаманың координаталар остерінен өтетін кесінділерін табамыз:

$$x = 0,\ y = \frac{3}{2}\sqrt{8 - x_0^2} + \frac{3}{2}\frac{x_0^2}{\sqrt{8 - x_0^2}} = \frac{3(8 - x_0^2) + 3x_0^2}{2\sqrt{8 - x_0^2}} = \frac{12}{\sqrt{8 - x_0^2}}$$

$$y = 0, \quad \frac{3}{2}\sqrt{8 - x_0^2} - \frac{3}{2}\frac{x_0(x - x_0)}{\sqrt{8 - x_0^2}} = 0, \quad x = \frac{8}{x_0}$$

Тік бұрышты үшбұрыштың ауданы:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_0} \cdot \frac{12}{\sqrt{8 - x_0^2}} = \frac{48}{x_0\sqrt{8 - x_0^2}}$$

Бұл жерде x_0-ді $0 < x_0 < \sqrt{8}$ аралықта қарастыру керек. Ауданы ең кіші болу үшін $x_0\sqrt{8 - x_0^2}$ өрнегінің мәні ең үлкен болуы керек екені айқын. Сондықтан $\delta = x\sqrt{8 - x^2}$

функциясының ең үлкен мәнін табу үшін зерттеу жеткілікті. Сонда $\delta' = \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$, $8-2x^2=0$, $x=2$ болады.

Енді абсциссасы $x_0 = 2$ болатын нүкте ізделініп отырған нүкте екенін көрсету қалды. Бұл, мысалы, былайша ой қорытудан шығады.

Үшбұрыштың ауданын кескіндейтін функция $S = \frac{48}{x_0\sqrt{8-x_0^2}}$ теріс емес (сондықтан да төменнен шектелген аралықта үздіксіз және үздіксіз туындысы бар).

Ал, функция аралықтың ұштарында шексіздікке айналады, олай болса ол өзінен ең кіші мәнін осы аралықтың ішінде алады, ал аралықтың ішінде функцияның туындысы тек $x_0 = 2$ нүктесінде ғана нольге тең болады. Олай болса $x_0 = 2$ нүкте функцияның ең кіші мәнін беретін нүктесі болады деп қорытындылаймыз. Сәйкес y_0 мәні эллипстің теңдеуімен анықталады: $y_0 = \frac{3}{2}\sqrt{8-2^2} = 3$.

Сөйтіп эллипстің бойында ізделініп отырған нүкте (2; 3) болады.

Оқу процесінде оқушыларға осындай есептерді шығартқанда, олардың пәнге қызығушылығын қалыптастыруға, ізденімпаздығын арттыруға, өзінің білімін дамытуға ықпал ететіні анық.

Әдебиеттер:

1. Серікбаева В.Е. Математиканың пәнаралық байланыстары: оқу әдістемелік құрал. – Алматы, 2007.
2. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Геометрические задачи на максимум и минимум. // Энциклопедия элементарной математики. - М., 1956.
3. Бляшке В. Круг и шар. - М., 1967.

Түйіндеме

Бұл мақалада туындының көмегімен геометриялық мазмұнды экстремумдарды табуға арналған есептер қарастырылған. Бірінші есеп планиметриялық, екінші есепте стереометриялық фигуралардың комбинацияларынан ең үлкенін табуға арналған. Ал үшінші есепте туындының қолданысы аналитикалық геометрия курсында қарастырылған. Осындай есептер математиканың ішкі байланыстарын нығайтуға, оқушылардың математикалық білімін тереңдетуге мүмкіндіктер береді.

Кілт сөздер: геометриялық есептер, туынды, ең үлкен және ең кіші мәндер, жанама, экстремумдар.

Резюме

В этой статье рассмотрены задачи на нахождение экстремумов геометрического содержания с помощью производного. В первом примере показано решение экстремальной задачи планиметрии, во втором примере - нахождение экстремумов стереометрических фигур. Также рассмотрено применение производной в решении задачи курса аналитической геометрии. Такие задачи показывают внутрипредметную связь математики, также способствуют повышению качества математических знаний и умений учащихся.

Ключевые слова: геометрические задачи, производная, наибольшие и наименьшие значения, касательная. экстремумы.

Summary

In this article tasks are considered on finding of extremums of geometrical maintenance by derivative. The decision of extreme task of plane geometry is rotined in the first example, in the second example finding of extremums of stereometry figures. Application of derivative in a decision task of course of analytical geometry is also considered. Such tasks show vnutripredmetnuyu connection of mathematics, also instrumental in upgrading mathematical knowledges and abilities of student.

Key words: geometrical tasks, derivative, most and the least values, tangent. extremums.

ӘОЖ 37.016.02.51

ЖОҒАРЫ БІЛІМДІ МАМАН ДАЯРЛАУДАҒЫ МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДЫҢ ЖАЙЫ

А.Қ.ҚОНЫС, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент,
Н.С.ИСМАЙЛОВА, Ж.НУРМУШЕВА
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Жалпы орта және кәсіби жоғары мектептің негізгі міндеттерінің бірі – оқушы жастардың, болашақ маманның ғылыми дүниетанымын қалыптастыру және оны барынша тереңдету. Осы міндетті орындауға әрбір ғылыми пән өзіндік, әрі қайталанбас үлесін қосуы тиіс. Дүниетаным біздің қоршаған әлемге деген көзқарастарымыздың жүйесі ретінде адамның табиғат пен қоғамды, өзін-өзі тану мүмкіндіктерін қуаттайды. Бұл ретте Математиканың потенциалы орасан зор, оның ғылыми методтары қоршаған әлемді тануға мүмкіндік бере отырып, ғылым мен практика мәселелерін зерттеуде абстрактілі ойлаудың қуатты құралы болатындығын дәлелдеді және ол ғылыми ұғымдар мен теориялардың қалыптасу, өрлеу процесін түсінуге де жол ашады.

Бүгінгі күндері бүкіл әлемде XX – ғасырда-ақ өзекті мәселеге айналып үлгерген ғылым мен техника салаларын жаппай математикаландыру процесі қарқынды жүруде, өйткені әрбір ғылым саласы ендігі уақытта өзінің тұжырымдарын дедуктивтік әдісті қолдана отырып алуы тиіс және аксиомалау қажеттілігі де туындауда. Заманауи осы талаптың маңыздылығын 500 жыл бұрын сезінген ұлы ғұлама Леонардо да Винчи «Математикалық дәлелдеуден өтпеген Адам баласының ешбір зерттеуі шынайы ғылым боп атала алмайды» деген болатын.

Қазіргі күндері ғылым салалары үшін ортақ ғылыми тілдің қажетілігі де өте жоғары, себебі олардың әрбірі де танымның негізгі үш бағыты болып табылатын Табиғат әлемін, не Әлеумет әлемін, немесе Адамның ішкі әлемін тікелей, я жанамалап зерттеумен айналысады. Ал математика болса, бүгіндері «Материя қозғалысының кезкелген түрін абстрактілі – формальды тұрғыдан зерттей алатындай биікке көтерілген», сондықтан ол Танымның негізгі теориялық әдістерінің бірі модельдеу арқылы және басқаларын қолдана отырып жоғарыда аталған үш бағытта да зерттеулер жүргізе алады.

Ғылым тарихында, оның дамуының өткен және кешегі кезеңдерінде математиканың бүткіл Ғылымға ортақ тіл екендігіне басқалардан бұрын көз жеткізе алған Г.Галилей «Философия ұланғайыр кітапта – ұлы Табиғатта жазылған дүние. ... Бұл ұлы кітап математика тілінде жазылған, ал оның таңбалары – математикалық формулалар» деген болса, атақты Нильс Бор «Математика турасына келгенде ғылымнан да жоғары тұр, ол – тіл. Ол шындығына келгенде тілден де жоғары, өйткені ол үстінде дедуктивтік құрылымдары жасалған ерекше тіл» деп математиканың атқарар ролін асқақтата түсті. Математикаландырудың қажеттілігіне айтылатын тағы бір уәж – ғылым салаларында, білім беруде, тұтастай қоғамымызда жүріп жатқан ақпараттандыру процесінде, себебі ақпараттандырудың тілі де математикалық тіл, өзге тілді электрондық есептеу техникасы түсінбейді.

Міне, сондықтан білім алушы жастардың бойында ғылыми дүниетанымды тәрбиелеу өте күрделі және жауапты іс, бұл процесс ұзаққа созылуы, бізден тиянақтылық пен табандылықты, математикалық мәдениетті талап етуі заңды құбылыс.

Нарықтық экономика жағдайында адами қатынастардың кезкелген саласындағы құбылыстар мен процестердің стохастикалық сипаты басымдыққа ие болуда және кәсіби маман үшін көбінесе әртекті көрсеткіштермен күнделікті жұмыс істеу, оларды жинақтау мен топтау, өңдеу және әрі қарай белгілі бір деңгейде абстракциялай отырып талдау-бағалау жұмыстарын жүргізе білу қажет болуда. Қоғамның қатардағы мүшесінің математикалық мәдениетін қалыптастыру мәселесі де күн тәртібіне қойылуы тиіс. Өйткені математикалық мәдениеттің азаматтың бойында заңға бағыныштылықты тәрбиелеуде атқарар ролі ерекше. Математикадағы дедуктивтік, аксиоматикалық әдістермен етене таныс, оларды меңгерген азамат нарықтық қоғамның заңдық-құқықтық жүйесін, талаптарын терең түсіне алатындығы, жан-дүниесімен мойындап саналы түрде қабылдайтыны шындыққа айналуда.

Сондықтан о баста экономика ғылымына, экономист-маманға арнап айтылған Адамзат кемеңгерлерінің бірі Карл Маркстің «Экономика ғылымы сонда ғана өзінің кемелденген биігіне шығады, егер ол математиканы қолдана алса» деген қанатты сөздері бүгінгі күндері Ғылымның кезкелген саласында даярланатын жоғары білімді маманға да қатысты. Осыны мойындайтын күн келді.

Жоғарыда айтылғандардан барып республикамызда осы заманғы жоғары білімді кәсіби маман даярлаудың математикалық жеткілікті сауатты талап ететін жаңа моделін жасап қалыптастыру қажеттілігі туындайды. Осынау ақиқатты сезінуіміз үшін бізге жақын көршілеріміз Ресей мен Беларусьта, мысал үшін, орта арнаулы және жоғары білімді медицина мамандарын, жоғары білімді экономист-маман, химик-маман даярлауда математиканы оқытудың мазмұнымен, оның көлемімен танысу және өзімізде қалыптасқан ахуалмен салыстыру жеткілікті.

ҚР БҒМ 2006ж. 23 желтоқсанда №779 бұйрығымен бекіткен экономикалық мамандықтардың мемстандарттарында «Математиканы» 3 кредит, ал «Эконометрика» пәнін 2 кредит көлемінде студенттерге оқыту міндеттелген, ал 050508 – «Есеп және аудит» мамандығында «Эконометрика» пәнін оқыту қаралмаған.

Ал Ресейде бакалавриаттың 080100.62 – Экономика бағытында типтік оқу жоспарының 2-блогы «Математикалық және ғылыми-жаратылыстану циклы» деп аталады және онда базалық пәндер ретінде:

- Математика (матанализ, алгебра және геометрия) – 144 сағат (I-курс);
- ЫТ мен МС және кездейсоқ процестер – 72 сағат (II-курс);
- Оптималды шешімдер қабылдау әдістері – 72 сағат (II-курс),

вариативтік пәндер ретінде:

- Басқару жүйелерін модельдеу – 72 сағат (III-курс);
- Экономикалық процестерді модельдеу - 72 сағат (III-курс);
- Басқарудағы жүйелік талдау – 72 сағат (III-курс);

ал «Кәсіби цикл» аталатын 3 блокта

- Эконометрика – 72 сағат (III-курс) пәндері аталған аудиториялық сағаттар көлемінде оқытылады екен [1]. Көріп отырғанымыздай, ҚР – да экономист-мамандар даярлауда олардың математикалық сауаттылығын көтеруге жөнді мән берілмеген. Соның айғағы болар, біздегі 050508 – «Есеп және аудит» мамандығы Ресейде толық және айқын түрде «Бухгалтерлік есеп, анализ және аудит» деп аталған. Осы айтылғандардың өзі біздің қоғамның күйі мен даму деңгейі маман-экономистің кәсіби даярлығы мен оның математикалық мәдениетін қай деңгейде қалыптастырғанын көрсетіп тұр. Не дегенде де, Қазақстан экономикасы мен қоғамы үздіксіз өзгеру мен даму үстінде, олай болса маман-экономистің кәсіби даярлығы мен математикалық сауатына жаңа талаптар қоятын уақыт келді. Олай деуіміздің тағы бір себебі – Еуропа университеттерінде бүкіл XX – ғасыр бойына экономистер даярлау I-курстан соңғы курсқа дейін экономикалық-математикалық методтарды қолдануға негізделіп жүргізілген. Сондықтан да болса керек, осы кезге дейін бірнеше математик өздерінің экономикалық талдауды математикалық методтар арқылы жүргізген үздік зерттеулерінің нәтижелері бойынша экономика саласында атақты Нобель сыйлықтарын иеленген.

ҚР денсаулық сақтау саласында қызмет атқаруы тиісті орта арнаулы және жоғары кәсіби білімді медицина мамандарын даярлауда оларға математиканы оқыту мазмұны мен көлемі де осы заманғы талаптарға сай емес деуге негіз бар. Өйткені XXI – ғасыр медицинасы техникалық үздік жабдықтарды, зерттеу мен емдеу практикасында жаңашыл технологиялар мен методикаларды, математикалық методтарды қолдануды өрістете түсу бағыттарын ұстанатыны белгілі. Өркениетті мемлекеттерде, оның ішінде жақын көршіміз Ресейде осы бағыттарда жүргізіліп жатқан зерттеулер мазмұнына үңілсек, біз оларда соңғы 30-40 жыл көлемінде математикалық методтарды жалпы биология мен медицинада, оның ішінде иммунологияда, биохимия мен генетикада, радиобиология мен физиологияда, биофизика мен эпидемиологияда, клиникалық практика мен медициналық генетикада, вирусология мен гендік инженерияда, цитологияда және басқа салаларда пәрменді түрде және жаппай қолдануға көшкендерін көреміз.

ҚР БҒМ 2005ж. бекіткен орта медициналық білім берудің мемлекеттік стандартында мамандықтардың негізгі мектеп бітірген оқушыларына Математика пәнін 136 сағат көлемінде, негізгі 10 тақырып бойынша оқыту міндеттелген, бірақ орта мектеп бітіргендерге математика пәнін оқыту қаралмаған. Бұдан, бас-аяғы 3-4 жыл ішінде Математика пәнін орта арнаулы оқу орындарында оқыту жайының күрт төмендегенін көреміз. Өйткені, мұның алдында, 2002ж. 9 тамызда бекітілген Математиканың типтік бағдарламасында бұл пәнді 176 сағат көлемінде оқыту қаралған болатын, ал Батыс Қазақстан мемлекеттік медицина академиясында даярланып, 2004ж. 19 желтоқсанында бекітілген типтік оқу бағдарламасы бойынша медицина колледждерінде «Жоғары математика негіздерін» оқыту 66 сағат көлемінде жоспарланған еді. Осы типтік оқу бағдарламасы «Математика» пәнін академияларда дәрігерлік мамандықтар студенттеріне 100 сағат көлемінде оқытуды міндеттейді, әрі жасалу сапасы бойынша ресейлік бағдарламалар деңгейінен көрінген. Салыстыру үшін біз 060103 – Педиатрия мамандығына Сібір мемлекеттік медицина университетінде (Томск) 2006ж. жасалған «Жоғары математиканың» жұмыс бағдарламасын қарасақ, онда аталған курсты оқытуға 20 сағат лекция мен 51 сағат практикалық сабақтар қаралған және курстың басты мақсаты «студенттердің ойлау логикасын дамыту, оларды фармация, физика, химия және биология есептерін шешуде математикалық методтарды қолдануға үйрету» деп нақтылап, «математиканың ортақ зерттеу инструменті екендігі» ашып айтылған [2].

Жоғары білімді маман даярлауда математиканы оқыту мен ғылым салаларында математикалық методтарды қолдану осы салалардағы білім мен теориялық нәтижелердің ғылыми деңгейін көтеретін болады, себебі математикада ғылыми танымның методтары барынша бірізділікпен және кеңінен қолданыс табатыны белгілі. Сондықтан да болса керек, XX – ғасырдың екінші жартысында өркениетті елдерде ғылым мен техникадағы, экономикадағы математиканың ролі мен маңызы өсе түсті, математиканы оқыту сапасы артты және ғалым-математиктердің саны көбейді. Мысалға, 1963ж. статистикалық мәліметтер бойынша АҚШ-та 42,1 мың математик болса, болжаммен 1975ж. олардың саны 87,2 мыңға дейін өсуі тиіс болды [3]. Франциядағы ахуал мемлекеттік құжаттарда былайша сипатталған: «Математиктердің еңбек ету жағдайына осыған дейін назар мүлдем аз аударылғаны мойындалады. Бесінші бесжылдық жоспар оларға көмекті ғылыми хатшылар, техникалық көмекшілер мен арнайы аудармашылар түрінде қамтамасыз етті. Әдебиеттер сатып алуға, математикадан еңбектерін жариялауды жеңілдетуге қаржылар бөлінді. Математиктердің шетелдерге шығуына және Францияға шетелдік белгілі мамандарды шақыруға көлемді қаржылар қаралған. Қазіргі уақытта математикалық методтарды қолданудың жаңа бағыттарына, оның ішінде іргелі ғылым саласына айнала бастаған праксеологияға және Адамзат келешегін айқындайтын әлеуметтік ірі жобаларды даярлауға бет бұру көзделуде» [4].

Енді жоғары білімді химик-маман даярлауда оларға математиканы оқыту қажеттілігін және біздегі қалыптасқан ахуалды көрсететін мәліметтерге тоқталайық. Химиядағы ең қарапайым көрінетін сутегіні оттегімен тотықтандыру реакциясының шындап келгенде қатаң реттелген 60 кезеңнен тұратыны кейініректе анықталып отыр және осы процесті математикадағы матрицалар теориясы барынша терең сипаттай алады. Ал химиялық кинетика есептерін модельдеуге матрицалар теориясын қолдану мүмкіндігін алғаш атап көрсеткен ағылшын математигі Джеймс Сильвестр болған. XIX – ғасырда химияда пайда болған қаныққан $C_k H_{2k+2}$ көмірсутектерінің изомерлер санын анықтау туралы күрделі есепті алғаш шешкен де ағылшын математигі, Кембридж университетінің профессоры Артур Кэли. Сол сияқты, математикадағы графтар теориясы химияда иондық, атомдық, молекулалық және металдық кристалдар структурасын зерттеуде, химиялық реакциялардың графтарын құруда, көп кезеңді күрделі химиялық реакцияларды зерттеуде, олардың маршруттарын анықтауда қолданыс табуда [5]. Биохимиядағы сандық талдау мен бағалауға комбинаторика аппаратын қолдану Адамзаттың гендік қорының мүмкін шекараларын анықтауға, басқа да күрделі есептерді шешуге мүмкіндік беруде. Келесі қадамда химиялық кинетика есептерін модельдеуге қарапайым және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориялары қолданысқа түсті [6]. Химиялық реакторларда балқыған таза химиялық заттардың кристалдану процесіне сәйкес математикада Стефан есебі деп аталатын дифференциалдық модельдерді зерттеу жұмыстары басталды [7].

Химия пәнінің мұғалімі орта мектептегі жалпы химия курсының практикалық-лабораториялық есептерін шешу үшін математикадан пайыз бен пропорция құру, күрделі пайыздар формуласын пайдалану, бір және екі айнымалылы теңдеулер мен олардың жүйесін құрып-шешу біліктілігі мен дағдыларын меңгеруі қажет. Ал химия курсында ішінара жүргізілетін ғылыми эксперименттің қалыптасқан теориясы, оның нәтижелерін өңдеудің математикалық-статистикалық қатаң әдістері бар. Сондықтан химик-маман ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика методтарын қажетті деңгейде меңгеруі тиіс деп білеміз.

Ресейдің жоғары білім беру саласында химик-маманның математикалық даярлығына толымды көзқарас бар болғандықтан, мысалға, Кемерово МУ-нің химия факультетінде 020100.62-Химия мамандығына (2012ж.) математика пәнін оқыту мынадай тарауларды:

1) Аналитикалық геометрия және алгебра негіздері - 30 сағат лекция, 18 сағат практика;

2) Математикалық анализ - 62 сағат лекция, 62 сағат практика;

3) Дифференциалдық теңдеулер - 30 сағат лекция, 18 сағат практика;

4) Математикалық физика теңдеулері - 30 сағат лекция, 30 сағат практика;

5) ЫТ мен МС - 30 сағат лекция, 30 сағат практика - көлемде қамтиды [8].

Бұл математикалық пәндердің 1-4 – оқу семестрлерінде оқытылуы және олар бойынша 4 емтихан, 1 сынақ алынуы көрсетілген. Математиканы оқытудың өзектілігі мен маңызы жұмыс оқу бағдарламасында «Ғылымның дамуының бүгінгі күнгі деңгейі маман-химиктердің жеткілікті жоғары математикалық даярлығын талап етеді» деп тиянақталған. Ал ҚР-да жоғары білімді химия пәнінің мұғалімін даярлау саясатын анықтайтын 5В011200 – Химия мамандығының мемстандартында (Астана, 2010) аталған мамандық студенттеріне математика пәнін оқыту мүлдем қаралмаған.

Әрине, жоғары білімді экономист, химик және басқа мамандарды даярлауда математикадан қажетті сапалық және сандық әдістерді, тиісті математика тарауларын мамандық иелері таңдауы, ал математиктер оқу материалын оқытудың әдістері мен педагогикалық-психологиялық ерекшеліктерін анықтауы тиіс. Бұл бағытта, әсіресе бүгінгі күндері жинақталып отырған мәселелер баршылық. Ең бастысы, басқа мамандықтар тобына математиканы оқытуда мынадай талаптарды ұстану қажет:

а) оқу материалын математикаға тән формальды-теориялық деңгейде және кәсіби бағдарлап беру;

б) оқытуды студенттердің психологиялық-педагогикалық қабілетін дамыта отырып мотивация қалыптастыру жағдайында жүргізу.

Математика курсында сызықтық алгебра тарауын оқытқанда химик-студенттерге көпкезеңді химиялық реакциялардың сипатын ашуға стехиометриялық, атомдық матрицалардың қолдануын көрсету, қажетті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу, сөйтіп ізделінді химиялық реакцияларды құру студенттердің математика пәніне қызығушылығын, олардың ғылыми таным деңгейін арттырары анық. Мысалға, атомдар ретінде H, C, O, ал химиялық заттар ретінде CH_4, CH_2O, O_2, H_2O алайық. Онда $n=3$ (атомдар саны), $N=4$ (заттар саны), ал

$$B=\begin{pmatrix} H \\ C \\ O \end{pmatrix},\ \ A=\begin{pmatrix} CH_4 \\ CH_2O \\ O_2 \\ H_2O \end{pmatrix},\ \ \beta=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ A=\beta\cdot B.$$

β атомдық матрицасының рангі $r(\beta)=3.$ Сондықтан тәуелсіз химиялық реакциялардың саны $N-r=1.$ Осы жалғыз реакцияның

$$\alpha_1 CH_4+\alpha_2 CH_2O+\alpha_3 O_2+\alpha_4 H_2O=0$$

стехиометриялық $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ коэффициенттері

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0$$

теңдігінен, яғни

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

біртекті теңдеулер жүйесін шешу нәтижесінде $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1,$ яғни $(1, \quad -1, \quad 1, \quad -1)$ түрінде табылады. Олай болса ізделінді реакция

$$CH_4 - CH_2O + O_2 - H_2O = 0$$

яғни

$$CH_4 + O_2 = CH_2O + H_2O$$

болатыны алынды.

Дәл осылайша, математика курсындағы негізгі ұғым «функция» арқылы химиялық мазмұндағы есептерді шешуге графиктік тәсілді қолдануға болады. Жоғары білімді химик-маманды даярлауда химиялық кинетика есептерінің дифференциалдық модельдерін құрып-зерттеу студенттердің ғылыми таным көкжиегін одан әрі кеңейте түсетін болады.

Осы кезге дейін математиканы ЖОО-да оқытуда теориялық-формальдық оқу материалына барынша басымдық беріліп келді, ал математикалық емес мамандықтың иесі өзінің практикалық кәсіби қызметіне қажетті қолданбалы сипаты басым математикалық білім алуды қажетсінеді. Сондықтан аталған санаттағы студенттерге математика пәнін өз саласындағы қолданбалы мазмұндағы және стандартты емес есептерді қолдана отырып оқыту қажет.

Қалай дегенде, «ҚР-да білім беруді дамытудың 2011-2020 ж.ж. арналған Мемлекеттік Бағдарламасында» көрсетілген индикативті көрсеткіштерге қол жеткізу үшін болашақ жоғары білімді мамандарды математика бойынша тиянақты және жүйелі даярлықтан өткізетін мемлекеттік ұстаным тез арада қалыптастырылуы қажет деп есептейміз.

Әдебиеттер:

1. Учебные планы подготовки бакалавра по направлению 080100.62 – Экономика. Московский технологический институт (2011г.). http://www.mti.edu.ru.
2. Рабочая программа по ВМ для студентов специальности 060103 – Педиатрия. Сибирский государственный медицинский университет (Томск, 2006).//Интернет.
3. Политика США в области науки. –М.: Прогресс, 1971.
4. Илечко Б. Научные исследования во Франции. –М.: Мир, 1971.
5. Оре О. Теория графов. – М.: Мир, 2000.
6. Гильдерман Ю.И. Вооружившись интегралом... – Новосибирск: Наука, 1980.
7. Мейрманов А. Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986.
8. Рабочая программа дисциплины «Математика» для направления 020100.62 - Химия.//Федер. госуд. бюдж. образов. учрежд. «Кемеровский гос. университет». – Кемерово, 2012.

Түйіндеме

Мақалада білім алушы жастың, ертеңгі маманның ғылыми дүниетанымын қалыптастыру мен тереңдетудегі математиканың рөлі туралы айтылады. Жоғары білімді маманды даярлау бағдарламасында ҚР-да математиканы оқытуға заманауи талаптарға сай мән берілмейтіні Ресейдегі ахуалмен салыстыра отырып көрсетіледі.

Кілт сөздер: ғылыми дүниетаным, математикаландыру, ақпараттандыру, атомдық матрица, дифференциалдық модель.

Резюме

На примере сравнительного анализа состояния преподавания математики при подготовке специалиста с высшим образованием в России сделан вывод о несоответствии качества этой составляющей требованиям сегодняшнего дня в РК. Приведены общеизвестные роль и значение математики в дальнейшем углублении научного мировоззрения учащейся молодежи, будущего специалиста.

Ключевые слова: научное мировоззрение, математизация, информатизация, атомная матрица, дифференциальная модель.

Summary

On the example of a comparative analysis of the teaching of mathematics in the preparation of specialists with higher education in Russia concluded that the quality of this component of the non-compliance of the requirements of today in Kazakhstan. Given the well-known role and importance of mathematics in further deepening the scientific outlook of students, future specialist.

Key words: Scientific outlook, mathematicization, informatization, nuclear matrix, differential model.

УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧ ПРАКТИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ В КУРСЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.А.КУЛЬЖУМИЕВА, кандидат физико-математических наук, доцент,
С.А.ЛУКЬЯНОВ, студент
Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, г.Уральск,
Республика Казахстан

Теоретические сведения

Математическое образование как область исследования является междисциплинарной: изучение образовательной политикой, учебных планов, проблем преподавания и изучения математики означает принятие методов и понятий из других дисциплин, таких как психология образования и методика преподавания, для изучения собственных вопросов. В полной мере это касается и вопроса оценки результатов обучения. Этой проблемы касались К. Дуэк (неявная связь между процессом обучением и его результатами), Дж. Пеллегрино, Р. Глейзер (разработка методов неформального оценивания) и др.

Исследования в области математического образования весьма разнообразны: начиная от локальных исследований до интернациональных и крупномасштабных экспериментальных разработок [1]. В данной работе будет представлено локальное исследование на уровне учебного заведения. *Оценка* учебных программ является неотъемлемой частью изысканий в области математического образования. Она представляет собой широкое понятие, определявщее как процесс получения информации, использующейся для принятия решения о качестве учебных программ и образовательной политики [2]. *Контроль* определяется как инструмент или систематическая процедура для наблюдения и описания одной или более характеристик обучаемого. Процесс оценки включает в себя *объект оценки, шкалу значений,* и *способ сбора информации* таким образом, что объект может быть помещен в шкалу величин для оценки [3]. Конечной целью исследований в области образования, разработки учебных программ и их содержания является повышение успеваемости обучаемых. Таким образом, оценка программы на студенческом уровне имеет весомое значение. Для оценки достигнутого уровня освоения учебной программы рассматриваются различные аспекты математического мышления [4]. Смешанные методы, такие, как наблюдение за студентами на занятиях, выполнение заданий и тестирование, могут быть использованы для сбора информации по оценке достигнутого уровня освоения учебной программы. В частности, при оценке мы должны обратить особое внимание на выбор заданий итогового контроля.

Заинтересованность в долгосрочном исследовании природы изучаемых явлений обозначила необходимость выработки метода, показывающего значимые связи между этими явлениями. Это - основная проблема таксономии: упорядочить явления таким способом, который свидетельствовал бы о некоторых из основных свойств, а также взаимосвязях между ними. Б. Блум предложил метод упорядочения образовательных результатов, основываясь на возрастающей сложности учебных задач. «Его таксономическая структура описывает, как, опираясь на предшествующее обучение, мы развиваем более сложные уровни обучения» [5]. Результаты обучения делятся на три области: *когнитивную* (запоминание, понимание, применение, анализ, оценка, синтез), *аффектную* (обращение внимания, реагирование, оценка, организация, характеризация), *психомоторную* [6]. Устоялось мнение, что результаты обучения должны описываться всеми тремя областями: 5 результатов из когнитивной области, 2 — из аффектной, 1 — из психомоторной [5].

В период с 16.09.13 по 21.09.13 в ЗКГУ, на кафедре физики и математики физико-математического факультета проводился педагогический эксперимент, направленный на выявление связи уровня освоения учебной программы с увеличением использованного объема задач практического содержания. Основной гипотезой в исследовании выступало следующее положение: *активное использование задач практического содержания на занятиях улучшает результаты обучения из когнитивной области: не только на более высоких уровнях (применение, анализ и синтез), но и на низших – запоминания и понимания*.

Описание эксперимента и результаты

В эксперименте принимали участие студенты гр. 04302 специальности «Математика». Было проведено три занятия, основой для которых послужил материал разрабатываемой блочно-модульной программы «Дифференциальные уравнения»:

Б1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.

М2. Основные виды дифференциальных уравнений первого порядка.

Из-за ограниченности во времени мы выбрали материал, касающийся только уравнений с разделяющимися переменными.

Тематика занятий: 1. Решение уравнений с разделяющимися переменными.

2. Задачи, приводящие к уравнениям с разделяющимися переменными.

3. Моделирование простых систем с помощью уравнений с разделяющимися переменными.

Последние два занятия проводились с половиной группы (Группа А), в то время как вторая (Группа Б) занималась в соответствии с текущим учебным планом.

По окончании занятий всей группе была предложена проверочная работа, направленная на выяснение достигнутого уровня освоения учебного материала. Поскольку занятия касались ограниченного круга вопросов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, мы выделили следующие результаты обучения:

Когнитивная область

1. Находить общее, частное, особое решения уравнений с разделяющимися переменными (*запоминание*).

2. Сводить уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными (УРП), нахождение решения задачи Коши (*понимание*).

3. Анализировать данные задачи, уметь интерпретировать их, сводить решение к решению уравнения в частных производных (*применение*).

Аффектная область

1. Понимать значение УРП в описании природных процессов (*оценка*).

2. Понимать ограниченность применимости УРП к моделированию простых систем (*организация*).

Психомоторная область

1. Активное выделение процессов, описываемых с помощью УРП.

Для их проверки итоговая работа имела следующую структуру: 5 заданий, определяющих достижение результатов в когнитивной области, 2 — в аффектной, 1 — психомоторной (таб.1, таб.2)

Таблица 1 - Структура итоговой работы

Область	№	Вопрос задания (*примечание*)	Балл
Когни-тивная	1	Из приведенных уравнений найти уравнение с разделяющимися переменными и решить его	0,3
			решение уравнения
	2	Решить уравнение (*решить заменой переменного*)	0,2 + 0,3
			замена переменного+ решение уравнения
	3	Решить задачу Коши. Определить интервал, на котором определено решение.	0,3 + 0,1
			решение уравнения + определение интервала
	4	Решить задачу (*задача, решение которой основано на изученных закономерностях – законе радиоактивного распада, ньютоновском законе охлаждения и нагрева, логистической и мальтусовской моделях роста*)	0,3 + 0,3 + 0,2
			известный алгоритм решения + решение уравнения + интерпретация результата
	5	Решить задачу (*выявление незнакомой закономерности по аналогии с решаемыми ранее задачами*)	0,5 + 0,3 + 0,2
			составление уравнения + решение уравнения + интерпретация результата
			3
Аффект-ная	6	Решить задачу (*задача приводит к решению дифференциального уравнения иного типа; здесь важно продемонстрировать умение интерпретировать данные задачи*)	0,5
			составление уравнения
	7	Из приведенных процессов выделить описываемый с помощью УРП. Решить его уравнение.	0,5 + 0,3 + 0,2
			составление уравнения + решение уравнения + интерпретация результата
			1,5
Психо-моторная	8	Привести собственный вариант процесса, описываемого с помощью УРП, доказать	1 + 0,5 + 0,3 + 0,2
			нахождение процесса, описываемого УРП + составление уравнения + решение уравнения + интерпретация результата
			2,5

Таблица 2 - Содержание варианта итоговой работы.

№	Задание
1	Из приведенных уравнений найти уравнение с разделяющимися переменными и решить его $.y' = \frac{t-y}{t+y}$ 1 ; 2. $y'' + y' = x$; 3. $y = xy' - 3y'^3$; 4. $y' = -3x(1+y)^3$; 5. $y' - 3xy = e^{x^4}$
2	Решить уравнение $y' = \cos(y - x)$
3	Решить задачу Коши. Определить интервал, на котором определено решение. $(x^2 - 5)y' + 3xy^2 = 0;\ \ y(0) = 2$
4	Население г. Алматы в 2012 г. составило 1 472 866 чел., с годовым приростом в 2011 г. порядка 1,2%. Население г. Астаны составляло в то же время порядка 742 918 чел. с годовым приростом порядка 5%. Предполагая темпы прироста населения этих городов установившимися, определить время, по истечении которого численность населения этих городов сравняется.
5	Сумма в 500 000 тг. положена в банк на 9% в год. Найдите закон изменения суммы при условии, что доход начисляется непрерывно. Через сколько лет вклад двоится?
6	Тело массы m падает под действием силы тяжести в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное квадрату скорости падения. Найти закон движения тела.
7	Из приведенных процессов выделить описываемый с помощью УРП. Составить и решить уравнение. 1. По наклонной плоскости длиной l = 12 м скользит тело A. Угол наклона плоскости α = 50°. Коэффициент трения тела по поверхности плоскости k = 0,5. Определить закон движения тела и время, в течение которого тело пройдет вдоль всей наклонной плоскости, если в начальный момент оно находилось в покое на верхней грани этой плоскости. 2. Найдите уравнение кривой железнодорожного пути, переходящей плавно от прямого направления к круговому, если длина переходной кривой l, а радиус кругового пути r. 3. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 350 бактерий, а в течение 2 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 24 ч?
8	Привести собственный вариант процесса, описываемого с помощью УРП. Доказать.

Каждое задание имело балловый эквивалент — совокупность оценок действий, необходимых для решения (таб.3). По итогам выполнения работы были получены следующие данные (таб.4)

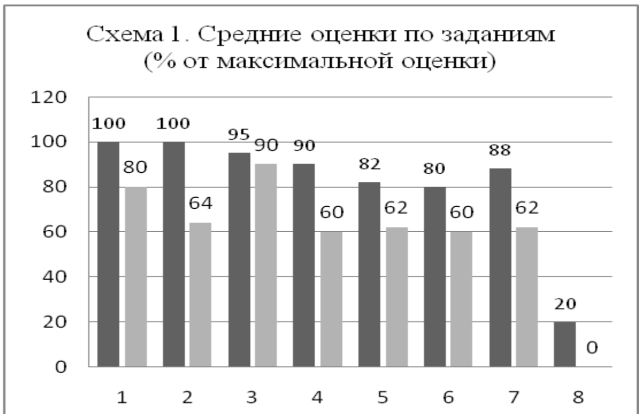
Таблица 3 - Балловые эквиваленты действий

Активность	Балл
Решение задачи Коши. Определение интервала	0,1
Замена переменного	0,2
Интерпретация результата	0,2
Решение уравнения	0,3
Применение известного алгоритма решения задачи	0,3
Составление уравнения по условиям задачи	0,5
Нахождение процесса, описываемого УРП	0,5

Таблица 4 - Результаты выполнения итоговой работы

Группа А.						
№ задания	1	2	3	4	5	Ср. оценка по заданию
1	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,4	0,38
4	0,6	0,8	0,8	0,6	0,8	0,72
5	0,5	0,8	1	0,8	1	0,82
6	0,5	0	0,5	0,5	0,5	0,4
7	1	0,8	0,8	0,8	1	0,88
8	0	0	1,5	1	0	0,5
Общая оценка студента	3,8	3,5	5,8	4,9	4,5	
Общая оценка, переведенная в 100-балловую систему	54,29	50,00	82,86	70,00	64,29	
Группа Б.						
№ задания	1	2	3	4	5	Ср. оценка по заданию
1	0	0,3	0,3	0,3	0,3	0,24
2	0,5	0,2	0,2	0,5	0,2	0,32
3	0,4	0,4	0,3	0,3	0,4	0,36
4	0,6	0,3	0,3	0,6	0,6	0,48
5	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,62
6	0,5	0	0	0,5	0,5	0,3
7	0,8	0,5	0,5	0,8	0,5	0,62
8	0	0	0	0	0	0
Общая оценка студента	3,3	2,5	2,1	3,8	3	
Общая оценка, переведенная в 100-балловую систему	47,14	35,71	30,00	54,29	42,86	

На схеме 1 видно, что Группа Б не справилась ни с одним заданием лучше, чем Группа А. Выясним, существует ли взаимосвязь между лучшими результатами Группы А и введением большого количества задач практического содержания в программу.



Обратимся к выдвинутому ранее предположению. Рассмотрим первые 5 заданий, проверяющие результаты обучения в когнитивной области. Задания первой категории (№№ 1 — 3) направленны на проверку запоминания и понимания, второй (№№ 4, 5) — применения и анализа. Обозначим через X_i и Y_i сумму результатов для каждого студента по этим двум категориям соответственно. В результате мы получим некоторый набор объектов (обучаемых), обладающих двумя качественными признаками [7], что позволит нам найти коэффициент линейной корреляции Пирсона (таб.5).

Таблица 5 - Нахождение коэффициента линейной корреляции

	X	Y					
1	1,20	1,10	0,15	-0,22	-0,033	0,0225	0,0484
2	1,10	1,60	0,05	0,28	0,014	0,0025	0,0784
3	1,20	1,80	0,15	0,48	0,072	0,0225	0,2304
4	1,20	1,40	0,15	0,08	0,012	0,0225	0,0064
5	1,20	1,80	0,15	0,48	0,072	0,0225	0,2304
6	0,90	1,10	-0,15	-0,22	0,033	0,0225	0,0484
7	0,90	1,10	-0,15	-0,22	0,033	0,0225	0,0484
8	0,80	0,80	-0,25	-0,52	0,13	0,0625	0,2704
9	1,10	1,40	0,05	0,08	0,004	0,0025	0,0064
10	0,90	1,10	-0,15	-0,22	0,033	0,0225	0,0484
Σ					0,37	0,225	1,016

Оценим полученное нами эмпирическое значение коэффициента Пирсона, сравнив его с соответствующим критическим значением для заданного уровня значимости из таблицы критических значений коэффициента корреляции Пирсона. При нахождении критических значений для вычисленного коэффициента корреляции Пирсона число степеней свободы рассчитывается как $k = m - 2$. Для выборки с числом элементов $m = 10$ и уровнем значимости $p = 0.05$ критическое значение коэффициента Пирсона , с уровнем значимости $p = 0.01$

Так как абсолютное значение, полученного нами коэффициента корреляции больше критического значения, взятого из таблицы, мы отклоняем гипотезу H_0 об отсутствии корреляционной зависимости между выборками и принимаем альтернативную гипотезу о статистической значимости на 1% уровне (вероятность ошибки 0.01) отличия коэффициента корреляции от нуля, и наличии связи между выборками.

Таким образом, между признаками X и Y найдена корреляционная зависимость. Оценим степень связи качественных признаков, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Таблица 6 - Нахождение коэффициента линейной корреляции

	X	Y	d_i	d_i^2
1	2,50	6,00	-3,50	12,25
2	2,50	1,00	1,50	2,25
3	2,50	4,00	-1,50	2,25
4	2,50	2,00	0,50	0,25
5	5,50	3,00	2,50	6,25
6	5,50	5,00	0,50	0,25
7	8,00	7,00	1,00	1,00
8	8,00	8,00	0,00	0,00
9	8,00	9,00	-1,00	1,00
10	10,00	10,00	0,00	0,00
Σ				25,50

$$\rho_{\text{в}} = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n} = 0,85$$

Найдем критическую точку двусторонней критической области распределения Стьюдента а уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = 8$,

Таким образом, между качес-твенными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

Обсуждение и заключение

На основании полученных данных, возможно, была найдена некоторая взаимосвязь между улучшением результатов обучения из когнитивной области и введением большого количества задач практического содержания в курс дифференциальных уравнений для будущих учителей математики. Обучаемые, показывающие хорошие результаты в практике решения задач прикладной направленности показывали лучшие результаты в решении тривиальных заданий: решении уравнений, задачи Коши и т.д., тогда как ранее представлялось, что студенты обеих групп должны были показывать одинаковые результаты в решении простых заданий. Для подтверждения или опровержения полученного результата требуется более широкая выборка, которая позволит произвести более точное исследование.

Коснемся использования полученных результатов в обучении. Учитель в современных условиях должен обеспечивать индивидуализацию и личностную ориентацию образовательного процесса, проектировать образовательные траектории учащихся, практически ориентировать образовательный процесс в профильной школе, формировать способности, необходимые для продолжения образования в выбранной старшеклассником сфере [8]. Поэтому становится актуальным вопрос выбора новой модели содержания образования будущего учителя. Теперь введение задач практического содержания, возможно, оправдано не только новыми требованиями, предъявляемыми к подготовке будущего учителя математики, но и дидактическими соображениями.

Литература:

1. Cai J. Evaluation of Mathematics Education Programs. International Encyclopedia of Education (Third Edition), 2010
2. NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Assessment Standards for School Mathematics, Reston, 1995.
3. Fitzpatrick, J. L., Sanders, J. R., and Worthen, B. R. Educational Evaluation: Alternative Approaches and Practical Guidelines, Boston, MA: Pearson. 2004.
4. Sternberg, R. J. and Ben-Zeev, T. The Nature of Mathematical Thinking. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1996.
5. Назарбекова С.П., Абдижаппарова Б.Т., Адырбекова Г.М., Абуова И.А. О формулировании результатов обучения для модульных образовательных программ. // Инновации в образовании. - 2013. - № 6.
6. Benjamin S. Bloom. Taxonomy of Educational Objectives. The Classification of Educational Goals. Handbook 1: Cognitive Domain, Longmans, 1956, 15-20
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Лань, 2004.
8. Концепция профильной подготовки учащихся и профильного обучения старшеклассников. - Астана, 2006.

Резюме

Настоящая работа касается оценки результатов обучения при модульном построении курса дифференциальных уравнений для будущих учителей математики. Исследуется влияние на эти результаты применения в курсе задач практического содержания. Показывается, как изменение в усвоении материала практической направленности влияет на умения в решении простых заданий. Намечена возможность использования результатов в обучении будущих учителей.

Ключевые слова: результаты обучения, оценка, контроль, когнитивные процессы.

Түйіндеме

Бұл мақалада біз болашақ математика пәні мұғалімдері үшін дифференциалды теңдеулер курсының модульдік құрылымы кезінде оқыту нәтижесінің бағалау мәселесіне көңіл бөлеміз. Бұл нәтижелерге есептер курсының практикалық мағынада ықпалын зерттейміз. Практикалық бағыттағы материалды үйрену үрдісінің өзгерісі қарапайым есептерді шығарып үйренуге әсер ететіндігін көрсетеміз. Болашақ мұғалімдердің оқыту үрдісінде нәтижелерді қолдану мүмкіншілігі ескерілді.

Кілт сөздер: оқыту нәтижесі, баға, бақылау, когнитивті процестер.

Summary

This article deals with the teaching results` evaluation at modular assemblies of the differentical equations courses for future teachers of mathematics. The influence is researched upon these results of the practical contents. We try to show how practical material assimilation ingluences upon skills in solving simple tasks. The future teachers` possibility of results use is discussed. Marked possibility of the use result in learning the future teachers.

Key words: results of the education, estimation, checking.

ӘОЖ 37.022:512:514:373.5

АЛГЕБРА ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯ КУРСТАРЫН КІРІКТІРУ НЕГІЗІНДЕ БІРНЕШЕ БЕЛГІСІЗДІ СЫЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕЛЕРІН ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ

С.Қ.МЕҢЛІҚОЖАЕВА, педагогика ғылымдарының кандидаты, доцент,
У.Б.САПАКОВА, магистрант
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Оқытудағы алгебра мен геометрия пәндерінің интегративтік функциясын көрсетудің бір мысалы ретінде сызықтық теңдеулер мен теңсіздіктерді қарастырамыз. Сызықтық теңсіздіктер жүйесіне қатысты сұрақтар бірнеше рет таза математикалық, яғни үйлесімсіз теңдеулер жүйелерін барынша жуықтап шешу, көпмүшеліктерді құру мен жиындар теориясы және т.б. мәселелермен қатар туындады.

Екі және үш белгісізді сызықтық теңсіздіктерді оқыту теориясы алгебра мен геометрия курстарының пәнішілік байланыстарын жүзеге асыруға мүмкіндік береді, яғни геометриялық денелер – көпбұрыштар немесе көпжақтарды аналитикалық түрде сызықтық теңсіздіктер жүйесі арқылы өрнектеуге болады.

Қоғамдық-гуманитарлық және жаратылыстану-математикалық бағыттағы сыныптарда екі айнымалылы сызықтық теңсіздіктер жүйесін оқыту оқу бағдарламасына енгізілгенімен, әлі күнге дейін осы материалды тиімді түрде оқытудың әдістемелік жүйесі жасалмаған және алгебра мен геометрия курстарының пәнішілік байланыстарын сызықтық теңсіздіктер арқылы жүзеге асыру көзделмеген.

Осы материалды оқытуда алгебра мен геометрия курстарының кіріктірілуін геометрия пәні негізінде көрсету қажет. Мысалы, «Көпжақтар» тақырыбында дөңес денелерге қатысты нүктелер мен көпмүшелерді қосуға арналған материалдар қарастырылады. «Координаттар мен векторлар» бөлімінде мынаны оқытуға болады: кесіндінің аналитикалық түрде берілуі; жазықтық пен кеңістіктің аналитикалық түрде берілуі; көпбұрыштар мен көпжақтардың аналитикалық түрде берілуі. Алгебра курсының «Теңдеулер мен теңсіздіктер және олардың жүйелерін шешуді қайталау» бөлімінде салыстыру әдісі бойынша бірнеше белгісізді сызықтық теңсіздіктердің негізгі ұғымдарына талдау жасау және көп белгісізді сызықтық теңсіздіктерді белгісіздерден біртіндеп құтылу әдісімен шешуді оқыту, сонымен қатар сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешуде фундаментальды шешімдер жиынын ауыстыру әдісіне өзіндік жұмыстар өткізу тиімді. [1]

Сызықтық теңсіздіктерді оқыту алгебра мен геометрия курстарының пәнішілік байланыстарын жүзеге асыру мәселесін ғана шешуге мүмкіндік беріп қоймай, сонымен қатар планиметрия мен стереометрияның және алгебра курсындағы негізгі тақырыптардың байланысын жүзеге асырады. Сызықтық теңсіздіктерді геометриялық тұрғыда түсіндіру оқушыларға оқу бағдарламасының жазықтық, кеңістік сияқты ұғымдарын терең түсінуге көмектеседі, оларды геометриялық әдіспен шешуге дағдыландырады. Аталған материалдарды оқыту орта мектеп бағдарламасының белгілі талаптарын барынша терең ұғынуға және игеруге мүмкіндік береді.

Математиканы тереңдетіп оқытатын сынып оқушылары үшін бір және екі айнымалылы теңдеулер мен теңсіздіктер туралы алған білімдерін жалпылайтын теңсіздіктер, оның ішінде көп белгісізді сызықтық теңсіздіктер тақырыптарын мазмұнды-әдістемелік жағынан толықтыру қажет. Көпөлшемді кеңістіктердің графикалық модельдерін сызбада көрсетуге болғанымен, уақыт тапшылығына және оқушылардың жас ерекшеліктеріне байланысты толық қарастырылмайды. Бірнеше белгісізді сызықтық теңсіздіктерді графикалық тәсілмен шешуді үйретуге алдын ала даярлық ретінде, алдымен бірнеше белгісізді сызықтық теңсіздіктер мен олардың жүйелерін аналитикалық әдіспен шешуді көрсеткен жөн.

Оқушылар теңдеулер мен теңсіздіктер тақырыбын толық меңгерулері үшін бір, екі және үш белгісізді сызықтық теңдеулер мен теңсіздіктер ұғымдарын еске түсіріп, содан соң сызықтық теңдеулер мен теңсіздіктер және олардың жүйелері, бірнеше белгісізді сызықтық теңдеулер мен теңсіздіктер ұғымдарын жалпылау және сызықтық теңдеулер мен теңсіздіктер ұғымдары арасында салыстыру жүргізу керек. [2, 3] (Кесте 1)

Кесте 1 - Теңдеулер мен теңсіздіктер және олардың негізгі қасиеттері

Теңдеулер	**Теңсіздіктер**
Анықтама 1. $x_1, x_2, ..., x_n$ белгісізді *сызықтық теңдеу* деп мына түрдегі қатынасты айтамыз: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$ мұндағы $a_1, a_2, ..., a_n, b$ – теңдеудің коэффициенттері, кез келген нақты сан.	**Анықтама 1.** $x_1, x_2, ..., x_n$ белгісізді *сызықтық теңсіздік* деп мына түрдегі қатынасты айтамыз: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq (\leq) b,$ мұндағы $a_1, a_2, ..., a_n, b$ – теңсіздіктің коэффициенттері – кез келген нақты сан.
Анықтама 2. Бірнеше белгісізді *сызықтық теңдеудің шешуі* деп осы теңдеуді дұрыс санды теңдікке айналдыратын реттелген сандар жиынын $(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ айтамыз. *Теңдеуді шешу,* яғни оның барлық мүмкін шешімдерін табу.	**Анықтама 2.** Бірнеше белгісізді *сызықтық теңсіздіктің шешуі* деп осы теңсіздікті дұрыс санды теңсіздікке айналдыратын реттелген сандар жиынын $(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ айтамыз. *Теңсіздікті шешу,* яғни оның барлық мүмкін шешімдерін табу.
Анықтама 3. n белгісізді сызықтық біртекті теңдеу мына түрде болады: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0. \ (1)$	**Анықтама 3.** n белгісізді сызықтық біртекті теңсіздік мына түрде болады: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq 0. \ (2)$
Сөйлем 1. *Егер X –* (1) *теңдеуінің қандай да бір шешімі және k – кез келген сан болса, онда kX –* (1) *теңдеуінің шешімі болады.*	**Сөйлем 1.** *Егер X –* (2) *теңсіздігінің қандай да бір шешімі және k – оң сан болса, онда kX –* (2) *теңсіздігінің шешімі болады.*
Сөйлем 2. *Егер X және Y* (1) *теңдеуінің екі шешімі болса, онда X+Y те* (1) *теңдеуінің шешімі болады.* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$	**Сөйлем 2.** *Егер X және Y –* (2) *теңсіздігінің екі шешімі болса, онда X+Y те* (2) *теңсіздігінің шешімі болады.* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$
Анықтама 4. *Сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі деп* жүйеге кіретін барлық теңдеулерді қанағаттандыратын мынадай $(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ реттелген сандар жиыны аталады. *Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу,* яғни осы жүйенің барлық мүмкін шешімдерін табу.	**Анықтама 4.** *Сызықтық теңсіздіктер жүйесінің шешімі деп* жүйеге кіретін барлық теңсіздіктерді қанағаттандыратын мынадай $(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ реттелген сандар жиыны аталады. *Сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешу,* яғни осы жүйенің барлық мүмкін шешімдерін табу.
Анықтама 5. *Сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді* деп аталады, егер берілген жүйенің ең болмағанда бір шешімі бар болса.	**Анықтама 5.** *Сызықтық теңсіздіктер жүйесі үйлесімді* деп аталады, егер берілген жүйенің ең болмағанда бір шешімі бар болса.
Анықтама 6. *Екі сызықтық теңдеулер жүйесі теңкүштес деп аталады, егер бірінші жүйенің әрбір шешімі екінші жүйенің де шешімі болса, және керісінше екінші жүйенің кез келген шешімі – бірінші жүйенің шешімі (яғни екі жүйе де бірдей мүмкін шешімдер қабылдайды).*	**Анықтама 6.** *Екі сызықтық теңсіздіктер жүйесі теңкүштес деп аталады, егер бірінші жүйенің әрбір шешімі екінші жүйенің де шешімі болса, және керісінше екінші жүйенің кез келген шешімі – бірінші жүйенің шешімі (яғни екі жүйе де бірдей мүмкін шешімдер қабылдайды).*

Теорема 1. *Егер* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *нүктесі сызықтық біртекті теңдеулер жүйесінің шешімі және k – кез келген сан болса, онда kX нүктесі де осы жүйенің шешімі болады.*	**Теорема 1.** *Егер* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *нүктесі сызықтық біртекті теңсіздіктер жүйесінің шешімі және k – кез келген теріс емес сан болса, онда kX нүктесі де осы жүйенің шешімі болады.*
Теорема 2. *Егер X, Y – біртекті теңдеулер жүйесінің екі шешімі болса, онда X+Y те осы жүйенің шешімі.*	**Теорема 2.** *Егер X, Y – біртекті теңсіздіктер жүйесінің екі шешімі болса, онда X+Y те осы жүйенің шешімі.*

Математикалық білім беру бағдарламаларына сәйкес оқушылар екі және үш белгісізді сызықтық теңдеулер жүйесін шешудің келесі әдістерін меңгерулері қажет: алгебралық қосу тәсілі, ауыстыру әдісі, белгісіздерден біртіндеп құтылу әдісі (Гаусс әдісі). Сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешуде белгісіздерден біртіндеп құтылу әдісін меңгерту сабақтарының негізгі мақсаты: сызықтық теңдеулер жүйесі мен сызықтық теңсіздіктер жүйесін белгісіздерден біртіндеп құтылу әдісін қолданып шешуді салыстыру, ұқсастықтары мен айырмашылықтарын ажырату.

Жоғарыда айтылғандарды басшылыққа ала отырып, берілген тақырып бойынша сабақтарды мақсатқа сай жүргізуді келесі тапсырма арқылы бастаймыз.

Мысал-1. Үш белгісізді сызықтық теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = 6, \\ 4y - z = 2. \end{cases}$$

Берілген жүйені шешу әдісін оқушылар өздері таңдайды. Тәжірибе көрсеткендей, оқушылар негізінен мұндай жүйелерді салыстыру әдісі бойынша шешеді.

1. Берілген жүйенің әрбір теңдеуінен *z* белгісізін *x, y* белгісіздері арқылы өрнектеген. Алынған (*x, y* белгісіздерінен тұратын) өрнекті бір-бірімен теңестіру арқылы *x, y* екі белгісізінен тұратын жаңа жүйе алған. Осы әдісті қолданып, алынған бір белгісізді теңдеуді шешіп, *x*-ті тапқан, сол арқылы *y, z*-тің мәндері анықталған. Ашып көрсетсек:

$$\begin{cases} z = 2x - 3y - 1, \\ z = \dfrac{6 - x + y}{2}, \\ z = 4y - 2, \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} 7y = 2x + 1, \\ 7y = 10 - x, \\ z = 4y - 2, \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} 7y = 2x + 1, \\ 2x + 1 = 10 - x, \\ z = 4y - 2, \end{cases} \quad \text{осыдан:}$$

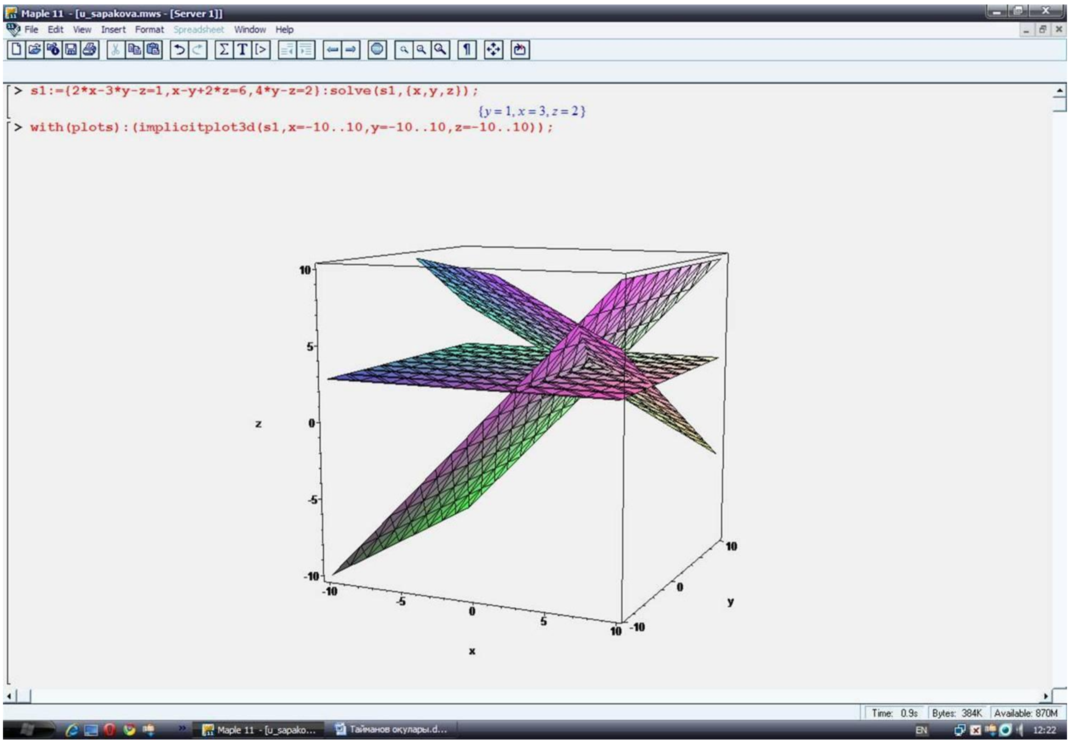
$x = 3,\ y = 1,\ z = 2.$

Әдістемелік әдебиеттерде бұл әдісті салыстыру әдісі деп атайды.

2. Кейбір оқушылар белгісіздердің санын азайту үшін, кез келген екі теңдеуге қосу тәсілін қолданған. Мысалы, жүйедегі теңдеулерді тұрақты санға көбейтіп, қосу арқылы оқушылар екі белгісізді жүйені алған: $\begin{cases} 2x - 7y = -1, \\ 5x - 7y = 8 \end{cases}$. Содан соң $x = 3$, $y = 1,\ z = 2$ мәндерін тапқан.

Осыған ұқсас есептеулерді бірнеше белгісізді сызықтық теңсіздіктерге де қолдануға болады. Яғни, $x_1, \dots, x_n$ n белгісізді сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешуді $x_1, \dots, x_{n-1}$ $n-1$ белгісізді теңсіздіктер жүйесін шешуге әкелеміз, содан соң алынған жүйені $x_1, \dots, x_{n-2}$ $n-2$ белгісізді жүйені шешуге әкелеміз және т.с.с., x_1 бір белгісізді теңсіздіктер жүйесіне келгенше жүргіземіз. Енді бір белгісізді сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешу оңай. Осындай жолмен біз кез келген сызықтық теңсіздіктер жүйесінің шешімін таба аламыз.

3. Берілген үш белгісізді теңдеулер жүйесінің кеңістікте графикалық кескінін тұрғызу үшін Maple11 бағдарламасының *plot3d* операторы пайдаланылады. Бұл оқушылардың кеңістіктік ойламын қалыптастырады.

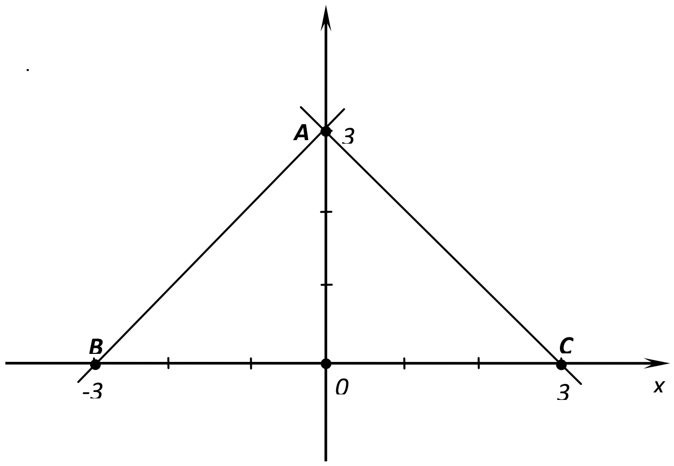


Сурет 1

Бұл операторды қолданғаннан кейін оқушылар өздері қарастырған жүйенің шешімдері дұрыс екендігіне көз жеткізеді.

Математика сабағында шешімдері әртүрлі геометриялық фигураларды аналитикалық түрде көруге мүмкіндік беретін есептер кездеседі. [4]

Мысал-2. $\begin{cases} y \le x+3, \\ y \le -x+3, \\ y \ge 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесімен берілген үшбұрыштың ауданын табыңыз.



Сурет 2

Шешуі: Берілген үшбұрыш координаталық жазықтықта бейнеленген. (2-сурет)
$A,\ B,\ C$ нүктелерінің координаталарын анықтап, $|AC| = 6,\ \ |OB| = 3$ аламыз.
Бұдан

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9\ (ш.б.)$$

Мұндай мысалдар алгебра және геометрия курстарының өзара байланыстарын екі айнымалылы теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері арқылы берілген геометриялық фигуралардың аудандарын есептеуде қолданылады.

Әдебиеттер:

1. Математика оқу бағдарламасы. // Ы.Алтынсарин атындағы Ұлттық білім беру академиясы. – Астана, 2010.
2. Старков С.Н. Справочник по математическим формулам и графикам функций для студентов. - М.: Питер пресс, 2009.
3. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по математике. - М., 2005.
4. Сборник задач по математике. В.К.Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др. / Под. ред. М.И. Сканави. – М., 2004.

Түйіндеме

Мақалада екі және үш белгісізді сызықтық теңсіздіктер элементтерін оқытуда алгебра мен геометрия курстарының пәнішілік байланыстарын жүзеге асыру мүмкіндіктері жайлы айтылады. Оқушыларға бірнеше белгісізді теңдеулер мен теңсіздіктерді терең меңгерту үшін олардың қасиеттері арасында салыстыру жүргізіле отырып көрсетіледі.

Кілт сөздер: алгебра және геометрия курстарының кіріктірілуі, бірнеше белгісізді теңдеулер мен теңсіздіктер.

Резюме

В статье рассматриваются возможности реализации внутрипредметных связей курсов алгебры и геометрии посредством элементами системы линейных неравенств с двумя и тремя неизвестными. Для глубокого изучения уравнений и неравенств с несколькими неизвестными проведена аналогия между их основными свойствами.

Ключевые слова: интеграции курсов алгебры и геометрии, уравнения и неравенства с несколькими неизвестными.

Summary

The article deals with implementing possibility of algebra and geometry courses intrasubject connections by means of linear inequalities system elements with two and three unknows. The analogy between the basic properties has been conducted for the profound study of equations and inequalities with several unknowns.

Key words: the integration of algebra and geometry courses, the equations and inequalities with several unknowns.

УДК 681.513.6:37:536

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПОСТРОЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ОЦЕНОК В ВИРТУАЛЬНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПОРТАЛАХ

А.Ж.РАХМЕТОВА, магистрант,
Н.Ж.ИБРАГИМОВА, кандидат педагогических наук
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, Республика Казахстан

В настоящее время с развитием информационных технологий автоматизированные обучающие системы получили возможность усовершенствованию по разным категориям. Одним из видов автоматизированных обучающих систем нового поколения являются адаптивные обучающие системы, моделирующие работу преподавателя. Эти системы позволяют повысить эффективность процесса обучения. В статье предлагается рассмотреть помимо традиционной «внутренней» адаптивности (к выбору специальности, к уровням усвоения обучающихся и т.д.) так называемую «внешнюю» адаптивность процесса обучения к рейтинговой системе и требованиям конкретного преподавателя.

Успешное развитие теории нечетких множеств позволяет описывать вербальные понятия и знания, оперировать ими и делать определенные выводы на основе нечетко-сформулированных требовании. Одним из перспективных направлений использования методов и алгоритмов теории нечетких множеств является применение их в задачах связанных с оценкой знании обучающихся и получением рейтинговой оценки [1].

В виртуальном портале по курсу «Информатика» производится адаптация к выбору языка, к уровням усвоения обучающихся, к требованием и представлением обучающегося о шкалах рейтинговых оценок. Адаптация используют весовые коэффициенты, учитываеющие важность различных элементов обучения в общей процедуре получения знании. Разрабатываемая система может быть модифицированы за счет дополнительных устройств для обучающихся с дефектом зрения. Процесс обучение представляется в виде иерархической структурой (Рис.1) и разрабатывается соответствующий алгоритм, связывающий элементы обучающей системы.

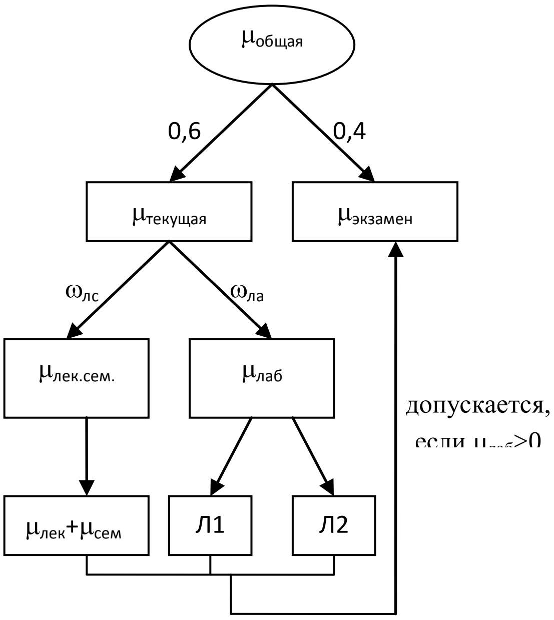


Рис.1 - Иерархическая структура оценивание обучающихся.

На каждом уровне обучающей системы и для каждого элемента обучение и оценка знания производится в терминах принадлежности, значение которой показывают с какой степенью успешности усвоен данный учебный материал. Оценивание знания обучающихся с самого нижнего уровня для всех элементов обучения в соответствии самим процессом обучение. Принципы оценивания элементов устанавливаются в процессе диалога с обучающимися. Для основных элементов обучения таких как, усвоение лекционного материала, овладение навыками решение задач на практических занятиях и овладение навыками практических лабораторных работ производится путем свертки соответствующих функции принадлежности, построенных для каждого учебного элемента с целью получения обобщенной оценки уровня усвоения по данному элементу. Например, $\mu_{лек} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$, $\mu_{сем} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i$ где n-количества тестовых заданий по лекциям, m-количества семинарских занятий с учетом выполнения контрольных работ, μ_i - степень усвоения знании, проверяемых i-тестовым и семинарским заданиям. $\mu_i = 0$ соответствуют к случаи отсутствие знание, $\mu_i = 1$ - соответствуют полному усвоению знания или овладению практических навыкам [2]. Оценивание овладения практическими навыками в лабораторных работах для Рис.1. вводится как среднегеометрическая оценка значение функции принадлежности каждой отдельной работы к полному овладению необходимым навыком. Выбор среднегеометрической свертки определяется требованиями допуска обучающегося к экзаменам только в случае выполнения всех лабораторных работ. $\mu_1 = \mu_2 = 0$, если соответствующие работы не выполняется, $0 < \mu_1; \mu_2 \le 1$ если эти работы выполнены с определенными требованиями. $\mu_{лаб} = \prod(\mu_1^{1/2} \cdot \mu_2^{1/2})$

Сворачивание обобщенной оценки усвоение знание или теоретического и практического материала вычисляется по формуле $\mu_{лек.сем} = \omega_{лек}\mu_{лек} + \omega_{сем}\mu_{сем}$ где, $\omega_{лек}$, $\omega_{сем}$ -весовые коэффициенты оценивающие важность усвоение лекционногои семинарского знания учебного материала $\left(0 < \omega_{лек}, \omega_{сем};\ \ \omega_{лек} + \omega_{сем} = 1\right)$.

Различие выборе свертывающих операторов для теоретических и лабораторных работ определяется самим процессе обучение и процедуры оценивание выполнении задании, не выполнение хотя бы одну лабораторных работ является не допустимым, в то время как не выполнение или не усвоении отдельных тестовых задании или контрольных работ не приводят к оцениванию знание на нулевом уровне.

Оценивание текущей успеваемости производится путем композиции нечетких функции принадлежности. В виртуальном портале получение оценки используются средне взвещенная сумма $\mu_{текущая} = \omega_{лек.сем}\mu_{лек.сем} + \omega_{лаб}\mu_{лаб}$. После прохождения экзамена и получение соответствующей не нулевой оценки общая совокупная оценка усвоения учебного материала и выполнения всех необходимых элементов в процессе обучение получается как среднеарифметическое значение

$$\mu_{общая}(S) = 0{,}6\mu_{текущая} + 0{,}4\mu_{экзамен}$$

Таким образом, применение теории нечетких множеств дает широкие возможности для построении гибкой иерархической системы, учитывающей индивидуальные особенности процесса обучения по курсу, мнения и требование обучающегося и привлечение для оценивания знаний уже разработанные системы тестов.

Построения структуры виртуального портала, в частности по курсу "Информатика", в первую очередь, осуществляется моделью освоения. Построение модели производилось [2] в четыре этапа:

- формирование матрицы отношений очередности учебных материалов;
- обработка матрицы отношений очередности и построение последовательности изучения учебного материала в виде списка учебного материала;
- формирование матрицы логических связей учебных материалов;
- построение граф логических связей учебного элемента.

Кроме того, с помощью анкетирования преподавателя разрабатывается модель уровня сложности учебного материала. Модель освоения учебного материала определяет последовательность его изложения в учебном пособии, варианты траекторий его освоения в обучающей системе [2]. Обучающиеся после выбора своей специальности проходят входной тест для определения базовых знаний. После прохождения входного теста, по которому оцениваются базовые знания, необходимые для усвоения предмета, обучающийся приступает к освоению курса. При успешной сдаче входного теста обучающиеся начинают изучать курс, а, в противном случае они должны пройти тест еще раз после повторения базовых знаний, которые необходимы для изучения данного предмета.

Способы оценивания выполнения задании и взаимодействие и взаимовлияние различных этапов обучение на конечный результат.

Разработка спецификации программного обеспечения, определяющей все функции и действия, которые будет выполнять система, является одним из фундаментальных процессов технологии разработки программных продуктов. Этот процесс формирования, анализа, документирования и проверки функциональных возможностей и ограничений системы, называется в терминологии программной инженерии «разработкой требований». Он является критическим этапом в создании всех видов программных продуктов, в том числе и виртуальных порталов с адаптацией к полиязычному обучению, поскольку ошибки, допущенные на этой стадии, ведут к возникновению проблем на этапах проектирования и разработки [4]. На данном этапе развития технологии разработки виртуального портала с адаптацией к полиязычному обучению целесообразно совершенствовать методы представления информации о требованиях к проекту будущих программных комплексов. Это обусловлено тем, что, как правило, разработчики приложений для образовательной сферы не являются пользователями, а в процесс разработки вовлечены различные категории участников проекта. При этом все участники должны прийти к соглашению о том, какая система должна быть создана, чтобы в ней воплотилась необходимые дидактические и технологические свойства. Поэтому разумно создавать документ требований к программе, с которым могут сверяться и на который могут ссылаться все участники проекта [4].

Таким документом может являться интегрированная спецификация требований, созданная на основе сбалансированного подхода к совместному использованию традиционной спецификации и модели вариантов использования системы. При специфицировании требований осуществляется формализация всей совокупности информации по требованиям с пошаговым наращиванием уровня детализации моделей системы. При этом целесообразно представить исходную информацию в виде текстового документа-концепции, а детальное описание того, какие функции системы предполагаются реализовывать в решении, представить в модели вариантов использования.

Реализация «внешней» адаптивности достигается путем учета дидактических представлений преподавателя о роли отдельных элементов контроля в конечном результате обучения. Для этого предлагается использовать идеи теории нечетких множеств [3], обеспечивающих адекватное построение в диалоге с преподавателем функций принадлежности отдельных элементов обучающей системы к результатам их выполнения, соответствующим полному овладению учебным материалом. При этом введение соответствующих весовых коэффициентов отражает важность отдельных элементов обучения в общей системе.

Исследование показывает, что разработка виртуальных порталов с адаптацией к полиязычному обучению необходимо для самостоятельной обучений и определений уровня освоения обучаемого по индивидуальной траектории обучении.

Литература:

1. Домрачев В.Г., Полещук О.М., Ретинская И.В., Рыбников К.К. Нечеткие модели рейтинговых систем оценки знаний// Труды XV Всероссийской научно-методической конференции «Телематика’2001». - Спб, 2001. - С.245-246.
2. Дауренбеков К.К., Ретинская И.В., Калинина Э.В. Разработка алгоритма построения нечетких оценок в компьютерных обучающих программах // Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава и аспирантов Московского государственного университета леса. - Москва, 2008.
3. Поршаков Б.П., Калинин А.Ф., Шотиди К.Х., Лопатин А.С., Купцов С.М. Теоретические основы теплотехники. - Москва, 2005.
4. Черткова Е.А., Ретинская И.В., Дауренбеков К.К. Разработка спецификации требований к компьютерным обучающим системам // Качество. Инновации. Образование. – 2008. - №1. – С.52-57.

Резюме

Данная статья предусматривает разных подходов разработки и проектирование автоматизированных систем, назначение которых позволяет реализовать виртуальный портал с адаптацией к полиязычному обучению. Использование функций принадлежности позволяет построить гибкий обучающий портал, учитывающий особенности рейтинговой системы и опыт преподавателей.

Ключевые слова: теория нечетких множеств, функция принадлежности, виртуальный портал, адаптация.

Түйіндеме

Бұл мақалада көптілді білім беруге бейімделген виртуалды портал арқылы оқытудың автоматтандырылған жүйесін жобалау және өңдеудің түрлі әдістері қарастырылған. Тәуелділік функциясы рейтингтік жүйелердің ерекшеліктері мен оқытушының эксперименттік тәжірибесіне негізделген бейімделген портал құруға мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: тақ жиындар теориясы, тәуелділік функциясы, виртуалды портал, бейімдеу.

Summary

This article deals with different design approaches and automated systems desing for educational purpose, which allows for virtual portal vealiration with adaptation for multilingual education. Using the function allows you to build a flexible learning portal that takes into account features of the rating system and the experiment of teachers.

Key words: theory of fuzzy sets, the membership function, the virtual portal, adaptation.

ӘОЖ. 101.8: (001+6)

ҚОҒАМДЫҚ, ЖАРАТЫЛЫСТАНУЛЫҚ ЖӘНЕ ТЕХНИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАРДЫҢ ӨЗАРА ИНТЕГРАЦИЯЛАНУЫ МЕН СИНТЕЗДЕЛУІНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ҚАЖЕТТІЛІГІ

Б. СЕЙСЕНОВ, философия ғылымдарының докторы, профессор
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Қазіргі ғылымдардың көптеген даму заңдылықтарының ішінде ғылым-білімді синтездеу мен интеграциялауға айрықша мән беріледі. Ғылыми білімнің бірлігі бүгінгі күні шындыққа айналып, техникалық ғылымның маңызды даму заңдылығына айналып отыр.

Техникалық ғылымға біртұтас көзқарасты орнатудағы өзгерістердің бәрін математика ұсынады, өйткені, ол ғылымдардың, ғылыми-техникалық білімдердің синтездік бірлігін сандық призманың саңлауынан қарауға негізделеді. Бірақ, ғылымды математикаландыруды қарастырғанда оның басқа „сыртқы“ формаларын қозғамай, тек интегративтік функциясын орындайтын мәнін, яғни негізгі ғылыми танымға бара-бар тарихи формасын сипаттаумен ғана шектелу, толық болмас еді. Бұл арада француз ғалымы Р.Томның: „Механика мен физикада басты рөл математикада жатыр“, – деген сөзін еске түсірген жөн болар еді. Физика заңдарының кереметі, „физиканың ерекше көтеріңкі математикалық статусы“ жөніндегі сұраққа жауап табуға әрекеттеніп, Ж.М.Леви-Леблонға сүйене отырып, Р.Том физикада математика қолданылмайды, ол соның ішінде деп тұжырымдайды. Физика мен механиканың мәні құбылыстардың (жылдамдық, күш, энергия, кинетикалық момент) себептерін ашуға байланысты, ал бұл болса өздерінің бастапқы анықтамаларында-ақ математиканы талап етеді. Физикалық заңдардың математикалық өрнектелуі оның өз өмір сүруіне тән анықтамасының қажетті салдары болып табылады. Р.Том „физиканы ғылымдар парадигмасы“ жасайтын „физика заңдарының кереметін“ математиканың басқа ғылымдарда қолданылуына қарсы қойып, оларда математиканың рөлі тез төмендейді деген ой айтуы еді. „Химияда, – деп жазады Р.Том, – аздаған екі молекулалардың жергілікті өзара әрекеті ешқандай сандық модельде игерілмейді және химияның басым көпшілігі „сапалы“ қорытындыларға назар аударады. Ал, биологияда халықтың тұрғыншылық теориясын есептемегенде...математиканы қолданудың үлкен практикалық маңызы жоқ және аз ғана теориялық мүдделікке саятын жергілікті құбылыстарды ғана модельдеуге тіреледі. Қазіргі математиканы пайдалануда қарапайым ғана статистиканы қолдану «шегінен шықпайтын физиология, экология, социология ғылымдарында да осы сияқты жағдайлар қалыптасқан»- деп көрсетеді [1]. Осыған ұқсас пікірді математиканың қоғамдық ғылымдарға енуіне сенімді бола тұра америка ғалымы Р.Уайлдор да білдіреді. Олардың арасындағы байланыстың болмауын түсіндіре келіп, оның сөзіне қарағанда, қоғамдық ғылымдар физикамен салыстырғанда өзінің ғылыми дамуының есігі алдынды аша алмай тұр деп көрсетеді. Біздің көзқарасымыз бойынша, мұндай пессимизмдік бағыт толық ақтаған жоқ.

Жоғарыда келтірілген пікірлер аталған білім салаларының математикаландырылуы біркелкі емес екендігін дұрыс көрсеткенімен, мұнда көптеген қайшы пікірлер бар деп санаймыз. Мысалы, Р.Том материя қозғалысының физикалық формасынан басқа түріне математиканы қолдана зерттеуді үзілді-кесілді жақтырмайтын пікір айтады. Біздің көзқарасымызша, математика қазіргі заманғы ғылыми-танымдық қызмет структурасында физикадан да күрделі басқа ғылым объектілерін зерттеуде де аса маңызды рөл атқара алады. Қазіргі заманғы ғылыми білімді, әсіресе әлеуметтік-экономикалық және гуманитарлық білімдердің математикаландыру процесінің қазіргі уақыттағы күшеюін адамның өзі және шындық туралы терең рефлексин тудыратын, өзінен жоғары жалпы адамдық проблематика демдеп тұрған қоғамдық, жаратылыстанулық және техникалық ғылымдардың интеграциялану контексінде қарау керек болады.

Ғылыми-техникалық прогрестің шапшаң дамуы, оның қарама-қайшылығы, күрделілігі, көлемділік сипаты қоғам мен табиғат өзара әсерінің біртұтас жүйесінде көп аспектілі, көп деңгейлі глобальді проблемаларды туғызады. Ал бұлар тура не жанамалап болсын түптеп келгенде, адам мәселесіне, оның мәні, дамуы, оның қазіргісі мен әлеуметтік болашағы туралы мәселелерге тіреледі. Осы объективті шындықтың негізгі сипаты болатын тұтастығына жауап беру, тек бірыңғай кешенді ғылыми пәндердің қолынан келеді, ол қазіргі жүзеге асуында байқалаып отыр. Адамға байланыссыз ғылым немесе ғылыми теория жоқ, қайсы болмасын оның тірі организмінің атомдық бөлшектерінен бастап әлеуметтік жүйелерге және олардың өзара қатынастарына дейін қай аспектіде қарасақ та да бәрі де адамға келіп тіреледі. Адам проблемасы жаратылыстану мен қоғамтануды біріктіруге мүмкіндік беретін негізгі іргетасы болады. Бұл аспектіде туатын мәселелерді, осы ғылыми пәндер әдістерінің тірі бірлігіндегі өзара әсерін қажет етіп, өзінің шындық көрінісін ғылыми білімнің күрделі интеграциялану процесінде пайда болатын синтезделген ғылымдардың шешімді процесі, тек қана қоғамдық дамудың жоғары техникалық деңгейінде – өндірісті автоматтандыру деңгейінде жүзеге аса алады. Олардың өзара іс-әрекеттері мен өзара араласып енуі көп жақты болған сайын, ғылыми-техникалық білімнің даму деңгейіне ғылымның әсері тиімді бола бермек. Соңғысының барысында өндіріс процесін басқару заттың ақыл-ой функциясына айналып, ой қызметін техникалық құрылымдар орындайтын болады. Бұл маңызды жағдай техниканы түбірінен қайта жаңартудың алғышарты қызметін атқарып, адам мен машинаның өзара байланысын принципті түрде өзгертіп, ал, тереңірек ойласақ, жаңа әлеуметтік-мәдени қатынасты қалыптастырады.

Автоматтандырудың жағдайы тарихта алғаш рет адамды машина өндірісінің техникалық жүйесіне оның құрамдас бөлігі ретінде қатысудан босатып отыр. Өндіріс учаскелерінің барлығын түгел автоматтық қызмет қамтамасыз ететін автоматтандырудың толық сатысында Ресей ғалымы В.С.Швырев: „Жобалаудан бастап, дайын өнімді бергенге дейін, оған қоса оптималдық шешімді таңдауға дейін, өнімнің қандай болмасын басқа түрін шығаруға берілген бағдарлама бойынша өзіндік жобалауға дейін... адам технологиялық бостандық баспалдағына көтеріледі“ [2], – деп көрсетеді.

Автоматтандырудың деңгейінде кибернетика, логика, физика, химия, биология, лингвистика, әлеуметтік және т.б. ғылымдардың математикамен тығыз байланыстылығы артып, өздерінің қарқынды дамуына мүмкіндік алады. Бұл жерде, ең алдымен, ішкі математикаландыру маңызды рөл атқарып, барлық жаратылыстану ғылымы жемісті түрде өзара әсер жасауға, техникалық ғылымның өрістеуіне мүмкіндік береді. Бұл өзара әсер бүгінгі күнде математикаландырылған ғылымдардың интеграциялануының жаңа сапалық деңгейіне көтерілген кезі болып, ғылыми сипаты жағынан өздерінде үлкен интеграциялық потенциалы бар терең техникалық ғылыми күшке ие болуда.

Қазіргі уақыттағы ғылымдардың синтезінен туындайтын нағыз төңкеріске бергісіз жаңалықтардың бірі химияның технологиялық жаңалықтары бірқатар халық шаруашылығы салалары мен өнеркәсіпке аса зор маңызы бар пайда тигізіп отыр. Егер бұрын химиядағы математика басқамен салыстырғандағы рөлі аз болса, енді математиканың әдістері физикалық химияға еніп отыр. Химиялық термодинамика, статистикалық химия, химияны элементарлық математика шеңберінен шығарып, теориялық химияны дифференциалды және интегралды есептеу деңгейіне жеткізді. XX ғасырдағы кванттық теория және оған байланысты жаңа математикалық аппарат- операциялық есептеу кванттық химияның жасалуына жағдай жасады. Математикалық моделдеу әдістерінің көмегімен химия қазіргі кезде эмульсиондық полимерлеудің жылдамдығын реттейтін нәтижеге ие болды. Бұл полимерлік материалдарды өндірісте өндірудің негізгі тәсілі болып табылады.

Соңғы кезде химияға математикалық статистиканың идеялары, информация теориясы мен топтық теория да қарқынды ене бастады. Математиканың топтық теория әдістерін пайдалану химиялық және күрделі химиялық-технологиялық мәселелерді шешуде аса бағалы нәтижелерге жеткізіп отыр. Мұны, әрине, басқа жолдармен табу мүмкін болмас еді. Демек, математика, химия арқылы өндіргіш күштің негізгі элементі болатын, еңбек заңының жаңа түрін жасауға әсер етеді. Химияны математикаландыру химиялық заңдардың (заттардың сақталу заңы, Дальтон заңы, т.б.) ашылуына жағдай жасады. Сондай-ақ, атомдық масса, молекулалық масса, т.с. сияқты химиялық түсініктерді жасап, химияны дәл ғылымға айналдырды.

Егер де математика сирек те болса химияда қолданыс тапса, физикада оны қолданудың көп ғасырлық тарихы болса, ал биология жөнінде мұны айтуға болмайды. Өйткені биология ғылымында математика, механика мен физикаға, химияға қарағанда өте аз мөлшерде пайдаланылып келген болатын. Ал, қазіргі заманғы ғылыми танымның ең басты озық бағытының бірі - биология. Нәтижесінде, биология саласының физика, химия мен математика сияқты ғылым салаларымен өзара әсерлесу процесінен физикалық-математикалық биология деген білімнің жаңа кешенді саласы пайда болып, қарқынды даму үстінде. Бұл сала интеграциялаушы негіз есебінде бірнеше ғылыми бағыттарды, мысалы, биохимияны, биофизиканы, биоорганикалық химияны, молекулалық биологияны, молекулалық генетиканы, цитологияны, иммунобиологияны және т.б. біріктіреді. Биологияның осы кешенді жаңа салалары негізінен екі бағыттағы зерттеулерді – клетка биологиясын және организмдер қауымдастықтарын бірге зерттейтін биологияның тағы бір саласын қолдап, келешекте жақындаса түсуіне, медицинаның дамуына әсер ететіндігі сөзсіз. Осындай танымның аса күрделі саласында математиканың маңызы көбінесе ішкі мүмкіндігі арқылы анықталып, ең бастысы оның ажыратылмайтын бөлігі болған физикалық танымға, белең алып, қарқынды дамып келе жатқан компьютерлі математиканың жаңа құралдарымен тиімді әдістерін көптеп қолданылуы болады. Онсыз математикаландыру процесі осы кезеңдегі маңызды міндеттерін орындай алмас еді. Практикалық жағынан қазіргі заманғы ғылыми білімді математикаландыру феноменін шын іске асыру абстрактылықтан нақтылыққа қарай өрлеу диалектикалық принципіне сәйкес іске асып келеді. Математика өзінің теориялық құрылым саласында абстракцияның бұрын болмаған шыңына жетіп, қолданбалы математика түріндегі нақты объектілерді зерттеуге яғни теориялық таным қорытындыларын практикада қолдану, білімдерді заттандыру процесіне қайтып оралады. Бұл практикалық қолдану математикалық аппаратпен математикаланған ғылымның түсіндірмелі аппартын қосуға бейімдейтін әдіске айналатын конструктивті математиканың көмегімен орындалады [3].

Конструктивті математиканың шығу пункті болып табылатын „алгоритм“ ұғымы, математикалық білімнің тарихи дамуының жемісі. Ерте заманда математиканың көптеген есептерінің қайсысы болмасын конструктивті әдістерді іздестіруден тұрған. Бұл іздестірулер, әсіресе, қолайлы символиканың құрылуына байланысты күшейіп, сонымен бірге бара-бар әдістердің принципиальді түрде болмауын ескерсек, кейбір жағдайда (квадратура туралы есептер және соған ұқсас) ғылыми-білімнің дамуының қуатты стимулы болатындығын айта аламыз. Есептерді тікелей шығару мүмкін болмайтындығын түсіну – XIX ғасырда теориялық-жиындық концепцияның шығуына әкеп соқтырады. Бұл XX ғасырдың ортасында қайта қарқынды дамуы нәтижесінде осы конструктивті мәселеге жаңа деңгейде қайта оралу мүмкін болды. Бұл жаңа кезеңде алгоритм ұғымы әбден байытылған, тиянақты ұғымға айналған болатын. Конструктивті математиканың құрылуы, математикалық объектілердің өмір сүруі туралы тұжырымының, оның құрылуы мен жоққа шығару мүмкіндігін байланыстыруға тырысатын дүниеге конструктивті математикалық көзқарас тұрғысында іске асырылған болатын. Нәтижесінде дәстүрлі жиындық математиканың бірқатар негізгі ережелері таза теоремалардың шығарылуына мүмкіндік берді. Конструктивті математика үшін өзекті болатын шексіздік идеясын толығымен жоққа шығару арқылы потенциялды жүзеге асатын абстракция шеңберінде қарау – тән қасиет. Алгоритмнің дәл ұғымында келісіп алынған интуитивті ұғымның конструктивтік арнаулы логикасын конструктивтік процестердің ерекшелік-терін ескере отырып пайдаланылады. ЭЕМ-ді математикалық және рухани өндірістің әр түрлі шеңберінде тиімді пайдалануы, қазіргі заманғы математикалық аппараттың осындай сапалық ерекшеліктеріне байланысты. Мұнсыз өлі немесе тірі табиғаттың заңдылықтарын толық тану мүмкін емес. Танымның биологиялық жағынан да, сондай-ақ, материя қозғалысының әлеуметтік формасына, сыртқы сипатының қосылуын сақтай отырып, объектіні терең зерттеуде белгілі бір нәтижеге жетуге мүмкіндік туғызады.

Айтылғандарымызды нақтылайық. Биологияда математикалық әдістер аса көп эксперименттен алынған мағұлыматтарды жазып, бір жүйеге келтіру үшін пайдаланылады. Көптеген тірі организмдердің заңдары математикалық бейнелеуге ие болды. Биологияда барған сайын ықтималдық теориясы, автоматтардың абстракциялық теориясы, зерттеудің статистикалық әдістері, жанды жүйелерді модельдеу әдістері кеңінен қолданылады. Математикалық модельдеу биологияны математикаландырудың жалпы процесінің негізгі бөлегі бола отырып, эмпирикалық биологиялық материалдарды элементар математикалық теңдеулерге қарағанда жоғары дәрежелі теориялық деңгейде ашуымен көрінеді. Биологиядағы математикалық модельдеу – бұл математикалық құралдардың, айтайық, символдар, теңдеулер, теоремалар және т.б. көмегімен биологиялық объектілерді немесе процестерді баяндау мәселелері ғылымның экспериментальды мәліметтермен байланыс бірлікте қарастырылады болып табылады. Биологиялық білімнің қазіргі кезеңде ең көп математикаландырылған бөлімі – генетика. Абстрактылы математикалық кеңістікті пайдалану және объектілердің метрикалық сипатын бейнелейтін ұғымдардан жалпы да тереңірек ұғымдарға өту негізінде абстрактылы математикалық биологияны жасау процесі жүріп жатыр. Мұнда алдымен жеке алынған биологиялық процестердің әр түрлі формальді математикалық модельдерін құрудан бастап, онда да тек биологияның теориялық-жиындық түсініктерін ғана пайдаланып қоймай, сонымен бірге алгебра, комбинотарлық топологияны, структуралық бейнелеу және т.б. пайдаланылуда. Қазіргі заманғы математиканың даму деңгейі биологиялық білімнің бағытын, теориялық синтезін анықтап, іздестіруге мүмкіндік береді және таза биологиялық заңдарды топологиялық тілмен, топтық теориясым ен және теориялық информация структуралары тілімен жүйелі сипаттап бере алады. Математика мидың биотогын орталық нерв жүйесін, тұқым қуалаушылықтың жолдарын молекулалық деңгейде зерттеуде аса бағалы нәтижелер беріп генетикалық кодты анықтап өз мүмкіндігін көрсетті.

Қазіргі уақытта ғылымда, жекелеп алғанда биологияда, табиғат құбылыстарында жиі кездесетін үздікті немесе секірмелі сипаттағы процестерді зерттеудің өте қажеттілігі туып отыр. Бұл турасында табиғаттағы өзгерістердің секірмелі түрін зерттеуге қажетті жаңа теория – катастрофалар теориясына ерекше назар аударуға болады. Бұл теория туралы одан оншақты жыл бұрын зерттеу жұмыстарына қолдануға қарсы аса тілмарлықпен сенімді түрде сақтандырған сын-ескертпе толқыны болды. Шындығына келсек, бұл теорияны қолдану мүмкіндігін дұрыс ойлап, объективті түрде ақыл–ойды салмақтау арқылы шешкен жөн болар. Себебі, оның ең басым қолданылуының нәтижелі өріс шеңбері білімнің физикалық саласын, материя қозғалысының ең жоғары түрін зерттеуде оған көп сенім артуға болады. Сонымен бірге, генетикада ол жүйке импульстерін зерттеп, таратуда аса табыспен пайдаланылып отыр. Мұндай теорияны қолдану мүмкіндігі кең әрі жан-жақты. Оның ең басты қолданылатын жері – биология, медицина саласы болуы ықтимал. Бұл әзірге секірмелі түрдегі процестерді зерттейтін бірден-бір теория, сондықтан да ол алдағы уақытта теориялық жағынан өңдеуді талап ететін және келешекте үлкен үміт күттіретін теорияның бірі. Дегенмен, қазіргі зерттеліп жатқан биологияның молекулалық деңгейінің өзі өте күрделі болғандықтан, ол білімді математикаландыру жолында белгілі бір дәрежеде қиындықтардың кездесуі сөзсіз. Математикалық әдістердің биологиялық зерттеулерге терең еніп, әрі қарай қолданылуы биология ғылымының гүлденуіне, теориялық деңгейі артып, дәл ғылымға айналуына (биофизика, биоинженерия, бионика т.б.) қазіргі кездегі ғылыми–техникалық танымның алғы шебіне шығуына жағдай жасады.

Әлеуметтік-гуманитарлық ғылымдардың зерттеу объектісінің физикалық-химиялық және биологиялық зерттеу объектілеріне қарағанда анағұрлым күрделі болғандықтан, айтайық, қоғамдық құбылыстар мен процестердің көп факторлылығы, субъективтік фактордың болуы оның схоластикалық сипатын анықтап, математиканы қолдану қиындай түседі. Нәтижесінде математикалық модельдер де әдетте детерминді емес, схоластикалық сипат алатын. Онымен бірге әлеуметтік құбылыстарды анықтайтын факторлар мен шартты жағдайлар, кәдімгі жаратылыстану ғылымдарындағыдай сандық қатынастар арқылы көрсетуге қиындық келтіретін, тек сапалық белгілерден ғана тұрады. Бұл математиканы қолданудың жаңа әдіс-тәсілдерін зерттеуді қажет етеді. Әлеуметтік-гуманитарлық ғылымдар зерттейтін құбылыстар мен процестердің мәнін аса толық көрсету мақсатында орыс философы Г.И.Рузавин атап көрсеткендей, қазір „метрикалық емес“ математикалық модельдерді қолдану проблемасы шешіліп жатыр. Олардың басты ерекшеліктері: „Бұларда мөлшер, сандық қатынастар арасындағы тәуелділіктер таза сандық жағынан емес, әр түрлі структуралық қатынастармен бейнеленеді. Мысалы: ұжымдағы бағыныштылық пен иерархиялық қатынастарды анықтауда, шешім қабылдауда, қандай болмасын альтернативтік жағдайда бағалу дәрежесін белгілеуде немесе қандай болмасын әрекеттердің пайдалылығын салыстырмалы бағалауда, т.с.с көрініс табады“ . Бұл жерде Г.И.Рузавин : „Теориялық көзқарас бойынша, абстрактылы структуралар мен категориялар... мөлшерлер арасындағы кәдімгі сандық қатынастардың қорытылуы, демек өзінің мәні жағынан аса терең, қолдану өрісі жағынан аса кең“, – деп атап көрсетеді [4].

Мамандардың ескертпесі бойынша, категорияның алгебралық теориялары мен функциялары математиканың басқа теорияларындай емес, өзінің формасы мен мазмұны жағынан нағыз жалпы социологиялық зерттеулерге бейімделген. Біз бұл жерде қазіргі заманғы математикалық құралдардың әлеуметтік-гуманитарлық ғылымдарды зерттеудегі қолдану дәрежесін арттыратын жаңа математикалық тәсілдер мен әдістер жасалуда. Бұл жерде ең маңыздысы: біріншіден, қаралған материал барлық үшбірліктегі ғылыми комплекстің – жаратылыстанулық, гуманитарлық және техникалық білімді жалпы математикаландырудың мүмкіндігінің жеткілікті жоғары деңгейде екенін атап көрсетеміз. Бұған математика мен техникалық ғылымдар аралығында пайда болған кибернетикалық, информатикалық және компьютерлік әдістердің пайда болуы бүкіл ғылыми танымның қоғамдық, жаратылыстанулық және техникалық салаларды түгел қамтып өзара синтезделуіне ықпалын күшейтіп, қазіргі өркениеттің жағдайында ақпаратты-техникалық қоғам дамуының жағдайын жақсартып, ең қажетті кепіліне айналып отыр. Ғылым мен техниканың сапасын жақсартып, ақпараттық қоғам дамуының ауқымды мәдени үдерістерінің адами-гуманистік бағытын арттыруға жол ашады. Ең бастысы, осы глобальды синтездеу қоғамға арналған көп жақты жобалар мен болжамдар, соның ішінде күнделікті саналы ой мен талғамның молдығы және қозғалысы жаңа теориялық ой шешімдердің негізінде зерттеушілер мен ізденушілерге адам өміріне қажетті нақтылық пен орайлылықты табуға көмектеседі.

Дегенмен, бұл жерде математикаландыру процесінің әлі де болса жетілу үстінде екенін мойындауымыз қажет, ондай болмаған жағдайда олардың сыртқы формаларын шартты түрде белгілеуге болмас еді.

Қазіргі заманғы математиканың кейбір биологиялық процестерді, тіршілік процестерін тұтасымен зерттеуге бара-бар қолданатын математиканың тарауы шықпай тұрғанда да қабілетті болғанын қазіргі ғылым толығымен мойындайды. „Биологияда математика көп, бірақ жанды дүние туралы меншікті теориялық білімді құратын математика жоқ“ [5],– деп, В.В.Налимов әділ көрсетеді. Гуманитарлық ғылымдарда да жағдай осындай. Шындығына келсек, қазіргі заманда ғылыми білімді математикаландырудың екінші формасының жүруіне қажетті математикалық құралдар жөнінде айту әлі ертерек болып отыр. Мұнда, әзірге жұмыс істеп тұрған математикалық аппарат оның мазмұнына енбеген“, білімнің нақты салаларында қолданыс тауып жүрген амалдар болып табылады. Осыған орай, материя қозғалысының жоғары түрін зерттейтін жеке пәндер әзірге өздері үшін бара-бар болатын, өлшемдері сәйкес келетін сапалық және сандық диалектиканы әлі шығарған жоқ. Бұл ғылымдардың түпкілікті математикаландырылуы болашақтың ісі екендігін көрсетеді. Бұл тұрғыдан алғанда, жаңалық рефлексінің жеке ғылыми деңгейінің оғаштығын жоққа шығарып, ал қоғамдық практикадан туған глобальді проблематикалық мәнін түсінуге байланысты оның дамуы мен тереңдей түсуін жорамалдауға болатын контекстен тыс білімді математикаландыру феноменінің маңызы, өзектілігі мен қажеттілігі өз мәнін жоғалтады. Бұл адамды әлеуметтік-мәдени болмысының мәнін ұғыну мен одан да тереңдей ұғынуға, оның ішкі терең диалектикасын ашуға жетелейді. Осындай танымның күрделі де, шексіз даму процестері жолында жалпы философиялық, методологиялық және жеке ғылыми сипаттағы көптеген проблемалар туындайды. Бұлар алдағы арнайы жеке зерттеулердің тақырыбы болып табылады.

Еліміздің индустриалды өндірісін дамытуға қажетті, ғылыми-техникалық прогрестің шешуші салаларында ең алғы шепке шығу үшін информатика мен есептеу техникасын, халық шаруашылығын электрлендіру мен роботтандыру, роторлы және роторлы-конвейрлік желілерді, бионанотехнологияны, ғаламтор интернетті, осы заманғы ғылым мен техниканың басқа да бірқатар жетістіктерін бірге қолдану қажеттілігі туындап отыр. Техника мен технология саласын алдағы уақытта дамыту, бұрынғы және қазіргі кездегі, қоғам дамуының заңдаылықтармен анықталатын болады. Адамзат қоғамы жүйесінде қызмет атқаратын техниканың бионика, психология заңдарының іске асып, сондай-ақ ЭЕМ-мен, компьютермен, жаңа медициналық әр түрлі автоматты құрылғылармен жабдықталған соңғы „адам-машина“ жүйелерін одан әрі жетілдіре түсетіні сөзсіз. Өзін-өзі басқарып, ұйымдастыра алатын техникалардың пайда болуы, синэнергетика ілімінің іске асуымен бірге адамзат қызметі және жеке алғанда жалпы ғылыми нәтижелер сапалылық жағынан өз дамуының жаңа белесіне өрлейді деп күтілуде.

Қорыта келе, қазіргі ғылыми танымның тұтас дамуында жаратылыстанулық, техникалық және қоғамдық ғылымдар бір-бірімен жақындасып, синтездеу процесі басымдық танытуда. Техникалық ғылымдар аралық буын есебінде, бір жағынан, өзінде екі жақтың да сипатын біріктірсе, екінші жағынан, оларды бір-біріне жалғастырушы болып белсенді рөл атқаруда. Осыған орай, математикаландыру осы глобальды синтездеудің формасына айналып, өзінің шығармашылықтық және гуманистік потенциалын толығынан көрсетуде.

Әдебиеттер:

1. Thom R. Roze et limites de la Mathematisation en Seinces/ Pensee.P., 1977.P.37.
2. Wilder R. Mathematics as a cultural Sustem.-Oxford, 1981.-P.156-159.
3. Рузавин Г.И. Математизация научного знания.- М., 1984.

4. Шанин А.Н. Интегративные функции физико-химической биологии. // Природа. - 1986. - №12. – С.3-10.
5. Налимов В.В. Является ли знание научным в той степени, в какой оно математизировано? // Математизация современной науки: предпосылки, проблемы, перспективы. - М., 1986.
6. Сейсенов Б. Математика және техникалық ғылымдардың дамуы. - Алматы, 1997.
7. Розин В.М. Техника и социальность // Вопросы философии.-2005.-№5.-С.95-107.
8. Сейсенов Б. (қаз. тіліне аударма) Әлемдік философиялық мұра. Ғылым мен техниканың батыстық философиясы. – Алматы, 2006. – Т.10. - 422-557 бб.

Түйіндеме

Бұл мақалада техникалық ғылымдардың өзара интеграциялану мен олардың жараты-лыстану және қоғамдық ғылымдармен бірлесе тұтасып өзара синтезделуінде математикаландырудың ықпалы күшейетіндігі, ғылым мен техниканың ақпараттық қоғам дамуының ауқымды мәдени үдірістерінің артуына жол ашатындығы көрсетіледі.

Кілт сөздер: білімді математикаландыру, ақпараттық қоғам, интеграция, автоматтандыру, кибернетика, физика, ғылымдардың синтезі, математикалық әдістер, математикалық модельдеу.

Резюме

В данной статье рассматриваются интеграция технических наук и повышенное влияние математизации в их взаимном синтезе с естественными и общественными науками, а также раскрытие пути культурных процессов развития информационного общества, улучшения качества науки и техники.

Ключевые слова: математизация знаний, информационное общество, интеграция, автоматизация, кибернетика, физика, синтез наук, математические методы, математическое моделирование.

Summary

The integration of technical sciences and enhanceable influence of mathematisation in their mutual synthesis with natural and public sciences, and also disclosure of cultural processes development ways, informative society, improving qualities science and techniques are considered in this article.

Key words: mathematisation knowledge, the information society, integration, automation, cybernetics, physics, synthesis of science, mathematical methods, mathematic modeling.

УДК 37.016.02.51

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ КАК ОДНОЙ ИЗ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩЕГО СПЕЦИАЛИСТА

З.Т. СЕЙЛОВА, кандидат педагогических наук, доцент,
А.А.ИБРАЕВА, З.А.ЕРГАЛАУОВА - магистры
Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата, Республика Казахстан

Современный темп развития всех сфер деятельности человека предъявляет к профессиональному образованию инженеров-специалистов высокие требования такие, как профессиональная компетентность, способность анализировать, способность учиться и самообразовываться, рассудительность, творческий подход к нестандартным ситуациям и др. Решение в процессе обучения математике на практических занятиях прикладных задач способствует формированию профессионально важных качеств будущего специалиста. Для развития вышеперечисленных профессиональных качеств, студентам необходима глубокая, всесторонняя подготовка по циклу общенаучных дисциплин, одной из базовых единиц которой является «Высшая математика». Признаками их развития являются логичность, доказательность, умение доказывать, аргументировать суждения, навыки постановки задачи, анализировать поставленную задачу, находить приемлемые методы решения, провести анализ решения.

Математика для инженера – это метод мышления. Известный математик, Гнеденко Б.В. пишет: «За последние двести пятьдесят лет инженерное дело широко использовало математические методы для решения своих задач. Одновременно оно оказало мощное воздействие на прогресс самой математики. Легко можно указать десятки направлений математической мысли, появившиеся только за последние шестьдесят лет, большинство которых испытало воздействие инженерной практики, как при постановке первичных вопросов, так и при развитии теории. Инженерное дело также не осталось в накладе: без широкого использования математических методов прогресс техники в последние десятилетия, как у нас, так и за рубежом был бы невозможен» [1].

Потребности в высококвалифицированных специалистах в различных отраслях промышленности РК, в частности, в нефтегазовой отрасли, обладающих качественной профессиональной подготовкой, разбирающихся в новейших технологиях, возрастают с каждым днем. Особенно это актуально для Кызылординского региона, где по последним данным 86% промышленной продукции, произведенной в Кызылординской области приходится на нефть. В свою очередь, математическая компетентность будущего специалиста нефтегазовой промышленности как составляющая единица профессиональной компетентности формируется в ходе реализации в обучении математике принципа прикладной направленности.

Математические исследования, моделирование и проектирование особенно влияют на развитие науки, техники и развитию экономики. В связи с этим расширяется и круг применения математических методов для решения реальных задач. Целесообразность использования прикладных задач в преподавании математике на инженерно-технических специальностях вуза объясняется следующими *положениями*, которые взаимосвязаны между собой и их деление чисто условно:

1) Математические методы применяются при изучении дисциплин общенаучного и специального циклов профессионального обучения будущих инженеров, являясь реализацией межпредметных и междисциплинарных связей.

В настоящее время нет ни одной области науки, где бы ни применялись методы математики. Это объясняется их универсальностью. Известный математик прошлого Р. Декарт говорил о том, что «математику отличает не столько предмет ее исследований, сколько метод»

Для реализации данного положения на инженерно-технических специальностях вуза следует в первую очередь пересмотреть содержание математического курса. С целью осуществления потребностей общенаучных и специальных дисциплин необходимо соответственно с этим формировать содержание курса математики, то есть обеспечить студентов обязательной системой математических знаний (системой понятий, методов исследований и анализа), на которых базируется специальная подготовка студентов - нефтяников.

Прикладные задачи раскрывают связь высшей математики со смежными естественно научными и специальными дисциплинами, как физика, химия, гидравлика, теплотехника, теоретическая и строительная механика, сопротивление материалов, механика жидкости и газа, теплогазоснабжение и другие.

Анализ учебников, типовых учебных программ, стандартов, анкетирование студентов и преподавателей выпускающей кафедры РЭНГМ показал, что использование математического аппарата не прерывается, более того, из курса в курс потребности в математических знаниях возрастают.

Проведенный анализ также установил, какие именно задачи необходимо включать в содержание курса высшей математики. По окончании первого года обучения студент-нефтяник, согласно типовому плану, должен уметь (относительно курса высшей математики):

- использовать методы математического анализа и моделирования задач естествознания в инженерной деятельности;

- методы математической статистики (теоретического и экспериментального исследования);

По окончании второго курса студент-нефтяник должен уметь:

- рассчитывать давление жидкости и газа (иметь навыки вычисления определенного интеграла);

- законы нагревания жидкости и газа (применение производной)

После третьего года обучения студент-нефтяник должен:

- уметь производить расчеты по основным свойствам жидкостей и газа, различным видам движения жидкости и газа (уметь составлять и применять общие дифференциальные уравнения первого порядка);

- иметь навыки расчетов по статике и кинематике жидкостей и газа.

- формулировать инженерную задачу и составлять соответствующую математическую модель;

- иметь навыки подсчета геологических запасов

После четвертого года обучения студент-нефтяник должен уметь и знать:

- применять пакеты прикладных математических программ для решения инженерных производственных задач;

- проводить статистический анализ теоретических и экспериментальных исследований;

- численные методы моделирования и измерения нефтегазовых пластов;

- интерполирование функций;

- методы вычисления двойных интегралов;

- методы решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка на основе построения разностных аналогов этих уравнений.

Как мы видим, требования к математической подготовке каждого года обучения на специальности «Нефтегазовое дело» возрастают, в связи с этим в содержание курса высшей математики необходимо вводить прикладные задачи, удовлетворяющие вышеназванным потребностям.

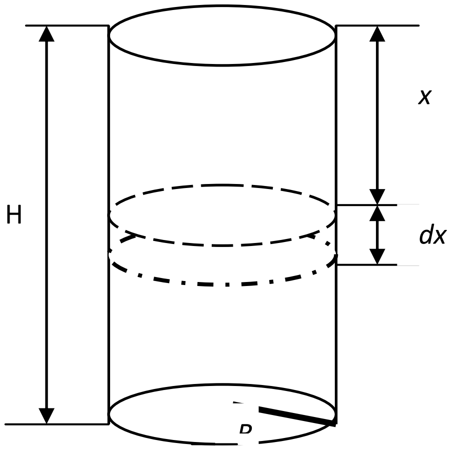
2)Прикладные задачи усиливают положительную мотивацию изучения студентами математики, повышая познавательный интерес к самой математики, способствуют самообразованию, саморегуляции, самоконтролю.

Мотивация в обучении является важнейшим условием процесса познания. Положительная мотивация на успех направляет, заставляет самостоятельно действовать, осуществлять задуманное, несмотря на трудности и препятствия. Математика для большинства студентов, представляется наиболее сложным предметом, потому многие из них даже не пытаются изначально овладеть математическими знаниями, ссылаясь на трудность предмета и на пробелы в знаниях школьного курса математики [2]. Для успешной математической подготовки очень важно желание самого студента в получении знаний. Студент с первых дней пребывания в стенах университета должен понимать, что без фундаментальной математической подготовки будет проблематично осваивать общенаучные и специальные дисциплины

Теоретическая математическая подготовка в вузе базируется на школьном курсе математики, а для решения прикладных задач и задач с профессиональной ориентацией студенту-нефтянику еще необходимы знания из других дисциплин (физики, химии и т.п.). Зачастую низкий уровень подготовленности студента по школьному курсу математике и другим смежным дисциплинам, отсутствие умений и навыков в логическом построении рассуждений, а также элементарных математических моделей практических задач, усугубляется сокращением аудиторных часов в вузовском обучении в пользу самостоятельной работы, навыков которой у студента первого курса почти отсутствуют и, тем самым, тормозит весь учебный процесс. Преподавателю математики приходится «закрывать пробелы» в знаниях бывших школьников, теряя на объяснения нового материала больше отведенного по плану времени. Часть студентов, не имея в своем интеллектуальном багаже достаточной школьной математической подготовки, вовсе теряют интерес к высшей математике, стремясь обойти этот предмет, не понимая его значимости при изучении специальных дисциплин. Здесь очень важна роль преподавателя математики как наставника и психолога в формировании положительной мотивации к обучению.

Преподаватель на занятиях по математике через прикладные задачи и задачи, связанные с их будущей профессиональной деятельностью, может и должен показать перспективы, которые дают умения и навыки в математическом моделировании этих задач, тем самым стимулируя познавательный интерес слабых студентов. Задача преподавателя состоит не столько в передаче готового знания, сколько в организации такого процесса обучения, при котором у студента возникла бы необходимость и готовность самообразовываться. Конечно, в обязанность преподавателя вуза не входит закрывать пробелы учащегося в знаниях по школьной программе, но он обязан так организовать самостоятельную работу студента, чтобы во внеаудиторных занятиях учащиеся были заинтересованы в самообразовании.

3)Прикладные задачи развивают математические способности и способствуют активизации мыслительной деятельности студентов.



Важной задачей преподавания, решаемой в процессе обучения, является развитие у учащихся активного, самостоятельного и творческого мышления [3]. По мере решения прикладных задач студент осваивает приемы анализа, синтеза, делает выводы и т.д. Обучение решению прикладных задач отличается от простой тренировки вычислительных операций, присущей формальной стороне математики. Это отличие заключается в том, что у него не только постепенно накапливаются умения и навыки, но и формируются математические способности. Мыслительный процесс активизируется в деятельности. В математике этой деятельностью становится решение прикладных задач. Включение таких задач в содержание обучения является условием для реализации творческого потенциала учащегося.

Рассмотрим задачу по теме «Применение определенного интеграла к вычислению работы».

Задача. Определить работу A, необходимую для выкачки нефти из цистерны высотой 4м. и диаметром 1м. Плотность нефти p=700кг/м^3, g=9,8м/с^2.

Решение.

Нарисуем чертеж задачи (см. рис.1) На глубине x выделим слой нефти высотой dx.

$$dA=6860\pi R^2dx$$

Для того чтобы выкачать слой нефти весом P на высоту x, затрачивается работа $A=Px$. Как известно, объем цилиндра $V=\pi R^2H$. Если глубина x изменится на глубину dx, то объем V изменится на величину $dV=\pi R^2dx$.

Так как плотность нефти равна p=700кг/м^3, то его вес в объеме 1м^3 равен

$$P=pg=700\bullet 9{,}8=6860H$$

Следовательно, вес P изменится на величину

$$dP=6860\,\pi R^2dx$$

Тогда совершенная работа изменится на величину

$$dA=6860\pi R^2dx$$

Интегрируем данное равенство. x изменяется от 0 до H.

$$A=\int_0^H 6860\pi R^2xdx=3430\pi\cdot 0{,}5^2\cdot 4^2=13720\pi\ (Дж).$$

Литература:

1. Гнеденко Б.В. Научно-технический прогресс и математическое образование во втузах. Сб. научно-методических статей по мат.-М., 1978. - С.6-11.

2. Колягин Ю.М., Пикан В.В. О прикладной и практической направленности обучения математике // Математика в школе. - 1985.- № 6. - С. 27 - 32.

3. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики. Книга для учителя. — М.: Просвещение, 1990. - 96 с.

Резюме

В формировании профессиональной компетентности будущего специалиста нефтегазовой отрасли необходима глубокая, всесторонняя подготовка по циклу общенаучных дисциплин, где «Высшая математика» является одной из базовых дисциплин. В данной статье освещается проблема реализации прикладной направленности математического курса для студентов нефтегазовых специальностей. Показана целесообразность использования прикладных задач в преподавании математике на инженерно-технических специальностях вуза. Рассмотрены требования к математической подготовке студента по специальности «Нефтегазовое дело» на каждом году обучения.

Ключевые слова: прикладная направленность, межпредметные связи, математическая компетентность, содержание образования.

Түйіндеме

Мұнай-газ саласындағы болашақ маманның кәсіптік құзіреттілігін қалыптастыруда «Жоғары математика» базалық пәндердің бірі болатын, жалпы ғылыми пәндер циклы бойынша, терең, жан-жақты дайындықты қажет етеді. Бұл мақалада мұнай-газ мамандығының студенттері үшін математикалық курсының қолданбалық бағытын жүзеге асыру мәселесі қарастырылған. ЖОО-дағы инженерлік-техникалық мамандықтарға математиканы оқытуда қолданбалы есептерді пайдаланудың мақсаттылығы көрсетілген. Оқытудың әрбір жылындағы «Мұнайгаз ісі» мамандығы бойынша студенттердің математикалық дайындығына қойылатын талаптар туралы баяндалады.

Кілт сөздер: қолданбалы бағыттылық, пәнаралық байланыстар, математикалық құзіреттілік, білім беру мазмұны.

Summary

“High mathematics” was one of the basic subjects, in the professional competence formation of specialist of oiland gas industry specialist, of future oil and gas industry requires a deep, a cycle of scientific disciplines, where the "Higher Mathematics". This article highlights the issue of the direction of applied mathematics course for students of oil and gas fields. The expediency of the applications in the mathematics teaching to engineering and technical specialties of the university is shown. The requirements for the mathematical preparation of students of "Oil and Gas Business" at each grade level are discussed in the article.

Key words: application oriented, interdisciplinary communication, mathematical competence, the content of education.

ӘОЖ 510.57:517.31

MAPLE ЖҮЙЕСІНІҢ ГРАФИКАЛЫҚ МҮМКІНДІКТЕРІН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУДЕ ПАЙДАЛАНУ

З.Т.СЕЙІЛОВА, педагогика ғылымдарының кандидаты, доцент
А.Ә.ЫБРАЕВА, магистрант, **С.ЕЛДЕСБАЕВА**
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Maple - типтік бағдарламалық жүйе. Оны өзге бағдарламалық тілдерден ерекшелейтін мынадай қасиеттерін атап өтуге болады:

- Қуатты бағдарламалау тілі;
- Құжаттар мен бағдарламаларды дайындаудың және редакциялаудың тамаша редакторы болуы;
- Заманауи диалогтық режимде жұмыс істеуге мүмкіндік беретін көп терезелік тұтынушылық интерфейс ;
- Мыңдаған мысалдарды көруге болатындай қуатты анықтамалық жүйеден тұратындығы;
- Алфавиттік ретпен орналастырылған словарь математикалық түсініктер мен терминдердің сөздігін пайдалану мүмкіндігі;
- алгоритмдердің негіздері мен математикалық өрнектерді өзгерту ережелерінің берілуі;
- сандық және символдық бағдарламалық процессорлары;
- диагностикалық жүйесі;
- ішкі кітапханалық және қосымша функциялары;
- ішкі кеңейту бумаларымен қатар өзге шығарушылардың бумаларын да пайдалана алу мүмкіндігі;
- Кейбір бағдарламалау тілдерінің жабдықтарын пайдалана алуы.

Maple бағдарламасында символдық өзгертулер жұмыстарының негізін жүйе түйіні құрайды. Жүйе түйіні көптеген жүздік негіздік функциялар мен символдық өзгертулер алгоритмдерінен құралған. Жүйе түйіні әрбір келесі нұсқаларда жетілдіріліп отырылады.

Maple-дің жаңа нұсқаларындағы жүйе түйіндерінде көптеген кемшіліктер түзетіліп, анықталған қателіктер жаңа нұсқаларды тестілеу кезінде өзгертілуде.

Сонымен қатар Maple-де операторлар, командалар мен функция-процедуралардың негіздік кітапханасы бар. Ондағы көптеген функциялар, түйін функциялары сияқты, кейбіреулері ешбір бейнелеусіз пайдаланылса, ал керісінше кейбіреулері міндетті түрде бейнелеуді қажет етеді. Сонымен қатар Maple құрамында мәселелеге проблемалық-бағытталған бумалар (packages) да кездеседі және олардың тақырыптары классикалық және заманауи математиканың көптеген бөліктерін қамтиды.

Maple - бағдарламалау тілі ретінде математикалық есептерді бағдарламалаудың ең қуатты да үздік тілі болып есептеледі.

Стохастикалық есептердегі дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін қарапайым графиктер түрінде бейнелеу үшін **Plots** бумасындағы **Odelplot** функциясы пайдаланылады. Мысалы,

$$y'(x)=\cos(x^2y(x))$$

дифференциалдық теңдеуінің $y(0)=2$ және $x=-5$ пен 5 аралығында өзгеру функциясының графигінсалу үшін дифференциалдық теңдеулердің сол жағы туындыны есептейтін **Diff** функциясын пайдалануға болады.

Ал екі теңдеуден тұратын сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімін бейнелеу кезінде Odelplot функциясы арқылы бір координаталар осінде $y(x)$ пен $z(x)$ функцияларын сызуға болады.

Қарастыратын мысалды $y'(x) = z(x)$

$$z'(x) = 3\sin(y(x))$$

теңдеулер жүйесі ретінде алып, $y(0) = 0$, $z(x) = 1$ бастапқы мәндеріне байланысты және x-тің мәні -4 пен 4 аралығында өзгеретіндей, ал пайдаланылатын нүктелерінің саны 25 болатын жағдайда қарастыруға болады.

Кей жағдайларда екі дифференциалдық теңдеуден тұратын жүйені фазалық портреттер арқылы бейнелеуге болады, сонымен қатар $y(x)$ пен $z(x)$ нәтижелерінің мәндерін график осьтерінде көрсетуге болады.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі Лотка - Вольтерр моделінің шешімін табу мысалын қарастырайық.

Популяция динамикасының бір моделі Лотка - Вольтерр моделі деген атпен белгілі және ол биологиялық популяция ортасында жыртқыш құрбан өзгерісі жүйесін бейнелейді. Бұл модель құрбандар мен жыртқыштар санының периодтық тербелмелі өзгерісін бейнелеуге мүмкіндік береді.

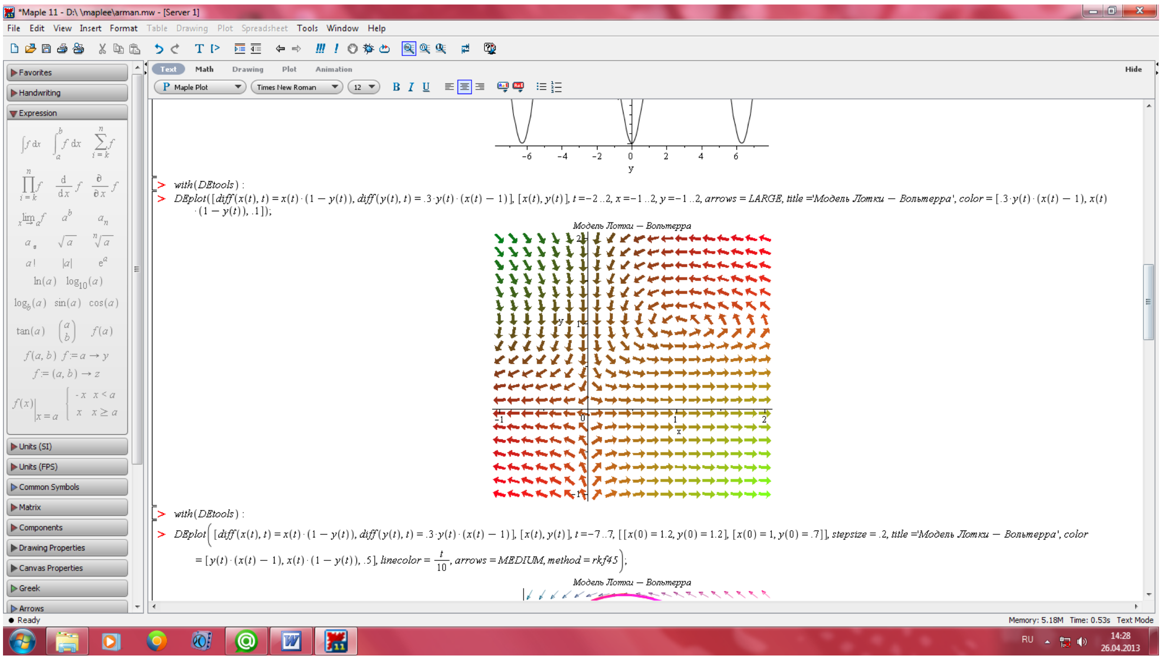
Лотка - Вольтердің мынадай түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі берілсін.

$x'(t) = x(t)(1 - y(t))$

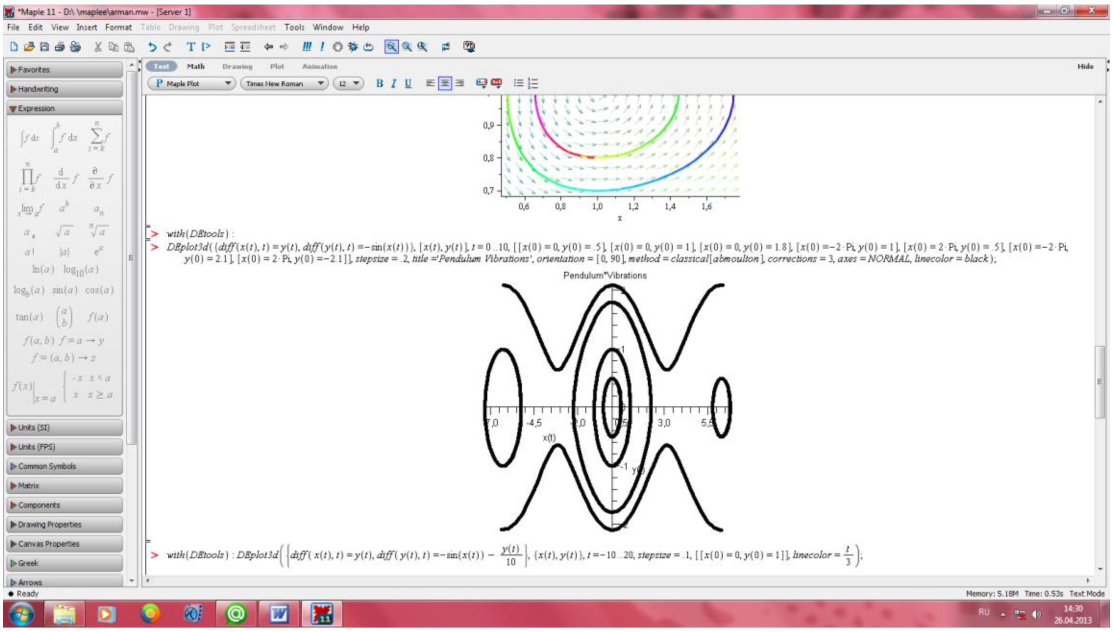
$y'(t) = 0{,}3\, y(t))\, (x(t) - 1).$

Бұл жүйенің шешімі векторлық өріс ретінде көрсетіліп, ондағы стрелкалар шешім болатын қисық сызықтарға жанама ретінде (қисықтардың өздері графикте көрсетілмеген) бейнеленген.

Векторлық өрістің функционалдық бояуы арқылы шешімді өте көрнекі түрде бейнелеуге болатынын мынадай графиктен байқауға болады.

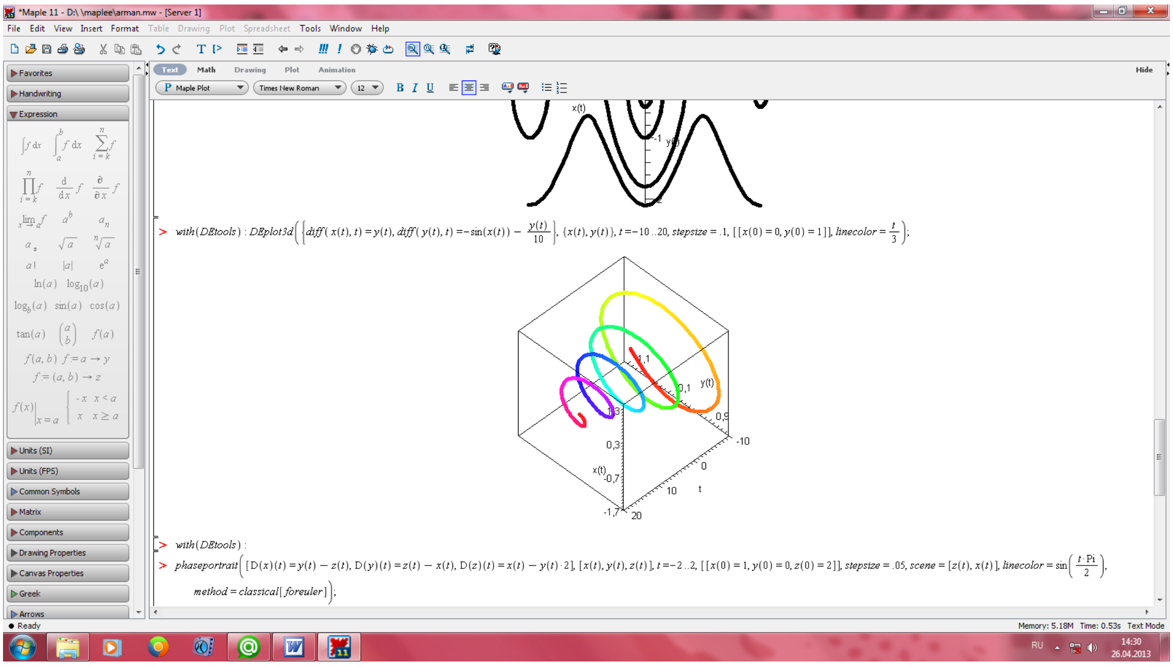


Ал енді мына мысалда екі теңдеуден тұратын дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімін көлемдік фазалық портрет түрінде бейнелеу нұсқасы келтірілген. Бұл жағдайда үш өлшемді координаталар жүйесі мен сәйкес параметрлік тәуелділіктері x(t), y(t), z(t) графиктерін салу қарастырылған. Мұндағы фазалық портрет кеңістікте көлемді спиральдық жазу түріне ұқсас түрде бейнеленген. Функционалдық бояуының көрсетілімі функцияның өте көрнекі түрде болуын қамтамасыз етуде.



Графиктік функция **dfielplot** дифференциалдық теңдеулер нәтижесін векторлар көмегімен өріс ретінде көрсету үшін пайдаланылады. Бұл функция Deplot функциясының бөлігі болғанымен, тек қажетті жағдайларда ғана пайдаланылады. Бірақ оны бөлек те пайдалана болатынын мынадай дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу мысалынан-ақ көруге болады:

x‘(t) = x(t) (1-y(t))
y‘(t) = 0,3 y(t)(x(t) - 1)



Жалпы алғанда дифференциалдық теңдеулерді визуальдық түрде көрсетудің мүмкіндіктері өте көп. Қарастырылған мысалдар солардың тек кейбір бөліктері ғана болып есептеледі.

Әдебиеттер:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 3 тома. -М.: Изд. «Лань», 2005.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1994.
3. Дьяконов В.П. Maple 9 в математике, физике и образовании. - Москва: СОЛОН-Пресс, 2004.
4. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – Москва, 2011.

Түйіндеме

Maple жүйесі процедуралық бағдарламалаудың типтік жабдықтарымен қамтылғанымен, бұл жүйе тіл ретінде математикалық есептерді шешуге бағытталған. Сондықтан Maple жүйесі жоғары деңгейлік проблемалық бағытталған бағдарламалау классына жатады. Әсіресе Maple жүйесін пайдалану математика мен физика пәндерін оқытуда аса тиімді болып есептеледі. Символдық математиканың кеңейтілген мүмкіндіктері математикалық сандық модельдеу мен есептеулердің графикалық визуалды бейнелеулерімен керемет ұштастырылған. Дифференциалдық теңдеулер түрлі жүйелер мен жабдықтарды математикалық модельдеудің негізін құрайды. Сондықтан бұл мақалада Maple жүйесінің графикалық мүмкіндіктерін дифференциалдық теңдеулерді шешуде пайдалану жайы қарастырылған.

Кілт сөздер: Maple жүйесі, математикалық сандық модельдеу, есептеулердің графикалық визуалды бейнелеулері, дифференциалдық теңдеулерді шешу.

Резюме

Несмотря на то, что система Maple содержит типовые средства процедурного программирования, однако как язык она ориентирована на решение математических задач. Поэтому система Maple относится к классу проблемно-ориентированных языков программирования сверхвысокого уровня. Особено эффективно использование системы Maple при обучении математике и физике. Обширные возможности символьной математики объединяются в ней с прекрасными средствами математического численного моделирования и просто потрясающими возможностями графической визуализации вычислений. Дифференциальные уравнения лежат в основе математического моделирования различных систем

и устройств. Поэтому в статье рассмотрено использование графических возможностей системы Maple при решении дифференциальных уравнений

Ключевые слова: система Maple, математическое численное моделирование, возможности графической визуализации вычислений, решение дифференциальных уравнений.

Summary

Although the Maple system contains typical means of procedural programming, but the language is aimed to solving mathematical problems. Therefore, the Maple system belongs to a class of problem-oriented programming languages of very high level. Particulary it is effective to use Maple for teaching mathematics and physics. Extensive opportunities of symbolic mathematics are combined with excellent means of mathematical modeling and numerical possibilities of graphical visualization of calculations. Differential equations are on the basis of mathematical modeling of various systems and devices. Therefore, this article deals with the use of Maple graphics capabilities in solving differential equations.

Key words: The Maple system, mathematical and numerical modeling, possibilities of graphical visualization of calculations, solvig of differential equations.

ӘОЖ 37.011-31-051:51:16:37.025

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҰҒЫМДАРДЫ ҚАЛЫПТАСТЫРУ НЕГІЗІНДЕ ОҚУШЫЛАРДЫҢ ЛОГИКАЛЫҚ ОЙЛАУ ҚАБІЛЕТІН ДАМЫТУ

В.Е.СЕРІКБАЕВА, педагогика ғылымдарының кандидаты, профессор,
К.Ж.АЛМАЕВ, магистрант
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Білім берудегі орта білім беру деңгейі үздіксіз білім беру жүйесінің базалық буыны екені және осы деңгейдің жастарға саналы тәрбие, сапалы білім беріп елжанды азамат етіп қалыптастыруда атқарар ролі зор екені анық.

Математика пәнін орта мектепте оқытудың негізгі мақсаттарының бірі – оқушылардың логикалық ойлау қабілетін дамыту.

Оқу процесіндегі басты мақсат – оқушыға дайын білімдерді беру ғана емес, оларды дербес ойлауға үйрету. Ал бұл мақсат барлық таным процесін ақиқатты іздеп табуға бағыттай білгенде ғана жүзеге асып, оқушыларды логикалық ойлау әдісі арқылы сол ақиқатты дәлелдеу процесімен таныстыруға міндеттейді.

Математикалық теорияларды дәлелдеу тек дедуктивтік негізде жүргізіледі, яғни дәлелденетін ой (тұжырымдама, пайым) бұрын дәлелденген немесе дәлелдеусіз қабылданған сөйлемдерге сүйенеді. Математикада тәжірибе нәтижесі, мысалдар, т.б. дәлелдеудің негізі бола алмайды.

Математикалық дәлелдеу – бастапқы аксиома, анықтама, бұрын дәлелденген теорема және дәлелденетін теореманың шарттарынан қорытындыға келетін логикалық салдарлар тізбегі болып табылады.

Математикалық обьектілер жөніндегі пайымды (немесе пікірді) өрнектейтін логикалық сөйлем математикалық сөйлем деп аталады. Сөйлемнің субьекті және обьекті, сәйкесінше математикалық сөйлемнің шарты (негізі, сілтемесі (тиянағы)) және қорытындысы (салдары, нәтижесі) дәлелденеді.

Математикалық сөйлемдерге теорема, аксиома, анықтама, формулалар, теңдеулер мен теңсіздіктер және есептер, т. б. жатады.

Ақиқаттығы дәлелдеусіз ақиқат деп қабылданған математикалық сөйлем – аксиома. Аксиома гректің «axioma» – «бедел», «құрмет» деген сөзінен шыққан.

Аксиомалар мен алғашқы (анықталмайтын) ұғымдар математикалық теорияның негізгі іргетасын қалайды. Кез келген ұғымды немесе ұғымдар арасындағы қатысты қанағаттандыратын талаптарды баяндайтын сөйлемді постулат дейміз. Постулат латынның «postulatum» – «талап», «ұсыныс» деген сөзінен шыққан.

Анықтама деп ұғымның қажетті және жеткілікті белгі-шарттарын көрсететін сөздік немесе символдық сөйлемді айтады.

Математикалық сөйлемнің ең маңызды түрлерінің бірі – теорема.

Теорема ұғымын қатаң түрде анықтау тек формальды теорияларда кездеседі. Формальды емес теорияларда (оның ішінде мектеп математика курсында) теорема ұғымына түсініктеме ғана беріледі: қисынды пайымдаулар арқылы дұрыс немесе бұрыстығы дәлелдеу нәтижесінде белгілі болатын пайым (сөйлем) теорема делінеді. Теорема грек сөзі, оның қазақша мағынасы «көз жеткіземін», «ойлап көремін».

Мектеп бітіруші оқушылардың математикалық сөйлемдердің мазмұнын жете түсінбейтіндігі, әдетте жаттығушылықпен шұғылданатындығы байқалады. Ұғымдардың анықтамасындағы келтірілген елеулі белгілерін көрсете алмаушылықты, теореманың шарты мен қорытындысын ажырата білмеушілікті, кері теореманың барлық жағдайда дұрыс бола бермейтіндігін түсінбеушілік студенттердің арасында да кездеседі. Оған қоса орта мектепті бітірушілердің ішінде теореманың түрлері туралы тіпті түсінік алмай шығатындары да кездесіп отырады; айтылған пікірді дәлелдеудің қажеттілігін түсінбеушілік, соның салдарынан теореманың дәлелдеуін жаттаушылыққа әдеттену болып табылады. Соңғы кезде қалыптасқан тестілік жүйе де бұған (мұғалімдердің түсінбеушілігінен), кері әсерін тигізуде. Себебі тестілік сұрақтарға бейімдеп, теореманы дәлелдеудің орнына, есеп шығартуды жөн көреді. Ал бұл кемшіліктердің барлығы математиканы сапалы түрде түсіне білуге кері әсерін тигізеді.

Оқушылардың математикалық білімдерді саналы игеруін қамтамасыз ету, олардың логикалық ойлауын жетілдіру, мысалы, математикалық ұғымдарға дәл анықтама беруге үйрету арқылы іске асырылады. Математика курсында ұғымдарды қалыптастыру барысында олардың көлемін кеңейтіп, мазмұнын тереңдетіп, құрылымын дәлдеп анықтап қиыстыруды қамтамасыз ету керек.

Математикалық ұғымдарды қалыптастыру оқушылардың белсенді іс - әрекетінсіз мүмкін емес. Математикалық ұғымдарды игеру таным процесінің жалпы және нақтылы іс-әрекеттері арқылы жүзеге асырылады. Оларға жалпылау, нақтылау, анализ, синтез, салыстыру, аналогия, жіктеу және бір жүйеге келтіру іс-әрекеттері жатады.

Өкінішке орай, оқушылар ауызша жауап беру барысында немесе жұмысты жазбаша орындау кездерінде әртүрлі математикалық қателіктер жібереді. Мәселен теориялық қателіктер. Мұндай қателер көбінесе оқушылардың математикалық ұғымдарды дұрыс түсінбеуінен, сол сияқты математикалық ауызекі сөздерінде тіл білімінің ережелерін қолданбауынан туады. Мысалы:

1. Оқушылар түзу мен кесіндіні шатыстырады. «Кесіндінің сан мәні» деу орнына «түзудің сан мәні» деп оқитын кездері болады.

2. Теңдеу мен тепе-теңдікті шатыстырады.

3. Кейде «тең бұрыштарға қарсы тең қабырғалар жатады» дейді. Мұнда «тең үшбұрыштарда» деген сөзді қалдырып кететіндіктен математикалық сөйлем қате болып тұр.

4. «Тең көлбеулердің проекциялары да тең болады» дейді. Мұнда да дұрыс математикалық логика жоқ. Себебі сөйлем дұрыс құрылмаған. Дұрысында бір нүктеден берілген түзуге жүргізілген тең көлбеулердің проекциялары ғана өзара тең болады.

Оқушыларға сапалы білім беру мақсатында қазіргі күннің математика мұғалімі оларды оқыту барысында математикалық материалды тек абстрактілі тұрғыдан баяндап қоймауы тиіс және ол оқушылардан айқындалған амалдарды, түрлендірулерді орындаудағы, теңдеулер мен теңсіздіктерді шешудегі білімдерін, біліктерін және дағдыларын қалыптастырумен де шектелмеуі қажет. Мұғалім оқушыларға олардың білімдерінің сабақтас оқу пәндеріндегі, практикадағы қолданбалылығын әрдайым көрсетіп отыруы керек. Себебі математикалық ұғымдар, аксиомалар мен анықтамалар және қорытындылар (теоремалар және салдарлар) нақтылы өмірде бар болатын әртүрлі заттардың, онда болып жатқан құбылыстар мен өтіп жатқан процестердің өздеріне тән жалпы қасиеттерінің біздің санамызда бейнеленуі болып табылады. Академик А.Н.Колмогоров: «Математик әрқашан реалды құбылыстардың әртүрлі модельдерімен жұмыс жасайды. Оны, математик ретінде, қабылданған модель аясында қорытындылар орынды ма деген сұрақ ғана ойландырады. Егер де ол реалдылық пен оның математикалық моделінің арасындағы диалектикалық байланысты түсіндіру міндетінен бас тартса, бұл әсте жақсы емес» - деп көрсеткен болатын [2].

Стереометрия курсын бастағанда жазықтық аксиомасына есептер:

1. A, B, C, D төрт нүкте берілген. Бұл нүктелердің өзара орналасуы қандай? Бұл нүктелер қанша жазықтықты анықтайды?

2. Фотоаппарат пен геодезиялық құралдардың тірек аяқтары неге үшеу? Төрт аяғы бар столдар неге әрдайым орнықты емес?

3. Кітап немесе қатты картонның бөлігін алыңыздар. Оларды екі калам ұшына қозғамайтындай етіп қоюға бола ма? Бұл үшін кем дегенде қанша калам керек?

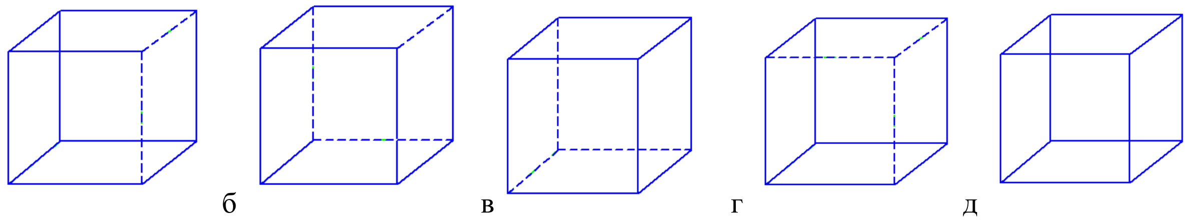
Геометриялық фигураларды салуға қатысты келесі нақты мысалдарды келтіруге болады:

1. Көз алдыңызға кубты елестетіңіздер. Қай жақтары көрінбейді? Қай қырлары көрінбейді?

2. Үшбұрышты пирамиданы елестетіңіздер. Қандай жақтары көрінбейді? Қай қырлары көрінбейді?

3. а) кубтың тек бір жағы; б) кубтың тек екі жағы; в) кубтың тек үш жағы көрінетіндей кубты қалай орналастырамыз? Әр жағдайда кубты қалай орналастырғандарыңызды айтып беріңіздер.

4. Төмендегі суреттердің қайсысында куб дұрыс бейнеленген?



а б в г д

5. Барлық қырлары көрінетіндей пирамиданы орналастыра аламыз ба?

6. Үшбұрышты пирамиданың кем дегенде қанша қыры көрінеді?

Геометрия курсының негізгі үш ұғымын – нүкте, түзу, жазықтықты оқығанда «синтез» және «анализ» ойлау әдістерін қалыптастыратын сұрақтар жүйесін келтіру керек.. Бұл кезде есептеп, салып, өлшеп жатудың қажеті жоқ, тек көру, елестету, болжау, ойлау, сезіну керек. Бұлардың бәрі ойлаудың негізі - синтез және анализбен байланысты.

Математикадан сапалы білім беру үшін оқыту процесінде жаңа педагокалық (инновациялық) технологияларды қолдануды жетілдіру, көрнекті оқу құралдары мен оқытудың техникалық құралдарын жасау мен зерттеу және оқу процесін тиімді ұйымдастыруға ықпал ететін құрал – жабдықтарын қолдану міндеті қойылады.

Білім беруді жалпы компьютерлендіру мен информатикаландыру бірынғай түсінікті құрылғылар мен мүмкіндігінше жақындастырылған пәндік байланыстар негізінде іске асырылуы қажет.

Алматыдағы Ұлттық ақпараттандыру орталығында 2012 жылы ұлттық электрондық оқыту (e-learning) жүйесі, сонымен қатар, мектепте және техникалық-кәсіптік білім беру мекемелерінде өтетін пәндерді мазмұнды цифрлық білім беру ресурстарымен толық қамтамасыз ету мәселелері талқыланды.

2011 жылдан бастап, Қазақстан Республикасында білімді дамытудың 2011-2020 жылдарға арналған Мемлекеттік бағдарламасы іске асырылып жатыр. Соның ішінде, білім берудегі инновация болып саналатын электронды оқыту жүйесіне бағдарламада айырықша мән берілген.

Цифрлық білім беру ресурстары (ЦБР) – электрондық оқыту жүйесінің негізгі бір құрамды бөлігі. Олар, әр оқылатын пәндердің әр тақырыбындағы жаңа материалдарды мультимедиялық көріністермен түсіндіріп, интер-белсенді тапсырмалар мен тестер арқылы бекітеді. ЦБР пайдалану оқушының әр тақырыпты есте сақтап, оны терең түсінуіне мүмкіндік береді.

Әдебиеттер:

1. Қазақстан Республикасындағы білім беруді дамытудың 2011-2020 жылдарға арналған Мемлекеттік бағдарламасы // Қазақстан мұғалімі. – 2010. - 26 қазан.

2. Колмогоров А.Н. Современная математика и математика в современной школе // Математика в школе. – 1971. – №6. – С.2-3.

3. Серікбаева В.Е. Математиканың пәнаралық байланыстары: Оқу-әдістемелік құрал. – Алматы: Экономика, 2007. – 199 б.

Түйіндеме

Оқушылардың логикалық ойлау қабілетін математикалық ұғымдарды қалыптастыру әдістемесі қарастырылады. Математиканы оқыту барысында, сабақтас пәндерден және нақтылы өмірден оқушыларға түсінікті түрде келтірілген фактілер ғылыми білімдердің пайда болу негізін, қоршаған орта мен табиғат құбылыстарының танымалы екендігін көрсетуге мүмкіндік береді. Осы жағдайда ғана оқушылар оқытылатын жеке пәннің – математиканың ұғымдары мен абстрактілі жағдайларын оңай сезіне біледі, түсіне алады.

Кілт сөздер: таным процесі, логикалық ойлау, математикалық сөйлем, математикалық дәлелдеу.

Резюме

Рассматривается формирование математических понятий для развития логического мышления учащихся. При обучении математике приведенные в доступной форме факты из курсов смежных дисциплин и из реальной жизни создают возможность для формирования основ научных знаний, познаваемости явлений окружающей среды и природы. Только в этом случае обучающиеся смогут легко уяснить понятия математики и её абстрактные положения.

Ключевые слова: процесс познания, логическое мышление, математическое предложение, математическое доказательство.

Summary

The article deals with the formation of mathematical notions for the development of logical thinking of the pupils. While teaching mathematics the facts from the courses of the related subjects and from the real life which are given in the simple form, enable to demonstrate the principles of appearing the scientific knowledge, the cognity of phenomena of the environment and nature. Only in this case the learners can understand the notions of mathematics and its abstract situations easily.

Key words: Process of learning, logical thinking, mathematical sentence, mathematical proof.

ӘОЖ 378.851

ВЕКТОРЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТІҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНЫСТАРЫ

Б.ТҰРБАЕВ, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент,
М.БЕГАЙДАРОВ, Н.САЛҚЫНБАЕВА – магистранттар
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Векторлар геометрияда, алгебраның кейбір есептерін шешуде: теңдеу шешу, теңдеулер жүйесін шешу, теңсіздіктерді дәлелдеу, функцияның экстремумдарын іздеу, сонымен қатар геометриялық теңсіздіктерді дәлелдеуде қолданылуы мүмкін.

Жұмыста бұл тәсілмен шешудің дәстүрлі тәсілдерге қарағанда тиімді және шешу ұзақтығының қысқа болатынын көрсетеміз.

Ол үшін біз Коши-Буняковский теңсіздігі және оның салдарын қолданамыз. Ол былайша

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

өрнектеледі.

Төмендегі қарастыратын есептерде мына түрдегі Коши-Буняковский теңсіздігін

$$|\vec{v} \cdot \vec{u}| \le |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \qquad (1)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \le |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \qquad (2)$$

қолданатын боламыз. Мұнда: а) егер $\vec{v}$ және $\vec{u}$ векторлары коллинеарлы болса (1) теңсіздік; б) егер $\vec{v}$ және $\vec{u}$ векторлары қарама-қарсы бағытталған болса (2) теңсіздік тепе-теңдікке айналады.

$n = 3$ үшін Коши-Буняковский теңсіздігі мынадай түрде болады:

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \qquad (3)$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \qquad (4)$$

Бұл теңсіздікті оңай дәлелдеуге болады.

$\vec{v} = (x_1; x_2; x_3)$ және $\vec{u} = (y_1; y_2; y_3)$ екі векторды қарастырайық. (3) теңсіздіктің сол жағында $\vec{v}$ және $\vec{u}$ векторларының скаляр көбейтіндісінің абсолют шамасы, ал оң жағында $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ ұзындықтарының көбейтіндісі жазылған.

Векторлардың скаляр көбейтіндісі деп осы векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісін айтамыз; осы анықтамадан $|\cos(v,u)| \le 1$ екенін ескеріп, (1) теңсіздігін аламыз.

(1) және (2) теңсіздіктері теңдікке айналған жағдайда $\vec{v} = \lambda\vec{u},\ \lambda \ne 0$ теңдігі орындалады және ол сәйкесінше

$$\begin{cases} x_1 = \lambda y_1 \\ x_2 = \lambda y_2 \\ x_3 = \lambda y_3 \end{cases}$$

болады.

Коши-Буняковский векторлық теңсіздігін қолдану есепті тез шешуге жағдай жасайды және ол арқылы шешудің жаңа әдістерін табамыз.

Енді қарастырып отырған әдісті есептер шешуде қолдануға мысалдар келтірейік.

Теңдеу шешу

1-мысал. Теңдеуді шеш:

$$\sqrt{a^4 + b^2} = \frac{3a^2 + 4b - 2}{5}$$

Шешуі: теңдеуді мына түрде жазамыз: $5\sqrt{a^4 + b^2} = 3a^2 + 4b - 2$

$\vec{v} = (3;4)$ және $\vec{u} = (a^2; b)$ векторларын қарастырамыз. Олардың скаляр көбейтіндісі мынаған тең: $\vec{v}\vec{u} = 3a^2 + 4b$.(2)-ші $\vec{v} \cdot \vec{u} \le |\vec{v}| \cdot |\vec{u}|$ шарты бойынша

$$5\sqrt{a^4 + b^2} \ge 3a^2 + 4b > 3a^2 + 4b - 2$$

Бұл теңдеудің шартын қанағаттандырмайды. Демек теңдеудің шешімі жоқ.

Теңдеулер жүйесін шешу

2-мысал. Теңдеулер жүйесін шеш:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Шешуі: Бір қарағанда берілген жүйенің шексіз көп шешімі бар секілді көрінеді (үш айнымалы екі теңдеу). Алайда мұндай ой қате болып табылады.

$\vec{u}(x, y, z)$ және $\vec{e}(1,1,1)$ векторларын қарастырайық. Сонда

$\vec{u} \cdot \vec{e} = x + y + y = 1$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ және $|\vec{e}| = \sqrt{3}$ болғанда $|\vec{u}| \cdot |\vec{e}| = 1$ болады.

(3) және (4) теңдіктерді ескере отырып

$\vec{u} \cdot \vec{e} = |\vec{u}| \cdot |\vec{e}|$

аламыз. Демек, (3) $x = y = z$ негізінде, сонымен қатар (1) теңсіздікті ескере отырып $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ аламыз.

Жауабы: $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

3-мысал. Теңдеулер жүйесін шеш:

$$\begin{cases} 4x^4 + 64y^2 + 16z^6 = \dfrac{21}{64} \\ x^2 + y + z^3 = \dfrac{24}{64} \end{cases}$$

Шешуі: $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{4}\right)$ және $\vec{u} = \left(2x^2; 8y; 4z^3\right)$

Енді $\vec{u}$ және $\vec{v}$ векторлары үшін Коши-Буняковский теңсіздігін қолданамыз:

$$\vec{v}\vec{u} = x^2 + y + z^3 \le |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| = \sqrt{4x^4 + 64y^2 + 16z^6} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{8}}$$

$$x^2 + y + z^3 \le \sqrt{\frac{21}{64}} \cdot \sqrt{\frac{21}{64}} = \frac{21}{64} < \frac{24}{64}$$

Демек, жүйенің шешімі жоқ.

4-мысал. Теңдеулер жүйесін шеш:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2^{1999} \\ xz + xy + zy = 2^{2000} \end{cases}$$

Шешуі: $|\vec{v}| = (y; z; x)$ және $|\vec{u}| = (x; y; z)$. (2)-ші $\vec{v} \cdot \vec{u} \le |\vec{v}| \cdot |\vec{u}|$ шарты бойынша $xz + xy + zy \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$. Яғни $2^{2000} \le 2^{1999}$.

Демек, жүйенің шешімі жоқ.

Теңсіздікті дәлелдеу

5-мысал. Оң нақты a, b, c сандары үшін $abc = 1$, мына теңсіздіктің дұрыстығын дәлелде:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$$

(Бұл есеп математикадан 1995 жылы өткен халықаралық олимпиада сұрағында келтірілген).

Шешуі: Мәндер берейік: $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$. Әрі қарай, $xyz = 1$ екенін ескеріп,

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$$

$$\vec{U} = \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{x+z}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right) \text{ және } \vec{V} = \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{x+z}, \sqrt{x+y}\right)$$

тең болатындай $\vec{U}$ және $\vec{V}$ векторларын алайық. Векторлық теңсіздікті қолдана отырып

$$(x+y+z)^2 \le \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \cdot 2(x+y+z)$$

теңсіздігін аламыз. Бұл мына теңсіздікке

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x+y+z}{2}$$

эквивалентті. $A \ge G$ арифметикалық және геометриялық орталардың теңсіздігін пайдаланып,

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{3}{2} \ge \sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{2}$$

Демек, x, y және z сандары өзара тең, яғни $a=b=c=1$ болған жағдайда ғана теңсіздік белгісі теңдікке айналады.

6-мысал. Теңсіздікті дәлелде:

$$abc(a+b+c)\le a^3b+b^3c+c^3a; \quad a,b,c\ge 0$$

Шешуі: $\vec{U}=\left(\frac{a}{\sqrt{c}},\frac{b}{\sqrt{a}},\frac{c}{\sqrt{b}}\right)$ және $\vec{V}=\left(\sqrt{c},\sqrt{a},\sqrt{b}\right)$ векторларына Коши-Буняковский теңсіздігін қолдана отырып

$$\left(\frac{a}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}+\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{c}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}\right)^2\le\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\right)\cdot(a+b+c)$$

аламыз.

Енді $(a+b+c)\le\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$ болатынын ескеріп, $abc(a+b+c)\le a^3b+b^3c+c^3a$ түрлендіруін аламыз. Дәлелдеу керегі де осы еді.

7-мысал. a,b және c оң нақты сандары үшін мына теңсіздіктің орындалатынын дәлелде:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$$

(Бұл есеп 2002 жылы Канадада өткен оқушылар олимпиадасы сұрағында келтірілген)

Шешуі. Берілген теңсіздікті түрлендіреміз:

$$a^4+b^4+c^4\ge a^2bc+b^2ac+c^2ab$$

$\vec{V}=\left(a^2,b^2,c^2\right)$ және $\vec{U}=(bc,ac,ab)$ векторларын аламыз. Коши-Буняквский теңсіздігін пайдаланып

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}\cdot\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\ge a^2bc+b^2ac+c^2ab$$

аламыз.

$$a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$$

теңсіздігінің орындалатыны белгілі. Арифметикалық және геометриялық орталардың теңсіздігін пайдаланып мына теңсіздікті аламыз:

$$\begin{cases}a^4+b^4\ge 2a^2b^2\\ a^4+c^4\ge 2a^2c^2\\ b^4+c^4\ge 2b^2c^2\end{cases}$$

Осы теңсіздіктердің көмегімен бізге қажетті теңсіздікті аламыз, яғни

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}\cdot\sqrt{a^4+b^4+c^4}\ge\sqrt{a^4+b^4+c^4}\cdot\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\ge a^2bc+b^2ac+c^2ab$$

Бұдан

$$a^4+b^4+c^4\ge a^2bc+b^2ac+c^2ab$$

Дәлелдеу керегі де осы еді.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтау

8-мысал. $a,b>0$ үшін $f(x)=a\sin x+b\cos x$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін анықта.

Шешуі: $\vec{U}=(a,b)$ және $\vec{V}=(\sin x;\cos x)$ векторларын қарастырамыз. Векторларға Коши-Буняковский теңсіздігін қолданып,

$$|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}$$

теңсіздігін аламыз. Демек

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le f(x)\le\sqrt{a^2+b^2}$$

9-мысал. Функцияның ең үлкен мәнін анықта: $F(x)=12x+5\sqrt{4-x^2}$

Шешуі: $\vec{U}=\left(x,\sqrt{4-x^2}\right)$ және $\vec{V}=(12;5)$ векторларын қарастырамыз.Векторларға Коши-Буняковский теңсіздігін қолданып, $\left|\vec{U}\right|=2;\ \left|\vec{V}\right|=13$ мәндерін табамыз. Бұл векторлар қарама-қарсы бағытталған

$$\frac{x}{13}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

болуы мүмкін. Бұдан

$$169\cdot 4-169x^2=4x^2$$

$$x=\frac{26\sqrt{173}}{173}$$

Сондықтан $x=\dfrac{26\sqrt{173}}{173}$ болған жағдайда $\vec{U}$ және $\vec{V}$ векторлары қарама-қарсы бағытталған болады, бұдан $f(x)\le 26$ екені шығады.

Ең үлкен және ең кіші мәндерді анықтауға берілген есептерді шешуде туынды әдісін жиі қолданады. Алайда, бұл жоба арқылы біз есепті туынды әдісін қолданбай шешу жолын көрсеттік.

Геометриялық теңсіздіктерді дәлелдеу

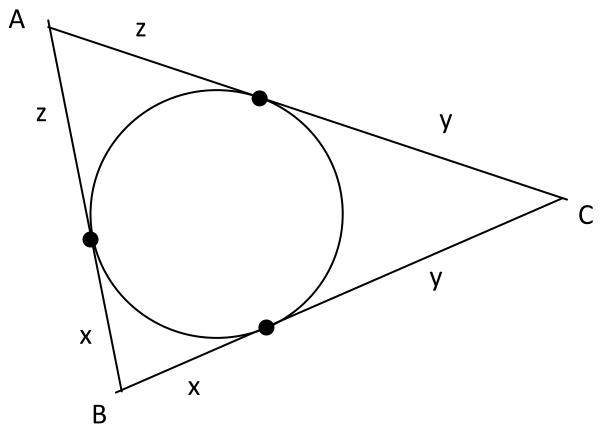
Коши-Буняковский теңсіздігі көмегімен шешілетін геометриялық теңсіздіктерді дәлелдеуге берілген есептерге бірнеше мысалдар қарастырайық.

10-мысал. Қабырғалары *a,b,c* болатын кез келген үшбұрыш үшін мына теңсіздіктің орындалатындығын дәлелде:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

(Бұл есеп 1983 жылы математикадан өткен оқушылардың халықаралық олимпиада сұрағында кездеседі).

Шешуі: Геометриялық теңсіздіктерді дәлелдеу үшін үшбұрыштар теңсіздігін қолданған дұрыс. Біздің жағдайымызда ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңберді аламыз. Шеңбер үшбұрыштың қабырғаларымен *x,y,z* оң сандары үшін $a=x+y;b=y+z;c=x+z$ түрінде жанасады.



Осы мәндерді бастапқы теңсіздікке қойып, бірнеше түрлендірулерден кейін мынаны аламыз:

$$x^3z+y^3x+z^3y\ge x^2yz+y^2xz+z^2xy$$

x,y,z-терді теңсіздіктің бір жағына шығарамыз:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$$

Енді $\vec{V}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}},\dfrac{y}{\sqrt{z}},\dfrac{z}{\sqrt{x}}\right)$ және $\vec{U}=\left(\sqrt{y},\sqrt{z},\sqrt{x}\right)$ векторларын аламыз.

$\vec{V}, \vec{U}$ векторларына Коши-Буняковский теңсіздігін қолдана отырып,

$$\left[\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x}}\right)^2\right]\cdot\left[\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}\right]\geq\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt{z}}\sqrt{z}+\frac{z}{\sqrt{x}}\sqrt{x}\right)^2 \longrightarrow$$

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)(x+y+z)\geq(x+y+z)^2$$

Демек, $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$

Теңсіздік дәлелденді.

Аталған мысалдар арқылы біз геометрияның және векторлық математиканың күрделі есептерін жеңіл, аз уақыт жұмсап есептейтін жолын, яғни Коши-Буняковский әдісімен шешуді көрсеттік.

Әдебиеттер:

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства - Москва: Мир, 1965.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры - Москва: Наука, 1975.
3. Журнал Математика в школе. - 1991. - №2.
4. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10-11кл. Методические рекомендации к элективному курсу. – М., 2007. - 160с.

Түйіндеме

Мақала қиындығы жоғары теңдеулер мен теңсіздіктер және геометрияның кейбір есептерін Коши-Буняковский теңсіздігі арқылы шешуге арналған. Векторлық математиканы пайдаланып, эстремумдарды жеңіл табуға, теңсіздіктерді дәлелдеуге болады, сонымен бірге күрделенген геометриялық есептердің шешімін таба аламыз.

Кілт сөздер: векторлық математика, теңсіздік, теңдеу, Коши-Буняковский теңсіздігі, теңсіздікті дәлелдеу.

Резюме

Работа посвящена упрощению решения задач повышенной сложности, связанных с неравенствами, и некоторых геометрических задач с помощью неравенства Коши-Буняковского. Применяя векторную математику можно наилегчайшим путем находить экстремум, доказывать неравенства, находить решения в усложненных геометрических задачах.

Ключевые слова: векторная математика, неравенства, уравнение, неравенство Коши-Буняковского, доказательство неравенств.

Summary

The work is dedicated to simplifying solving of increased complexity associated with inequalities and some geometric problems to using the Cauchy-Schwarz inequality. Using the vector math we can find the lightest by ekstrimum, to prove the inequality, to find the solution to the complicated geometric problems.

Key words: vector math, inequality equation, the Cauchy-Schwarz inequality, the proof of inequalities.

ӘОЖ 371.32:681.518

БЕЙІНДІ МЕКТЕП ОҚУШЫЛАРЫНЫҢ АҚПАРАТТЫҚ ДҮНИЕТАНЫМЫН ИНФОРМАТИКА ПӘНІ АРҚЫЛЫ ҚАЛЫПТАСТЫРУ КЕЗЕҢДЕРІ

С.Ш.ТІЛЕУБАЙ, педагогика ғылымдарының кандидаты**,**
Р.У.ОМИРБЕКОВ, магистрант
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

«Информатика» жалпы білім беру жүйесіндегі негізгі пәндердің бірі болып табылады. Қазіргі кезде информатика пәнін оқытудың мақсаты – жеке тұлғаны тәрбиелей отырып, оның дүниетанымын қалыптастыру. Қазақстан Республикасы дүниежүзінің елдері сияқты білім беру жүйесін ақпараттандырудың нақты жолына түсіп, ақпараттық білім беру кеңістігін жасауда. Әрбір білім орны өз жұмысында басшылыққа алып отырып оқу-тәрбие үдерісін ақпараттандырудың бағдарламасын жасаған жөн. Ол бағдарламаның негізгі мақсаты – ақпараттық ойлау мен ақпараттық дүниетанымды қалыптастыру және компьютерді пайдаланудағы психологиялық кедергіні жоюы тиіс. Қазіргі таңда біздің еліміздің ғалымдары алдында білім беру сапасын жоғарылату, яғни даму жолын қайтадан қарастыру міндеті тұр. Сонымен қоса, егеменді Қазақстанның дүниежүзілік білім беру кеңістігіне ену үрдісінде оқу-тәрбие үрдісін ізгілендіру бағытына байланысты мұғалімдердің кәсіби дайындығына деген талап арта түсуде. Мұның барлығы оқыту мақсатын оқушылардың мүмкіндіктері мен тілектеріне және қоғамның әлеуметтік, саяси-экономикалық сұранысын қанағаттандыруға сәйкестендіруден шығып отыр.

Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандартында ҚР жалпы орта білім берудің мақсаты – бейіндік оқытуды іске асыру, білім алушылардың саналы түрде кәсіптік, азаматтық, тұлғалық өзін-өзі анықтауына мүмкіндік беретін түйінді құзыреттіліктерді игеруін қамтамасыз ету және даралық білімдік қажеттіліктерін қанағаттандыру болып табылады.

Бейіндік оқыту дегеніміз -кәсіптік білім беру бағдарламаларын игеруге дайындау, олардың кәсіптік бағдарлары үшін жағдай жасау, оқушылардың арнаулы бейімділігі мен қызығушылығын, танымдық қабілетін ескеруге бағытталған білім беру процесінің құрылымы мен мазмұнын ұйымдастыру түрі, жоғары сыныптағылардың оқуын даралау мен саралап жіктеудің педагогикалық жүйесі.

Бейіндік оқытуды ұйымдастырудың басты мақсаты болып 12 жылдық мектептерге оқушылардың кәсіби өзін-өзі анықтауға арналған құзіреттілігін қалыптастыру және іс жүзінде кәсіби қызметінің бағытын саналы түрде жетілдіруге қажетті ресурстармен қамтамасыз ету саналады.

Бейіндік оқытуды ұйымдастырудың басқарушы ережелері Қазақстан Республикасының Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты жалпы орта білім берудің жаратылыстану-математикалық, қоғамдық-гуманитарлық, технологиялық бейіндік оқыту бағыттарын анықтау, ұйымдастырылатын бейіндік оқыту моделі оқу орнының білім беру процесін ұйымдастырудағы мүмкіндіктеріне сәйкестендіріліп, оқытуды саралап жіктеумен қамтамасыз етуде сыртқы серіктестіктерді қатыстыру мен аймақтың күш-қуатын ескеру, бейіндік оқытуды іске асыру оқытудың тиімді технологияларын енгізу ұстанымдарын басшылыққа алады.

Бейіндік оқыту жаратылыстану-математикалық, қоғамдық-гуманитарлық, технологиялық деген үш бағытта жүзеге асырылады. Жаратылыстану-математикалық бейіндік бағыты бойынша химия, биология, география, физика, информатика пәндері оқытылады. Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы оқушылар әдебиет, әлемдік көркем мәдениет, қоғамтану, мемлекет және құқық негіздері, ал технологиялық бағыты мына пәндер құрамымен қамтамасыз етіледі: химия, биология, физика, технология, графика және жобалау.

11-12 сыныптарда бейіндік оқытудың мақсаты мен міндеттерін жүзеге асыру үшін мектептің жоғарғы сатысында оқыту мазмұнын таңдауға 9-10 сыныптың оқушыларын даярлау мақсатында бағытталған педагогикалық жұмысты ұйымдастыру қарастырылады.

Бейіналды даярлық жүйесі 9-10 сынып оқушыларының орта білім деңгейінде білім алу жолын өздері таңдауды немесе жалпы білім беретін оқу орнының 11-12 сыныптарында, техникалық және кәсіптік білім беру ұйымдарында қарастырылады. Сонымен бейіндік оқыту барысында оқушылардың ақпараттық дүниетанымды қалыптастыру неғұрлым күрделі әдістемелік мәселе болып табылады. Ол ең алдымен оқытудың ұйымдастыру жұмысына және жеке тұлғаның жасына сай таным мүмкіндіктерінің шектеулі болуына байланысты. Солай бола тұрса да ақпараттық технологиялар ғылыми дүниетанымды түбегейлі өзгертіп, техниканы бұрын-соңды болмаған биікке көтергендіктен, жалпы білім беру жүйесіндегі информатика курсында лайықты орнын табуға тиіс.

Компьютерлік сабақты ұйымдастыруда жетекші рөл мұғалімге беріледі. Жалпы сабақтың жемістілігі - оның компьютерлік сауаттылығы мен педагогикалық шеберлігіне тәуелді. Педагогтың ақпараттық дүниетанымын қалыптастыру мәселесі философия, психология, педагогика зерттеулеріндегі «дүниетаным» ұғымын қарастыруды талап етеді және оларда мағынасы толық ашылмаған. Дүниетаным ұғымының мәні неде, оны қалай түсіну керек, педагогикалық ерекшеліктері, дүниеге дұрыс көзқарас қалыптастырудың белгілері қандай деген сауалдар әлі күнге дейін шешімін таппаған мәселелер. Табиғат құбылысының терең тылсымына үңілуде адамзат баласы талай-талай жолдардан өтеді. Сөйтіп, әрбір адамның санасында аталған сауалдар жайында белгілі бір білім жинақталып, бірте-бірте түрлі пікірлер мен көзқарастар қалыптаса бастайды. Яғни, адамның дүниетанымы айқындалады. Дүниеге көзқарас – адам қоғамымен бірге пайда болған қоғамдық тарихи-құбылыс. Кез-келген тарихи кезеңдерде қоғам, оның түрлі кезеңдері туралы адамның өзіндік көзқарасы, түсінігі болады.

Энциклопедиялық сөздік [1] дүниетанымды «объективті әлемге және ондағы адам орнына, оларды қоршаған ортасы мен бір-бірінің қатынасына, сонымен қатар осы көзқарастармен олардың сенушілігіне, мақсатына, болмысты тану үдерістеріне деген жалпы көзқарастардың жүйесі» деп анықтаған.

Үлкен түсіндірмелі сөздік дүниетанымды «болмысқа қатынасын анықтайтын үдеріс, көзқарас пен сенімнің жиынтығы» [1, 545б.], ал Ожегов сөздігі табиғат пен қоғамға көзқарастың, орныққан пікірдің жүйесі [8] ретінде түсіндіреді.

Негізінде, дүниетанымды қалыптастыру мәселесін философия, педагогика, психология сияқты түрлі ғылымдар қарастырады.

«Дүниетаным» ұғымын ерте замандағы философтар – Платон және т.б. қарастырған. Кейінірек ол Ф.Энгельс , К.Леви-Строс , К.Г.Юнг және т.б. еңбектерінде зерттелген. Бұл ұғымды қазіргі зерттеушілер М.Г.Ашманис, А.П.Горячев, М.С.Каган, В.И.Шинкарук, К.П.Шуртакова және т.б. қарастырған.

Философ еңбектерінде дүниетаным - әлемдік қатынас, әлемдік сезіну, әлемдік қабылдау, әлемдік түсіну, әлемдік ойлану, әлемдік өзгеру секілді белгілері бойынша қарастырылып, әртүрлі ғылым төңірегінде дүниетаным ұғымы мазмұнды мағынаны білдіреді.

Әлемдік түсіну әлем туралы нақтылы білімнің жиынтығын ұсынады және дүниетаным көзқарасының негізі болып табылады. Осындай білім мен түсініктер негізінде адамның барлық әрекетіндегі дәстүрлер туындап, қалыптасты және дамыды.

Дүниетанымға сонымен қатар нақтылы мақсатын, модель мен ақиқат бейнесін білдіретін, тәжірибелік өмірде, өнерде, әдебиетте, ғылымда, дінде қалыптасатын әлемдік қабылдау да жатады.

Дүниетаным әрқашан сезімтал қарым-қатынас - әлемдік сезінумен қаныққан. Бұл әлемнің үндестігімен сезіну немесе онымен араздығы, болмыспен қанағаттанарлық немесе қанағаттанарлықсыз болуы мүмкін. Дүниетанымның маңызды бағасы оның ақиқат деңгейі болып табылады.

Әлемдік түсіну мен әлемдік ойлау, әлемдік сезіну мен әлемдік қабылдау, әлемдік қатынас пен әлемдік өзгеру үдерістері арқылы жалпы қоғамның, адамның өмірлік әрекетінің әлемге, әлеуметке және өзіне деген қатынасы қалыптасып, дүниетанымның функциясы іске асады.

Сонымен бірге әлеуметтік-психологиялық және педагогикалық ғылымдарда дүниетаным категориясының мазмұны жеке тұлғаның дүниетанымның рухани құрамын айқындайды (көзқарас пен сенім, әрекеттің мақсаты мен ұстанымы, тәрбиенің дүниетаным үдерістері мен қоғамдағы субъектілер қатынасының мағынасы). Олар таным, қатынас және әрекет тәжірибесінде ашылатын, оның шығармашылық белсенді өмірлік бағытының негізі ретінде көрінеді.

Ортақпәндік гуманитарлық-ғылымдарда дүниетаным феномені қоғам мен жеке тұлғаның рухани мәдениетінің маңызды құрамдас бөлігі ретінде қарастырылады. Ол кәсіптік білім мен еңбек жағдайында, адам әрекетінің жеке тәжірибесінде таным әрекеті мен әлеуметтік қарым-қатынас үдерістері адамдардың жалпы әрекеттерін рухани тәжірибелік меңгеруіне себепші болады.

Ұлттық дүниетаным туралы І.Ергалиев пен Ғ.Телібаев: «...Адамның дүниемен байланысы, оның тануы белгілі ұлттық жағдайда калыптасқандықтан, дүниетанымның ұлттық белгілері болады», - деп, мақал-мәтелдерді, аңыздар мен ертегілерді, жырлар мен дастандарды, термелер мен жоқтауларды ежелгі қазақ дүниетанымының түрлері екендігін көрсетті.

Философтар Ә.Нысанбаев, Д.Кішібеков, О. Сегізбаев, М. Орынбеков т.б. дүниетаным ұғымын сипаттай келе, дүниетанымды тұтас дүние туралы, ондағы адамның орны жайындағы түсініктер мен пікірлердің жиынтығы деп түсіндіреді.

Дүниетанымның басқа көзқарастардан айырмашылығы ол табиғат пен қоғам дамуының заңдылықтарын бейнелейді. Сол заңдылықтарды меңгерудің және адамдардың практикалық іс-әрекетінде қолданудың жолдарын көрсетеді. Яғни, жоғарыда айтылған пікірлерге сүйене отырып, дүниетаным – бұл адам ойындағы қоғам бейнесі ғана емес, оның сол қоғаммен қарым-қатынасы деген қорытынды жасауға болады. Дүниеге көзқарас қоршаған ортамен, қоғаммен тығыз байланыста болғандықтан, ол үнемі даму үстінде болады.

Психологиялық ғылымдарда «дүниетаным» феномені жеке тұлғаның даму бағыты түрінде қарастырылып, мұндай тұжырымдар Т.Тәжібаев, М.Мұқанов, Қ,Жарықбаев және т.б. еңбектерінен орын тапқан.

Психологтар «жеке тұлға дүниетанымының маңызды ерекшеліктері, дербес өзгешеліктері бар жеке сананың формасы» деп түсіндіреді. Қалыптасқан дүниетанымдағы табиғаттың, қоғамның жалпы заңдылықтары бейнеленген үлгілер адамның психологиялық өмірімен, оларға жеке қатынасымен біріктіріледі.

Еліміздің белгілі психологы Қ.Жарықбаев дүниетанымға адамның табиғат, қоғамдық өмір туралы білімдерінің *жүйесі* деген анықтама береді.

Психологтар дүниетанымның интеллектуалдық, тұлғалық және практикалық қырларын белгілейді. Олар бір-бірімен диалектикалық тұтастықта болады. Сонымен, зерттеу мәселесі бойынша психологиялық еңбектерді талдау нәтижесінде авторлардың дүниетаным мен жеке тұлғаның байланыстылығын мойындайтындығына көзіміз жетті.

Жеке тұлғаны қалыптастыруда және даму мәселелерін қарастыруда дүниетанымды адамның негізгі ішкі әрекетінің өнімі ретінде түсіндіруге әкеп соқтырды. Бұл психологияда жеке тұлға құрылымында дүниетанымның орны мен функциясы туралы қалыптасқан болжамдарын баса айтады. ««Дүниетаным» ұғымының барлық қиындығы мен өзгешелігі (психологиялық тұрғыдан) ол біруақытта жеке тұлғаның әртүрлі жақтарын немесе құрылымын, адамға өмірде кездесетін әртүрлі жұмыстарда білімі мен біліктілігін пайдалануына; жеке тұлға бағытына – яғни, оның қатынасына, себебіне, бағалауына, мақсатына байланысты. Осыған сәйкес өз дүниетанымын өңдеудің дайындық деңгейі жеке тұлға бағытымен, оның адамгершілік қасиеттерімен анықталады. Сонымен бірге дүниетанымның өзі де өмірлік жоспарлардың бағытын, адамгершілік қасиеттерді қалыптастырады».

Сонымен, бағыттылықтар, себептер, мақсаттар, білімдер, біліктіліктер, дағдылар және де жеке тұлғаның жан толғаныс-жігерлі қасиеттері дүниетанымды қалыптастыруға әсерін тигізеді, ал өз кезегінде дүниетанымның ерекшеліктері өмірлік жоспардың, адамгершілік қасиеттердің, білім мен дағдыны меңгеру үдерістерінің, мінез-құлық, себеп пен қажеттіліктің қалыптасуына әсерін тигізеді.

Дүниетанымның қалыптасуы ұзақ және күрделі үдеріс, оның нәтижесінде жеке көзқарастар қалыптасады. Дүниетаным процесіне әртүрлі факторлар, мәселен, әлеуметтік және микроорта мен тәрбие, жаппай ақпарат құралдары т.б. әсер етеді. Жеке адамның өмірге көзқарасының қалыптасу үдерісі дүниетаным элементтерін игеруден, яғни білімнің, ғылымның негіздерін білуден басталады Дүниетаныммен әлемнің жалпы бейнесі, дүниетану түсінігі, әлемді қабылдау, дүниеге көзқарас, дүниені түсіну сияқты ұғымдармен байланысқан, кейде олар синонимдер ретінде де қолданылады.

Дүниетаным туралы, дүниетанымның жеке тұлғаның дамуымен өзара байланысы жайлы еліміздегі педагогтар Е.Сағындықұлы, Ж.Қоянбаев және Р.М.Қоянбаев т.б. еңбектерінің маңызы зор[5]. Ғалымдар дүниетанымды жеке тұлғаның қалыптасуы мен дамуының анықтаушы факторы екенін айтады.

«Мәдениеттану» пәнінде: ақпараттық мәдениет адам мәдениетінің бір бөлігі, ақпараттық қоғам жеке тұлғаның ақпараттық мәдениетін қалыптастыру ортасы, бұқаралық компьютерлік мәдениеттегі зомбылықтың, әдепсіздіктің байқалуын сыни ойлау секілді бөлімдерді қарастыру қажет.

«Этика» пәнінде ақпараттық ортадағы жұмыстың этикалық және адамгершілік нормаларына байланысты мәселелерді қарастыру қажет (мысалы, Интернет және өзара жеке тұлғалар араласуындағы мәселелер, желілік этикет, компьютерлік коммуникацияның этикалық мәселелері және т.б.).

«Құқық» оқу пәні төңірегінде қоғам мен адамның ақпараттық қауіпсіздік ұғымын ашу қажет; болашақ информатика мұғалімдерінің назарын компьютерлік қылмыс мәселелеріне аудару қажет.

«Сөйлеу мәдениеті» оқу пәні міндеттерінде ақпараттық технологиялардың әсерінен өзгеретін адамның ауызша және жазбаша мәнерін қосу қажет.

Қорыта келгенде, бейіндік оқыту барысында оқушылардың ақпараттық дүниетанымды қалыптастыру неғұрлым күрделі әдістемелік мәселе болып табылады. Ол ең алдымен оқытудың ұйымдастыру жұмысына және жеке тұлғаның жасына сай таным мүмкіндіктерінің шектеулі болуына байланысты. Солай бола тұрса да ақпараттық технологиялар ғылыми дүниетанымды түбегейлі өзгертіп, техниканы бұрын-соңды болмаған биікке көтергендіктен, жалпы білім беру жүйесіндегі информатика курсында лайықты орнын табуға тиіс.

Бағыттылықтар, себептер, мақсаттар, білімдер, біліктіліктер, дағдылар және де жеке тұлғаның жан толғаныс-жігерлі қасиеттері дүниетанымды қалыптастыруға әсерін тигізеді, ал өз кезегінде дүниетанымның ерекшеліктері өмірлік жоспардың, адамгершілік қасиеттердің, білім мен дағдыны меңгеру үдерістерінің, мінез-құлық, себеп пен қажеттіліктің қалыптасуына әсерін тигізеді.

Бейінді оқыту мектеп оқушыларының ойлау қабілетін жетілдіруге әсерін тигізеді, материалдарды түсінікті етеді, оның есте қалуын жақсартады, шығармашылық ойын дамытады және ақпараттық дүниетанымын қалыптастыру мүмкіндігін кеңейтеді.

Әдебиеттер:

1.Советский энциклопедический словарь / гл.ред. А.М.Прохоров.-М.:Сов. энцикл., 1990. - 1630с.

2. Кузьмина Н.В. Понятие “педагогическая система” и критерий ее оценки // Методы системного педагогического исследования. – Л., 1980.

3. Смыковская Т.К. Технология проектирования методической системы учителя математики и информатики: монография. Волгоград: Бланк, 2000. -250с.

4. Краевский В.В. Содержание образования: вперед к прошлому. – М.: Пед. о-во России, 2000.

5.Қоянбаев Ж., Қоянбаев Р.М. Педагогика. - Алматы, 2000. - 104-105 бб.

6.Сағындықұлы Е. Педагогика. - Алматы, 1999. - 124-125 бб.

7.Кішібеков Д. Философия. - Алматы, 1991. - 320 б.

8.Ожегов С.И. Словарь русского языка. - М.:Рус.яз., 1984. – 796 с.

Түйіндеме

Бейінді оқыту мектеп оқушыларының ойлау қабілетін жетілдіруге әсерін тигізеді, материалдарды түсінікті етеді, оның есте қалуын жақсартады, шығармашылық ойын дамытады және ақпараттық дүниетанымын қалыптастыру мүмкіндігін кеңейтеді.

Кілт сөздер: информатика, ақпараттық дүниетанымды қалыптастыру, бейіндік оқыту, модель, педагогикалық шеберлік, дүниетаным.

Резюме

Профильные обучение с уклоном оказывает плодотворное влияние на обучающихся, способствует запоминанию материала обучающимися, расширяет их творчество и позволяет формировать информационное мировоззрение.

Ключевые слова: информатика, формирование информационного мировозрения, обучение с уклоном, модель, педагогический артистизм, мировоззрение.

Summary

Educating with a slope renders fruitful influence on student, improves quality of teaching material, assists memorizing of material student, extends work and allows to form informative worldview.

Key words: Information, form informative worldview, educating with a slope, model, teachers artistry, worldview.

ӘОЖ 004.087:004.855.5

ЭЛЕКТРОНДЫҚ ОҚЫТУ ЖҮЙЕСІНІҢ ТИІМДІЛІГІ

С.С. ҮСЕНОВ, педагогика ғылымдарының докторы, профессор,
С.Д. ОСПАНОВА, магистрант
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Әлемдік рыноктағы әрбір елдің алатын орны мен ұстанымы ең алдымен сол елдің ұлттық білім беру жүйесіне байланысты екіндігі баршамызға белгілі. Бәсекеге лайық экономикасы қарыштап дамыған мемлекеттердің алдыңғы қатардан орын алу себептерінің бірі де осы сапалы білім беру жүйесінің негізінде жүзеге асырылып отыр. «Білімді мыңды жығар, білекті бірді жығар» демекші, кез келген мемлекеттің болашағы мен бәсекеге лайықты отыз елдің алдыңғы қатарынан көріну, әрине білімді ұрпақ – жастардың қолында.

Қазақстан Республикасында білім беруді дамытудың 2011-2020 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасының басым бағыттарының бірі – білім беру ұйымдарына электрондық оқытуды (e-learning) енгізу және оны іске асыру жолдары қарастырылған болатын. Яғни, жаппай білім беру орындарында электрондық оқыту жүйесін 2015 жылы – 50% ға, ал 2020 жылы – оны 90% жеткізу де осы бағдарламада міндеттелген болатын. Ал оны жүзеге асыру бірнеше кезеңдерге бөлініп қарастырылады:

1 кезеңде (2011-2015ж.ж.)-	- 50% астам мекемелер Интернет желісіне қосылады (4-10Мб/сек жоғары); - 50% мекемелер жергілікті желіге қосылады (білім беру контенттеріне еркін қосылу) Wi-Fi, Wi-Max; - 50% астам білім беру мекемелері электронды кітапханалармен жабдықталады; - 1дербес компьютерге 10 білім алушыдан көп болмауы тиіс.
2 кезеңде (2016-2020ж.ж.)	- Барлық білім беру мекемелерінің 90% Интернет желісіне қатынай алады (4-10Мб/сек жоғары); - Білім беру мекемелерінің 90% жергілікті желіге қосылады(білім беру контентіне еркін ену) Wi-Fi, Wi-Max; - 50% астам білім беру мекемелері электронды кітапханалармен жабдықталады; - 1дербес компьютерге 1 білім алушыдан көп болмауы тиіс.

Электрондық оқыту динамикалық бәсекеге қабілетті білімге негізделген экономиканы құрудың, бүкіл ғұмыр бойы оқыту кеңістігін және Еуроодақты құрудың құралы екендігі 2000-2010 жылдарда Лиссабон стратегиясында мойындалды, яғни бұл оқыту жүйесінің тиімділігін көптеген дамыған елдер мойындап, білім беру үдерісіне енгізуде. Электрондық оқыту жүйесін білім беру ұйымдарына енгізу міндеттерінің бірі – оқу-тәрбие үдерісін автоматтандыру болып табылады. Ал оны білім беру процесінде қолданудағы басты мақсат – білім беру процесінде барлық қатысушылардың үздік білім беру ресурстары мен технологияларына тең қол жеткізуін қамтамасыз ету. Осы мақсатпен қазіргі таңда еліміздегі жаппай білім беретін барлық оқу ошақтары осы технологияға бетбұрыс жасап, оны тиімді жүзеге асыруға жұмыс жасауда және оның алғашқы нәтижелері де көрініс табуда [1].

Электрондық оқыту «ашық білім беру», «қашықтықтан білім беру» сияқты ұғымдарды біріктіреді, яғни Электрондық оқыту = компьютерлік оқу + желілік оқу + он-лайн оқу + Интернеттен оқу + қашықтықтан оқыту дегенді білдіреді. Осындай бірнеше оқу түрлері бірмезетте қатар жүзеге асырылатын бұл технологияның артықшылығы да осында екендігі белгілі. Енді жалпы осы электронды оқыту жүйесі - E-learning ұғымы мен бұл технологияның артықшылықтарына тоқталып өтелік.

Электрондық оқыту, яғни E-learning термині білім беру үрдісінің электронды формасын Интернет немесе Интранеттің көмегімен оқытуды басқару жүйесі дегенді білдіреді. Яғни, электрондық оқыту жүйесінің негізі – интернет екендігі белгілі, ал қазіргі біздің дамыған қоғамымызда Интернетпен тек қана компьютерлік желілер арқылы емес, сонымен қатар, байланыс спутниктері, радиосигналдар, кабельдік теледидар, телефон, ұялы байланыс, арнайы оптикалықталшықтық желілер және электр желілері арқыы да байланысуға болады. Интернет мыңдаған корпоративті, үкіметтік, ғылыми және үй желілерінен құралған.

E-learning ұғымы (ағылшын тілінен қысқартылған Electronic Learning) —электрондық оқыту жүйесі, электрондық оқыту, қашықтықтан оқыту, компьютердің көмегімен оқыту, желілік оқу, виртуальды оқыту, ақпараттық, электрондық технологиялардың көмегімен оқыту терминінің синонимі болып табылады. E-learning – бұл оқу және оқыту форматы, білім беру контенттерінің электрондық формасын электрондық құралдармен қолданып, компьютер, ұялы телефон, коммуникатор, білімді басқару жүйесі (LMS) және интерактивті оқыту платформасына негізделген сабақ берулерден құралады. Ал жалпылама ЮНЕСКО мамандарының берген анықтамасы бойынша: «E-Learning — Интернет және мультимедиа көмегімен оқыту» дегенді білдіреді екен. Электрондық оқыту - «E-Learning технологиясы арқылы білім алушы қашықтықтан таңдаған жоғары оқу орнында өзіне қолайлы уақыт мезгілінде электрондық оқу материалдарын, таңдаған дәріс берушімен виртуальді түрде қарым – қатынас жасай отырып өз білім қорын жинақтап, жетілдіре алады. Яғни, электрондық оқыту (E-learning) жүйесінің негізі артықшылықтарын былайша атап көрсетелік:

- Қолайлы уақыт пен орын;
- Қашықтықтан білім алуды жүзеге асырады;
- Үздік білім ресурстарына қолжетімділік;
- Денсаулығы шектеулі білім алушылардың білім алу мүмкіндігі;
- Оқытушымен үздіксіз қарым – қатынас;
- Білім алудың қолайлы күнтізбесі [2].

E-learning жүйесінің басты бөлімінің бірі LMS (Learning Management System) немесе қашықтықтан оқыту жүйесі (ҚОЖ) болып есептеледі. Қазірігі таңда көптеген шетелдік және отандық жоғары оқу орындары осы жүйені пайдалануда.
Бұл жүйе оқытудың барлық үрдістері жүргізілетін және ұйымдастырылатын платформаны ұсынады. Оқытудың электрондық формасын енгізуді жоспарлаған жағдайда, онда алғашқы кезеңдердің бірі қашықтықтан оқыту жүйесін таңдап алу болып табылады. Қашықтықтан оқытудың жергілікті жүйесі белгілі бір білім және жекелеген қала (университет) шеңберінде жұмыс атқарады, оның құрамына тек жоғары оқу орындары ғана емес, мектептер, гимназиялар мен колледждер де кіреді. Қашықтан оқытудың білім саласындағы мақсаты: Білім берудің біртұтас ақпараттық жүйесін құру арқылы оқушылар мен студенттердің білім деңгейін көтеру болып табылады. Қашықтықтан оқыту жүйесі осы немесе басқа да желіде жұмыс істеуге қолайлы көптеген аспаптардың жиынынан тұрады: форумдар, чаттар, тестлеу жүйесі, файлдар айырбасының жүйесі, электрондық тізім, виртуалды класс бөлмелері, блогтар, виртуалды зертханалар және тағы басқалар [3].

Көптеген елдерде оқытуды электрондық қолдаудың негізі - LMS MOODLE ашық кодты бағдарламалық өнім болып табылады. MOODLE – бұл база ретінде Интернетті пайдаланатын курстар мен web-сайттарды құруға мүмкіндік беретін бағдарламалық өнім түрі. Moodle қашықтан оқыту жүйесі желілік ортада Интернет технологиясын қолданып Online оқытуды ұйымдастыруға арналған. Жүйе білім беру ресурстарын (оқу материалдарын) орнатуға мүмкіндік береді және ресурстарға қол жеткізу ортасымен және оны басқарумен қамтамасыз етеді. Moodle жүйесі түрлі оқыту функцияларын жүзеге асыруда аса кең мүмкіндіктерді ұсынады, негізінен төмендегідей орталарға ие:

- білім алушыларға жауапты еркін түрде (мәтін, файл және т.с.с) жіберу мүмкіндігі бар тапсырмалар;
- басқарудың кең қолайлы шарттарымен қамтамасыз етілген талқылауға арналған форумдар;
- чаттар;
- кең танымал GIFT пен HotPotты қоса алғанда түрлі тест құру орталарында құрылған тапсырмаларды импорттауға мүмкіндік беретін тестілеу жүйесі;
- оқу курсын басқару жүйесі (тақырыптардың саны, құралымдар, график, күнтізбелер және т.б.);
- бапталған уақыт аралығында логтарды сақтаумен барлық категориядағы пайдаланушылардың іс әрекеттерін тіркеу жүйесі;
- пайдаланушыларды функциялары мен қол жетімділік рұқсатының шектелуі бойынша жіктеуді қолдайтын авторизация мен аутентифиекациялау жүйесі;
- дамыған хабарлама алмасу жүйесі және т.б.

Moodle ды қолдана отырып оқытушы курстар құрып, оларды мәтіндермен, көмекші файлдармен, презентациялармен, сұрақ жауаптармен және т.б. толтыра алады. Moodle көптеген құрастырушылармен құрылған және отыздан аса тілге аударылған. Әлем бойынша 70 тен аса елде оқыту жүйесінде қолданылады. Оқытушылар үшін Moodle жүйесінің негізініен мынадай мүмкіндіктерін атап өткен жөн:

- Moodle әлеуметтік конструкционизм педагогикасын қолданады.
- Moodle онлайн курстар үшін 100% сай келеді.
- Moodle да кез келген түрлі браузерлерге арналған қарапайым, эффективті бірлескен интерфейс бар [4].

Бәсекеге лайықты елу елдің қатарына ену және экономикасы барынша дамыған елдердің алдыңғы қатарынан орын алу, әрине оңай жүзеге асырылмайтыны анық. Елбасымыздың ықпал етуі тарапынан Қазақстан Республикасы орта білім беру жүйесін ақпараттандыру туралы мемлекеттік бағдарламасында «Қазақстан Республикасы дүние жүзінің дамыған елдері сияқты орта білім беру жүйесінен ақпараттандырудың нақты жолына түсуі тиіс, яғни, бірыңғай ақпараттық білім беретін желіге негізделіп оқыту жүйесін жасау қажет» - деп атап көрсеткен болатын. Үздіксіз білім алу жүйесіне көшу жағдайында қашықтықтан оқыту, оның ішінде электронды оқытудың алар орны ерекше. Ал оны дұрыс жүзеге асырып, білім беру процесінде дұрыс қолданып, суденттер мен оқушылардың, жалпы білім алушыларды сапалы білім нәрімен сусындату игі ісін атқару мына біздің міндеттеріміздің бірі болып саналады.

Әдебиеттер:

1. Назарбаев Н.Ә. Болашақтың іргесін бірге қалайық. Ел Президентінің Қазақстан халқына Жолдауы //Егемен Қазақстан. - 2011.
2. Мұхамбетжанова С.Т., Толықбаева Ғ.Н., Жартынова Ж.Ә. Электрондық оқыту бойынша мониторингінің жүргізу әдістемелік құралы. - Алматы, 2001. – С.50.
3. Жоғарғы оқу орындарынан кейінгі оқыту ұйымдарындағы электрондық оқыту жүйесі туралы ереже // Ұлттық ақпараттандыру орталығы. – Алматы, 2011.
4. Семченко А.А., Мұхамбетжанова С.Т., Толықбаева Ғ.Н., Жартынова Ж.А., Коровина С.В. Обьектіге бағдарланған MOODLE ортасы арқылы білім контенттерін жасау. - Алматы, 2011.

Түйіндеме

Бұл мақалада электрондық оқытудың негізгі ерекшеліктері, яғни оның тиімділігі мен электронды оқытуды жүзеге асыру жолдары көрсетілген. Электрондық оқытудың негізгі мақсаты – білім алушылардың ақпараттық-байланыстық мәдениетін қалыптастыру, олардың терең білімдерге қол жеткізуін және де кәсіби деңгейлерін әлемдегі басқа әріптестермен қатынаса отырып, өсіру болып табылады.

Кілт сөздер: электрондық оқыту, онлайн сабақтар, чаттар, виртуальды оқыту, мультимедиа, қашықтықтан оқыту, форумдар, блогтар.

Резюме

В данной статье рассматриваются особенности электронного обучения, а именно эффективность и пути реализации электронного обучения. Главная цель электронного обучения – повышение доступности к фундаментальным основам знаний, возможности для профессионального роста и повышения конкурентоспособности специалиста, готового к коммуникации со специалистами всего мира.

Ключевые слова: электронное обучение, чаты, виртуальное обучение, мультимедиа, дистанционное обучение, форумы, блоги.

Summary

The article deals with the pecularities of e-learning, namely efficiency and implementing ways e-learning. Primary objective of e-learning is to increase the availability for fundamental bases of knowledge, possibility for professional growth and increasing the competitiveness of specialist.

Key words: e-learning, chat, virtual learning, multimedia, distance learning, forums, blogs.

ӘОЖ 004:37.016:51

МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУДЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ

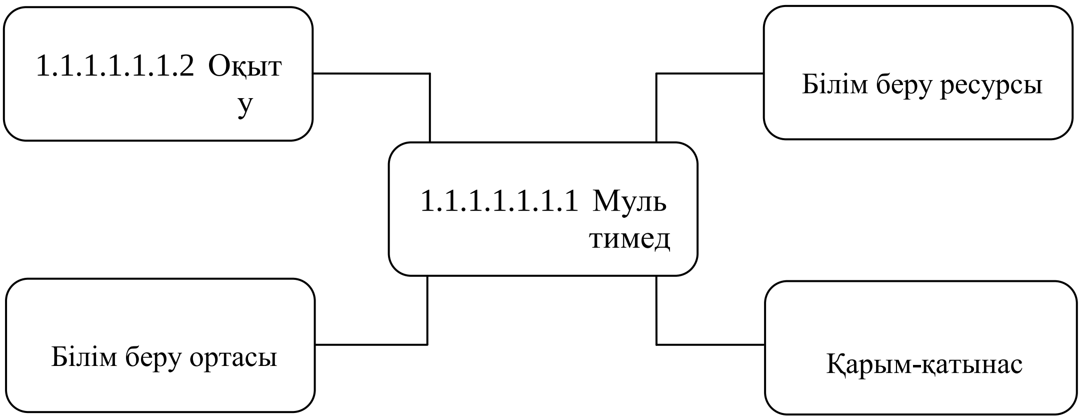
С.С. ҮСЕНОВ, педагогика ғылымдарының докторы, профессор,
Г.Ж. БЕКЕНОВА, магистрант
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Әлемдік өркениет деңгейіне көтерілуге талпынған кез келген елдің, ұлттың өз мақсатына жету жолындағы басты қаруы - ұлттық рухани құндылықтарды негізге ала отырып, әрбір жеке адамның білім алуын қамтамасыз ету. Қазіргі білім беру ордалары мен оқу орындарының басты мақсаты мен міндеті оқытудың жаңа технологияларын, соның ішінде кәсіптік білім беру бағдарламаларының қоғам мен еңбек нарығының өзгеріп отыратын қажеттеріне тез бейімделуіне ықпал ететін технологияларды енгізу және тиімді пайдалану. Заман талабы өзгерген сайын жас ұрпаққа сапалы білім беру үшін қойылатын талапта өзгереді. Қазақстан Республикасының Президенті Н.Ә. Назарбаев Мемлекеттің болашақ дамуына арналған «Қазақстан 2050» бағдарламасында жоғарғы білімнің сапалылығы, адамсүйгіштігі және жаһандануы арқылы мәдениет жасаушылық, интеграциялық роліне ерекше мән берген болатын. Осыған байланысты қазақстандық білім беру жүйесінде білім сапасын арттыру мақсатында жаңашыл технологияларды шешімін табуды қажет ететін бірқатар мәселелер бар. Соның бірі - оқытуда ақпараттық технологияны пайдаланудың шарттарын айқындау. ҚР Білім беруді дамытудың 2011-2020 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасында көрсетілген «...білім беруді дамыту үшін озық жүйелері мен технологияларын әзірлеу мен енгізу» талаптарын іске асыру қажеттігі туындайды [1].

Бұл жүйелер оқушыға өзіне тиімді оқыту технологиясын таңдап алуына және жеке даму бағдарламасын құруына мүмкіндік береді. Қазіргі таңда дидактикалық оқыту жүйелерін қалыптастырудың перспективалық бағыттарының бірі - мультимедиалық технологияларды оқыту процесінде пайдалану.

Білім берудегі мультимедиа – біріншіден, таным процесінің жоғарылауына септігін тигізетін, екіншіден, білім беру мазмұны интерактивті формада ұсынатын дидактикалық аппаратты – бағдарламалық құрал. Жалпы алғанда, мультимедиалық технологияларды білім беру саласында дер кезінде игеру және тиімді пайдалану бүгінгі күндегі маңызды қажеттіліктердің қатарынан саналады. Осы қажеттіліктерге байланысты мынадай іс-әрекеттер орындалуы тиіс: 1) педагогикалық процесте мультимедиалық технологияларды тиімді пайдалана алатын мұғалімдерді даярлау; 2) оқу орындарының компьютерлік технологиялар базасын үнемі жаңартып отыру; 3) оқу-әдістемелік жұмыстарды білім беруді дамытуға бағытталған бағдарламалар негізінде жаңаша сипатта жүргізу [3].

Мультимедиалық технологияларды білім сапасына әсері, оқытудағы тиімділігі, қасиеттері, субьект іс-әрекетін дамыту мүмкіндігі, т.б. сипаттамалары бойынша томендегідей жіктеуге болады.



Мультимедиалық технологиялар оқыту процесін мынадай дидактикалық мүмкіндіктермен қамтамасыз ете алады деп айтуымызға толық негіз бар:

- оқыту процесінде қабылдаудың бірнеше арналарын пайдалану мүмкіндігі;

- сезім мүшелерін активтендіруге ықпал жасайтын әртүрлі әдістер арқылы оқу материалын презентациялау;
- нақты, күрделі эксперименттерді модельдеу;
- абстрактілі мазмұнды визуальдау;
- процестер мен құбылыстарды динамикалық түрде ұсыну.

Мультимедиалық оқыту құралдарының бірнеше ерекшеліктері бар. Бір жағынан атқаратын қызметіне байланысты оларды оқулық ретінде сәйкесті түрде оқу кітабына арналған принцип негізінде топтауға болады. Екінші жағынан алғанда олар электрондық басылымдарға жатады, және оған электрондық басылымдарды топтау принциптері қолданылуы мүмкін. Үшінші жағынан жасалу технологиясына байланысты олар бағдарламалық жабдық болып табылады, және оған жалпы Қазақстандық өнім жиктемесин қолдануға болады. Сондықтан да оқыту қызметіндегі мультимедиалық оқулықтарды топтауда аталған барлық ерекшеліктер қарастырылуы қажет.

Оқыту мақсатындағы мультимедиалық оқулықтарды мынадай ерекшеліктеріне сәйкес жіктеуге болады:

- мультимедиалық оқулықтың оқыту процесіндегі алатын орны мен маңызына сәйкес қызметтік ерекшелік;
- құрылымдық ерекшелік;
- мәтіннің ұйымдастырылу ерекшелігі;
- оқу материалының ұсынылу формасына байланысты ерекшелік;
- белгілі бір мақсатқа арналып жасалу ерекшелігі;
- баспалық эквивалентіне байланысты ерекшелік;
- ақпараттың табиғатына байланысты ерекшелік;
-электрондық басылым мен пайдаланушының арасындағы қарым-қатынасқа байланысты ерекшелік;
-ақпараттың таралу технологиясына байланысты ерекшелік.

Сонымен, мультимедиалық технологиядарды пайдаланып оқыту, атап айтқанда, мынадай нәтижелерге қол жеткізеді:

- оқу мотивациясының жоғарылауына;
- зейін аудару нәтижесінде оқу материалын толық түсінуге;
- оқуға кететін уақыттың үнемделуіне;
- алынған білімнің ұзақ уақыт есте сақталуына;
- білім беруге жұмсалатын шығынның азаюына т.б.

Сондай-ақ білім берудің қажетті бір бөлігі –электронды оқыту болып табылады. Электронды оқыту жүйесінің басты мақсаты –оқыту процесінде ақпараттық- коммуникациялық технологияны қолдану негізіндегі қол жетімділік шарттарының теңдігі негізіндегі сапалы білім беру қызметінің дамуы. Қойылған мақсатқа қол жеткізу үшін келесі мәселелерді шешу қажет:

- Электронды оқыту жүйесінің нормативті- құқықтық қамсыздандыруды дамыту;
- Білім беру ұйымдарындағы технологиялық инфрақұрылымды дамыту;
- Оқыту процесінде ақпараттық-коммуникациялық технологияны қолдануды дамыту;
- Электронды оқыту жүйесін ұйымдастыру және
  қолданушыларды дайындау;

Халықаралық тәжірибелер көрсетіп отырғандай, оқыту процесінде ақпараттық-коммуникациялық технологияны тиімді пайдалану e-learning өнеркәсіптік шешімдерді қолдану арқылы жүзеге асады. Электронды оқытудың өнеркәсіптік жүйесі болып оқыту процесі үшін ақпараттық- коммуникациялық технологияның графикалық, мультимедиалық мүмкіндіктерін пайдалануды ұсыну, оқыту процесінің сапалы және оң нәтиже беру үшін интерактивті рольдік ойындар мен ынталандыру ойындары болып табылады. Электронды оқыту жүйесі оқушылардың қабілеттілігін және танымдық қызығушылықтарын,өздігінен білім алуын дамытады.Электронды оқыту жүйесі қазіргі білім берудің негізгі принцптері –«Барлығы үшін білім беру» және «Өмір бойы білім алу» негізінде оқушылардың топтық және жеке оқытуға мүмкіндік туғызады [3].

Қорыта келе, білім беруді ақпараттандыру бүгінгі күннің ең бір жоғары талабы екенін айтқымыз келеді. Білім беруді ақпараттандыру оқу үрдісіне жаңа технологияны енгізумен ғана шектелмей, мемлекеттің қазіргі әлемдегі даму деңгейін де сипаттайды. Сондықтан осы мақсатты мінсіз орындау үшін бізге, яғни оқытушыларға үлкен міндет жүктеледі. Ол үшін оқытушылар үнемі ізденіс үстінде болуымыз керек. Оқыту үрдісіне өзгеріске енген, жаңадан келген технологияларды асқан шеберлікпен енгізуіміз керек. Сонда ғана біз қазіргі заман талабына сай маман дайындай аламыз.

Әдебиеттер:

1. Қазақстан Республикасында білім беруді дамытудың 2005-2010 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасы // Егемен Қазақстан. – 2004. - 16 қазан.
2. Қазақстан Республикасының Ақпараттандыру туралы заңы. – 2007. - 11 қаңтар.
3.Білім беруді дамытудың 2020 жылға дейінгі ұзақ мерзімді бағдарламасы.
4. 2010-2015 жылдарға арналған электронды оқыту жүйесінің тұжырымдамасы.

Түйіндеме

Мақалада математикалық білім беруді ақпараттандыру, ақпараттық қоғамның басты талабы екені қарастырылады.Сондай-ақ қоғамды ақпараттандыру және отандық білім беру жүйесінің Болондық үдеріске бағытталуы мамандар даярлау ісіне жаңа талаптар қояды.

Кілт сөздер: білім берудегі ақпараттық-коммуникациялық технологиялар, мультимедиалық технологиялар, электронды оқыту.

Резюме

В статье рассматриваются вопросы всестороннего развития информатизации образования в области математики, что является главным требованиям информационного общество в целом. Информатизации общества и открытое образование, направленность отечественного образование к Болонскому процессу определяют новые требования к подготовке будущих специалистов.

Ключевые слова: информационно-коммуникативные технологии, мультимедеийные технологии, электронное обучение.

Summary

In this work we consider the tssues of the comprehensive development of education informatization in mathematics which is the main requirement of the current information society in general. Sociecty informatization and open education, the direction of our education to the Bologna process stes new reguirements for the future professionals training

Key words: information and communication technologies, multimedia technologies, e-learning.

ӘОЖ [51+004].378.096

МЕКТЕПТЕ ИНТЕРАКТИВТІ ТАҚТАНЫ ҚОЛДАНУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Б.Б.ШӘКИЕВ, Б.М.НУРЛАНОВА
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Қазіргі жаңаша қоғам ЭЕМ мүмкіндіктерінің өте жылдам дамуы мен ақпараттық технологиялардың барлық салаларда кеңінен қолданылуымен рекшеленеді. Мұның нәтижесінде компьютерлерді қолдауғы қатысты мәселелерге көзқарастар түбегейлі өзгерістерге ұшырауда. Осы жағдайлар жоғарғы оқу орындарындағы оқу үрдістеріне де қатысты болып, білім берудің классикалық қағидаларынан бас тартпай білім беру жолдары мен әдістерін сапалы өзгерту мүмкіндіктерін туғызады. Қазіргі кездегі қоғам индустриялық кезеңнен кейінгі дамудың ақпараттық кезеңіне аяқ басты. Ақпараттандыру жағдайында оқушылар меңгеруге тиісті білім, білік, дағдының көлемі күннен-күнге артып, мазмұны өзгеріп отыр. Оның басты сипаттарына – ақпараттық технологияларды кеңінен пайдалану адамдардың көптеген қызмет түрлерін компьютерлендіру, коммуникациялардың бірыңғай халықаралық жүйелерін жасау істері жатады. Заманауи кезеңдегі адамдар үшін «компьютерік сауаттылық» дегеніміз кешегі жай сауаттылық (оқып, жаза білу) сияқты міндетті түрде іске асырылатын шара болып саналуы керек. Дамыған елдердегі білім беру жүйесінде ерекше маңызды болып табылатын мәселелердің бірі – оқытуды ақпараттандыру, яғни оқу үдірісінде ақпараттық технологияларды пайдалану болып табылады [2]. Қазіргі таңда елімізде білім беру жүйесінде жаңашылдық қатарына ақпараттық кеңістікті құруға еніп, көкейтесті мәселе ретінде күн тәртібінен түспей отырғандығы мәлім. Ақпарат мемлекеттің даму деңгейін анықтайтын стратегиялық ресурсқа (қорға) айналып, ақпараттық мәдениетті қалыптастыру, яғни мәлімет өңдеу мен оны тасымалдау ісін атқару өркениетті дамудың қажетті шарты болып табылады. Интернет желісін алғашқы дүниеге келтіруге себеп болған 70-ші жылдар басында АҚШ қорғаныс министрлігінің Apranet компьютерлік жүйесі болып саналады. Желі нүктелерінің үлкен аумақта шашырап жатқандығына және олардың бір-бірімен қосылу желілерінің күрделілігіне байланысты оның аздаған бөліктері бұзылғанымен сау желілердің өзара байланысы жылдам қайта құрылып, қалыпты жағдайына келе алатыны айқындалды. Интернет көптеген байланыс желілерін бір-бірімен біріктіріп, дүниедегі ең үлкен компьютерлер торабын құрайды. Оның қарапайым желілік нүктелері үкімет мекемелерінде, университеттерде, коммерциялық фирмаларда, жергілікті кітапхана жүйелерінде, тіпті мектептерде де орналасқан.

Қазіргі уақытта «қоғамды ақпараттандыру», «білім беруді ақпараттандыру» сөз тіркестері біздің сөздік қорымызға еніп кетті. Олай болса, қоғамды ақпараттандыру дегеніміз не? Қоғамды ақпараттандыру – ғылыми техникалық жетілдіру жетістіктерінің күнделікті тұрмысқа ауқымды енуінің нәтижесі, яғни адам өміріне іс – әрекеттің интеллектуалды түрлерінің жан – жақты әсер етуі мен ролінің жоғарылауына байланысты объективті үрді.

Ол оқыту мазмұны, әдісі мен ұйымдастыру түрлерінің өзгерісін тездетеді. Бұл үрдідегі негізгі мәселе білім берудің мазмұны мен мақсатын өзгерту болып табылады, ал оны технологиялық жағынан қамтамасыз ету – өндірістік мәселе.

Қоғамды индустрияландыру кезеңінде білім беру жүйесі алдыңғы кезекте, маманданған сауатты тұтынушыларды дайындауға бағытталса, ал білім беруді ақпараттандыру жағдайында бұл мәселе білім берудің негізгі мақсатына ауысады. Мұндағы негізгі мақсат – оқушының қоршаған әлем жайында табиғи ғылыми болжамын қалыптастырумен жалпы ізгілікті адамгершілікке дайындау болып саналады.

Қазіргі заман мұғалімнен тек өз пәнінің білгірі болуы емес, тарихи танымдық, педагогикалық – психологиялық сауаттылық, саяси экономикалық білімділік және ақпараттық сауаттылықты талап етілуде. Ол заман талабына сай білім беруде жаңалыққа жаны құмар, шығармашылықпен жұмыс істеп, оқу мен тәрбие ісіне еніп, оқытудың жаңа технологиясын шебер меңгерген жан болғанда ғана білігі мен білімі жоғары жетекші тұлға ретінде ұлағатты саналады.

Орта білім беру жүйесін ақпараттандырудың негізгі мақсаты оқушылардың ақпараттық мәдениетін қалыптастыру. Осы мақсатты орындау барысында оқушылардың ақпараттық мәдениетін қалыптастыруда жаңа әдістерді қолдану қажеттілігі туындап отыр. XXI ғасырда ақпараттанған қоғам қажеттілігін қанағаттандыру үшін білім беру саласында келесі міндеттерді шешу көзделіп отыр: компьютерлік техниканы, интернет, компьютерлік желі, электрондық және телекоммуникациялық құралдарды, интерактивті құралдарды, электрондық оқулықтарды оқу үрдісінде тиімді пайдалану арқылы білім сапасын көтеру.

Еліміздегі саяси, әлеуметтік – экономикалық өзгерістерге сай білім беруді ақпараттандыру бағытында мектебімізде жүргізіліп жатқан жұмыстар ақпараттандырудың мемлекеттік бағдарламасына сәйкес жүзеге асырылуда.

XXI ғасыр – ақпарат ғасыры болғандықтан, адамға компьютерлік сауаттылық қажет. Бүгінгі таңда мектеп пәндерін компьютер, интерактивті құралдардың көмегімен оқыту нәтижелерін зерттеудегі ғылыми мәселелерді шешу ең басты орын алады. Оған себеп, оқыту үрдісінде туындайтын компьютерлендірудің педагогикалық – психологиялық жаңа мәселелері әлі толық шешілмегендігі.

Білім беру жүйесін ақпараттандыру білім беру үшін үлкен перспективалар ашады. Соңғы жылдары компьютерлік, телекоммуникациялық техника мен технологиялардың қоғам өміріндегі ролі мен орнында түбегейлі өзгерістер болды. Ақпараттық және телекоммуникациялық технологияларды игеру қазіргі заманда әрбір жеке тұлға оқу және жазу қабілеті сияқты сапалармен бірге қатарға және әрбір адам үшін қажетті шартқа айналды.

Әрбір елдің технологиялық даму дәрежесіне оның экономикалық қуаты мен халқының тұрмыс деңгейі ғана емес, сол елдің әлемдік қоғамдастықта алатын орны, басқа елдермен экономикалық және саяси ықпалдасу мүмкіндіктері, сондай – ақ ұлттық қауіпсіздік мәселелерін шешуіне байланысты. Сонымен бірге, қандай да бір елде қазіргі технологияның дамуы мен қолдануының деңгейі оның материалдық базасының дамуымен қатар емес, негізінен қоғамды парасаттандыру деңгейімен, оның жаңа білімді туындату, игеру және қолдана білу қабілетімен де анықталады.

Жедел дамып отырған ғылыми – техникалық прогресс қоғам өмірінің барлық салаларын ақпараттандырудың ғаламдық процессінің негізіне айналады. Ақпараттық – технологиялық дамуға және оның қарқынына экономиканың жағдайы, адамдардың тұрмыс деңгейі, ұлттық қауіпсіздік, бүкіл дүниежүзілік қауымдастықтағы мемлекеттің рөлі тәуелді болады. Тұтас дүние қалыптастыру мен қоғамдастықтар, жеке адам мен бүкіл дүниежүзілік қоғамдастықтың өмір сүруі үшін жаңа жағдайларды қамтамасыз етуде ақпараттық – телекоммуникациялық технологиялар маңызды роль атқарады.

Ғылым мен техниканың даму қарқыны – ағарту саласының оқыту үрдісіне жаңа технологиялық әдістер, оның ішінде интерактивті құралдарды кең көлемде қолдануды қажет етеді.

Қазақстанның тәуелсіз мемлекет ретінде қалыптасуы орта білім беру жүйесінің дамуымен тығыз байланысты. Қай халықтың, қай ұлттың болсын толығып өсуіне, рухани ірі мәдени дамуына басты ықпал жасайтын тірегі де, түп қазығы да – мектеп.

Мектептердің білім деңгейін көтеру және онда интерактивті құралдарды пайдалану арқылы оқу – тәрбие процессін тиісті деңгейге көтеру, мектеп ұстаздарының, басшыларының, педагогикалық ұжымның жүйелі басшылыққа алған бағыты деп есептейміз. Интерактивті құралдарды қолдану негізінде мектепте жаратылыстану бағытының пәндерін оқыту сапасын арттырып, білім беруді ақпараттандыру жүйелі түрде іске асады деуге болады.

Мектепті ақпараттандыруға осылай мемлекет тарапынан үлкен экономикалық қолдау көрсетіліп, оны оқыту, үйрету мәселесі бүкіл халықтық деңгейге көтерілсе ғана біздің еліміз өндірістің жоғары психологиясын меңгерген дүниежүзілік бәсекеге төтеп беретін, өндіріс өнімдерін өндіре алатын алдыңғы қатарлы мемлекетке айналады. Ол дәрежеге жетуге қажетті білім алуына біздің жас ұрпақтың қабілетінің жететініне сенім мол.

«Қазіргі заманда жастарға ақпараттық технологиямен байланысты әлемдік стандартқа сай мүдделі жаңа білім беру өте қажет» деп, Ел басы атап көрсеткендей, жас ұрпаққа білім беру жолында ақпараттық технологияны оқу үрдісінде оңтайландыру мен тиімділігін арттырудың маңызы зор.

Компьютер және интерактивті құралдар арқылы жасалып жатқан оқыту процессі оқушының жаңаша ойлау қабілетін қалыптастырып, оларды жүйелік байланыстармен заңдылықтарды табуға итеріп, нәтижесінде – өздерінің кәсіби потенциалдарының қалыптасуына жол ашу керек. Бүгінгі таңдағы ақпараттық қоғам аймағында, оқушылардың ойлау қабілетін қалыптастыратын және компьютерлік оқыту ісін дамытатын жалпы заңдылықтардан тарайтын педагогикалық технологияларды ғана тиімді деп санауға болады.

Оқушылардың интерактивті құралдар көмегімен қалыптасатын және жүзеге асырылатын ойлау қабілеті бұрынғы технологиялар арқылы берілетін ойлау жүйесінен өзгеше болғандықтан, тек ойлау қабілеті түсінігі ғана емес, қабылдау, есте сақтау жоғарғы деңгейде болады.

Интерактивті құралдардың келесі ерекшеліктерін атап өтуге болады:

1. Бормен тақтаға жазылған кескінді интерактивті тақтадағы түрлі – түсті айқын, ұқыпты кескінмен салыстыруға болмайды;
2. Тақта мен бордың көмегімен әртүрлі қосымшалары бар жұмысты түсіндіру қиын, әрі мүмкін емес;
3. Слайдтарда, флипчартта қателер жіберілсе, тез арада түзетуге болады;
4. Сабақта көрнекілікті қолдану деңгейі артады;
5. Сабақтың өнімділігі артады;
6. Оқушылардың білім деңгейіне оң әсерін тигізеді.

Интерактивті тақта мұғалімнің сыныптағы әрбір оқушыға ақпаратты тиімді жеткізуіне көмектеседі. Әрине, барлық қажетті бағдарламалармен компьютерде отырып жұмыс жасауға болады, сонымен қатар экранның көлемі жұмыс жасауда барлық оқушылардың қатысуына мүмкіншілік бермейді. Бірақ, сіз сол материалды интерактивті тақта арқылы көрсете отырып, сыныптағы оқушылардың зейінін аудара аласыз.

SMART тақтаны интерактивті *Sympodium* планшетімен толықтыруға болады, тыңдаушы кіші топтарды игергендей үлкен аудиторияларды да игеруге болады. Мұғалім, кішігірім экранда жазу жазып, орнынан қозғалмай оқушыларға қарап тұрып, компьютерлік қосымшаларды, сондай – ақ оқушылардың үлкен экранда және интерактивті тақтада берілген сол көріністі көретінін бақылай алады [1].

Мұғалімдердің жұмысын жеңілдететін, тапсырмаларға үлкен интерактивті көрнекілік беретін, сондай – ақ, барлық мүмкіндіктегі тақырыптар мен пәндер бойынша анимациялық роликтер, үлкен коллекциялы суреттер ұсына отырып компания *SMART Technologies* арнайы бағдарлама жасады. Сабақ барысында веб – сайттар мен кез – келген қосымшалардан да жазу жаза аласыз, оларды да әрдайым сақтай да аласыз, олар сізге қажет болуы мүмкін.

SMART қамтамасыз етілген арнайы бағдарлама қолдан жазылған жазбаны, терілген жазба мәтініне айналдыруға болады немесе экран клавиатурасының көмегімен жазбаны қосуға, аудио – видеожазбалармен, мәтіндер мен объектілермен жұмыс жасауға мүмкіндік береді.

Көрнекілік материалдар оқушыларға алған білімдерін ұғынуға және қорытуға көмектеседі. Мұғалім *SMART Ideas* қамтамасыз еткен бағдарламаның көмегімен түсіндірмелі схемалар мен диаграммаларды оңай жасай алады, интерактивті тақтада көрсетілген тартымды көріністерге зейіні ауған оқушылар да, сабақ барысындағы тапсырмаларға белсенді қатысады.

SMART Ideas қамтамасыз еткен бағдарламаны пайдалануда, балалар да өздерінің ойларын өте жақсы жеткізе алады, бақылау барысында олардың ойларының өскенін байқауға болады.

Мұғалім оқушылардың айтқан ұсыныстарының барлығын жаза отырып, сабағын «миға шабуыл» жасаудан бастауға болады, содан кейін әр түрлі фигураларды қолдана және объектілердің арасында байланыс туғыза отырып, ақпараттарды құрылымға келтіреді, одан кейін қажетті көшірмелер жасап түсініктемелерді қосуға болады.

Осы бағдарлама коллекциясының көмегімен 2000 суреттерден де көбірек материалдарды тез жүйеге келтіруге, әңгіме сюжеттерін құрастыруға, ғылыми әдіс қосуға, табиғаттағы су айналымын схема түрінде көрсетуге немесе өлең жазуға болады. Схемаларда орналасқан суреттерді тақтаның үстіне оңай ауыстырып орналастыруға болады, олардың бейнелеріне саусақпен тигізгенде оқушылар сағат тілін айналдыруы мүмкін, бұрыштарды өлшей немесе мүмкіндікті санай алады.

SMART Ideas бағдарламасы көпдеңгейлі схемалар жасауға, сондай – ақ, видео көріністер және сілтеме жасалған файлдарға қосуға мүмкіндік береді. Материалдар нақты құрылғанда ғана, үлкен көлемді ақпараттар түсіну үшін қолайлы келеді.

Компьютерлік класстар үшін компания *SMART Technologies* арнайы *SynshronEyes* бағдарламасын ұсынады. Осы бағдарлама арқылы мұғалім компьютердің алдында отырып, өз мониторынан барлық оқушылардың компьютерлерінің экрандарын көре отырып, олардың тапсырманы қалай орындағандарын бақылай алады.

Оқушылар сұрақтарына жауаптарын өз орындарында отырып мұғалімнің компьютеріне жібере алады. Қажет болса мұғалім оқушылардың компьютерлерінің клавиатурасын және экранын, сонымен қатар интернетке немесе белгілі қосымшаларға кіру қолайлығын жеңіл бекітіп тастайды. Бұл бағдарлама сауалнамалар мен тестерді тез жасауды, жіберуді және тексеруді қамтамасыз етеді.

Интерактивті тақта *SMART board* мүмкіндігі шектелген балалар үшін арналған. Ыңғайлы тірек тақтаны керекті деңгейге көтеруге және түсіруге қойылған, яғни файл ашу үшін немесе оған жазу үщін қолының ұшын тигізсе болғаны. Сонымен бірге, бұл құрылғы балалардың жалпы талқылау барысында өзара өздігінен әрекет етуіне және бірігіп жұмыс жасауына көмектеседі. Балалар қарым – қатынас жасаудан қорқуды қояды. Интерактивті тақта оқушыларға дәстүрлі шектеуліктен тысқа шығуына көмектеседі [3].

Интерактивті тақта бұл ауыр патологиялық және дамуда қиындықтары бар балалармен жұмыс жасауда, психологиялық орталықтарда коррекциялық міндеттердің қажеттілігін, білім беру мәселесін шешуде тиімді құрал болып саналады.

ACTIV board интерактивті тақтасы оқытушылар мен оқушыларға оқу құралдармен қарым – қатынас жасауға мүмкіндік береді. *ACTIV board* тақтасы *ACTIVstudio* бағдарламалық қамтамасыздандырумен бірігіп жұмыс істейді. Сонымен қатар *ACTIVote* тестілеу жүйесімен және *ACTIVslate* өткізгішсіз панелімен жұмыс істейді. Бұл аудиторияны активтеуге мүмкіндік береді.

Интерактивті тақта – лекторға, баяндамашыға экранды және маркерлі тақтаны біріктіріп қолдануға мүмкіндік беретін құрылғы.

Интерактивті тақта – барлық сыныптағы оқушыларды оқыту үшін бағалы құрал. Мұғалімге жаңа материалды қызықты және тартымды түсіндіруіне көмектесетін визуалды ресурс. Ол мұғалімдердің және оны толық үйреніп интерактивті тақтаны қолданғандығына немесе қолданбағандығына тәуелсіз болады. Бірақ, кейбір жағдайларда интерактивті тақта өте жақсы көмекші болады, мысалы оқушылар алынған ақпаратты қайталай келгенде, яғни оқытудың индуктивті әдісінде.

Жалпы, материалды қарапайым аудиториядан гөрі интерактивті тақтамен бірге жүргізілген сабақты ұғыну әлдеқайда қызықты, әрі ұтымды.

Әдебиеттер:

1. Альберт Д. Самоучитель Macromedia Flash MX 2004: Учебное пособие. – 2004. – 614 с.

2. Угринович Н.Д. Информатика и информационные технологии: примерное поурочное планирование с применением интерактивных средств обучения / 2-е изд. – М.: Школьная пресса, 2001. - 48 с.

3. Черных М.А. Теории интеграции: техника интеграционного обучения [Текст]: учебное пособие. - Алматы: Типография ОО «Добровольного общества инвалидов войны в Афганистане», 2004. - 111 с.

Түйіндеме

Мақалада компьютер және интерактивті құралдар арқылы оқушылардың ойлау қабілетін қалыптастыратын және компьютерлік оқыту ісін дамытатын жалпы заңдылықтар туралы мәлімет берілген. Оларда жүйелік байланыстар мен заңдылықтарды табуға, нәтижесінде – өздерінің кәсіби потенциалдарының қалыптасуына жол ашу қарастырылған. Әртүрлі интерактивті тақталардың түрлері туралы түсініктеме берілген. Интерактивті тақталарды мектепте қолданудың ерекшеліктері қарастырылған.

Кілттік сөздер: интерактивті тақта, көпдеңгейлі схема, өткізгішсіз панель, тестілеу жүйесі, бағдарламалық қамтамасыздандыру.

Резюме

В статье даются сведения об общих закономерностях, развивающих компьютерное обучение и формирующих у учащихся способности думать с помощью компьютера и интерактивных средств. Рассматриваются пути нахождения системных связей и закономерностей, результаты - формирования их профессиональных потенциалов. Даются понятия о различных интерактивных досках. Рассматриваются особенности применения интерактивных досок в школе.

Ключевые слова: интерактивная доска, многоуровневая схема, беспроводная панель, система тестирования, программное обеспечение.

Summary

The article provides information about general patterns that develop computer-based training and shaping students' ability to think through your computer and interactive media. Looked at ways of finding systemic connections and patterns, as a result - the formation of their professional capacities. The notions of a variety of interactive boards. Features of application of interactive whiteboards in schools.

Key words: interactive board, multilevel chart, without wire panel, testing system, programmatic providing.

ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСТЕР, МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 515.16

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПО ИМПУЛЬСАМ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ НАТУРАЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

С.В.АГАПОВ, аспирант
Новосибирский государственный университет, Россия

Рассматриваются натуральные механические системы с двумя степенями свободы, конфигурационным пространством которых является двумерный тор. Исследуется вопрос существования нетривиальных первых интегралов, полиномиальных по импульсам. Нетривиальность означает функциональную независимость таких интегралов от интеграла энергии. Система с n степенями свободы *вполне интегрируема*, если для нее существует n первых интегралов, независимых в инволюции.

Динамика таких систем описывается дифференциальными уравнениями Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x}, \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2+p_2^2}{2} + V(x,y) \quad (2)$$

где V – периодическая функция с некоторой решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Наличие у гамильтоновой системы (1) первого интеграла $F=F(x,y,p_1,p_2)$ эквивалентно занулению скобки Пуассона $\{H,F\} = 0$. Известны следующие случаи наличия дополнительного интеграла:

1) если $V(x,y) = V(\alpha x + \beta y)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то существует полиномиальный по импульсам интеграл вида

$$F_1 = \alpha p_2 - \beta p_1;$$

2) если $V(x,y) = V_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + V_2(\alpha_2 x + \beta_2 y)$, где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ - некоторые константы, согласованный с решеткой периодов Λ, то существует интеграл вида

$$F_2 = (d_1 + d_2)p_1^2 + 4p_1 p_2 - (d_1 + d_2)p_2^2 + 2(d_1 - d_2)(V_1 + V_2),$$

$$d_i = \alpha_i/\beta_i.$$

Полиномиальный по импульсам интеграл называется *неприводимым*, если не существует нетривиального полиномиального интеграла меньшей степени. Известна следующая гипотеза: в рассматриваемой задаче степень полиномиального неприводимого интеграла не превосходит двух. В полном объеме данная гипотеза до сих пор не доказана. Вообще, случай нечетного n более простой: здесь степень неприводимого интеграла, по всей видимости, равна единице (и поэтому его существование связано с нётеровой группой симметрий).

М.Л. Бялый [1] доказал, что, в случае решетки $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, если у гамильтоновой системы (1) (с гладким потенциалом V) существует дополнительный первый интеграл третьей степени по импульсам, то обязательно существует интеграл первой степени. В.В. Козлов и Н.В. Денисова [2] обобщили этот результат на произвольную решетку периодов. Кроме того, в [1] был анонсирован аналогичный результат об интегралах четвертой степени. В [2] было показано, что интеграл четвертой степени сводится к интегралам меньшей степени всегда, за исключением случая, когда потенциал V имеет вид

$$V(x,y) = V_1(x) + V_2(x+y) + V_3(y) + V_4(y-x). \qquad (3)$$

Исследованию этого случая посвящена данная работа.

Разложим $V_i(z)$ в ряд Фурье

$$V_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_i^n e^{2\pi i n z}.$$

Из вещественности V_i следует, что $v_i^n = \overline{v_i^{-n}}$.

Удалось доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Если гамильтонова система (1) с периодическим потенциалом (3) имеет полиномиальный по импульсам интеграл четвертой степени, то каждая из функций V_i содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов Фурье в своем разложении.

Теорема 2. Пусть v_i^n быстро убывают с ростом $|n|$ (как коэффициенты Фурье достаточно гладкой функции). Тогда при условиях теоремы 1 имеют место равенства

$$|v_1^n| = |v_3^n|, |v_2^n| = |v_4^n|.$$

Отметим, что в сингулярном случае система (1) может иметь неприводимый интеграл четвертой степени. Например, в случае потенциала

$$V = \frac{a + b\, sinx}{\cos^2 x} + \cos(x+y) + \frac{c + dsiny}{cos^2 y} - \cos(y-x)\,, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

(см. [3]). Другие примеры можно найти в [4].

В [5] изучалась система (1) в случае дополнительного полиномиального интеграла произвольной нечетной степени. Были найдены инвариантные соотношения на коэффициенты неприводимого первого интеграла. Там же было доказано, что если у системы (1) с аналитическим потенциалом имеется дополнительный первый интеграл пятой степени, то обязательно существует интеграл первой степени, независимый от интеграла энергии.

В.В. Козлов и Д.В. Трещев [6] доказали, что если гамильтонова система интегрируема и потенциал V является тригонометрическим полиномом, то дополнительный интеграл высокой степени по импульсам сводится к интегралу первой или второй степени.

Разложим потенциал V в ряд Фурье следующим образом:

$$V(x,y) = \sum_{\lambda^* \in \Lambda^*} v_{\lambda^*}\, exp\big(2\pi i(\lambda_1^* x + \lambda_2^* y)\big),$$

где $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ – элемент решетки Λ^*, двойственной к Λ:

$$\Lambda^* = \{\lambda^* : (\lambda^*, \lambda) \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Lambda\}.$$

Множество $S = \{\lambda^* : v_{\lambda^*} \neq 0\} \subset \Lambda$ будем называть *спектром потенциала* V.

Давно известен следующий факт: если гамильтонова система (1) имеет дополнительный полиномиальный интеграл степени n, то спектр потенциала лежит максимум на n прямых, пересекающихся в начале координат [2]. Это утверждение удалось усилить в случае существования интеграла 7 степени.

Теорема 3. Пусть у гамильтоновой системы (1) существует неприводимый интеграл 7 степени. Кроме того, пусть известно, что в спектре потенциала найдутся две ортогональные прямые. Тогда спектр лежит максимум на 3 прямых, пересекающихся в начале координат.

Теорема 4. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^2$. Предположим также, что у гамильтоновой системы (1) существует неприводимый интеграл 7 степени. Тогда спектр потенциала лежит максимум на 5 прямых, пересекающихся в начале координат.

Отметим также, что полиномиальные интегралы для систем взаимодействующих частиц, когда потенциал имеет вид

$$\sum_{i<j} V(x_i - x_j),$$

изучались в работе [7]. Во всех найденных интегрируемых случаях периодическая функция V обязательно имеет полюсы на вещественной оси. В [8] показано, что для периодических потенциалов парного взаимодействия без сингулярностей система с такой потенциальной энергией не может быть вполне интегрируемой.

Таким образом, данная работа посвящена исследованию вопроса интегрируемости гамильтоновых систем довольно общего вида. Было показано, что если гамильтонова система (1), (2) с аналитическим периодическим потенциалом (3) имеет несводимый интеграл четвертой степени, то потенциал должен удовлетворять специальным условиям (теоремы 1,2). Кроме того, в случае существования дополнительного интеграла седьмой степени были найдены необходимые условия на спектр потенциала (теоремы 3,4).

Литература:

1. Бялый М.Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе. // Функц. анализ и его прилож. – 1987.- Т. 21. - В. 4. - С. 64–65.
2. Денисова Н.В., Козлов В.В. Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора // Матем. Сборник.- 2000.- Т.191. - В. 2. - С. 43-63.
3. Bozis G. Compatibility conditions for a nonquadratic integral of motion. / G. Bozis // Celestial Mech.- 1982.- V.28., Is.4.- P. 367–380.
4. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли./ – М.: Наука, 1990. - С.238.
5. Миронов А.Е. О полиномиальных интегралах механической системы на двумерном торе // Изв. РАН. Сер. матем.- 2010.- Т. 74. - В.4. - С. 145–156.
6. Козлов В.В., Трещев Д.В. Об интегрирумости гамильтоновых систем с торическим пространством положений. // Матем. сборник. – 1988. - Т. 135. - В.1. - С. 119-138.
7. Пидкуйко С. И., Степин А. М. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем./ С.И. Пидкуйко, А.М. Степин // Докл. АН СССР. - 1978. - Т. 239. - В. 1. - С. 50-53.
8. Козлов В. В. О полиномиальных интегралах системы взаимодействующих частиц. // Докл. АН СССР.- 1988.- Т. 301. - В. 4. - С. 785-788.

Резюме

В статье рассматриваются вопросы, связанные с известной гипотезой о степени неприводимых полиномиальных интегралов обратимых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы и торическим пространством положений.

Ключевые слова: гамильтонова система, первый интеграл, спектр потенциала.

Түйіндеме

Еркіндігінің екі дәрежелерімен және орналасуларының тордық кеңістігі бар қайтымды гамильтондық жүйелердегі келтірілмейтін полиномиалдық интегралдардың дәрежесі туралы белгілі гипотезаға байланысты сұрақтар қарастырылады.

Кілт сөздер: гамильтон жүйелер, бірінші интеграл, потенциал интеграл.

Summary

Issues that are connected with the well- known concept about the degree of the irreducible polynomial integrals of reversible Hamiltonian, systems with two degrees of freedom and torus space positions are considered.

Key words: Hamiltonian system, polynomial integral, potential spectrum.

УДК 002.55; 024

ВНЕДРЕНИЕ НОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ В КАЗАХСТАНЕ

А.З. АЙТМАГАМБЕТОВ, кандидат технических наук, профессор,
А.Б.АЛТАЕВА
Международный университет информационных технологий, г,Алматы,
Республика Казахстан

В настоящее время в мире внедряются технологии мобильной связи четвертого поколения 4G (от англ. fourth generation — четвёртое поколение) — характеризующееся высокой скоростью передачи данных и повышенным качеством голосовой связи. К четвёртому поколению принято относить перспективные технологии, позволяющие осуществлять передачу данных со скоростью, превышающей 10 Мбит/с подвижным абонентам. В Казахстане в декабре 2012 года в коммерческую эксплуатацию была запущена сеть четвертого поколения ALTEL 4G LTE. На данный момент сеть развернута в городах Астана и Алматы, но покрытие будет расширяться на весь Казахстан. 4G LTE — это инновационный продукт, созданный на базе наиболее современной технологии передачи даннях, который позволяет создавать для абонентов наиболее комфортные, понятные, простые и выгодные условия для использования высокоскоростного мобильного доступа к сети Интернет. Главное отличие сетей четвертого поколения от предыдущего, третьего, заключается в том, что технология 4G полностью основана на протоколах пакетной передачи данных, в то время как 3G соединяет в себе передачу как голосового трафика, так и пакетов данных. Международный союз телекоммуникаций определяет технологию 4G как технологию беспроводной коммуникации, которая позволяет достичь скорости передачи данных до 1 Гбит/с в условиях движения источника или приемника и до 100 Мбит/с в условиях обмена данными между двумя мобильными устройствами. Пересылка данных в 4G осуществляется по протоколу IPv6 (IP версии 6). Это заметно облегчает работу сетей, особенно если они различных типов. Для обеспечения необходимой скорости используются частоты 40 и 60 GHz. Создатели приемопередающего оборудования для 4G применили испытанный в цифровом вещании прием — технологию мультиплексирования с ортогональным разделением частот OFDM. Такая методика манипулирования сигналом позволяет значительно «уплотнить» данные без взаимных помех и искажений. При этом происходит разбиение по частотам с соблюдением ортогональности: максимум каждой несущей волны приходится на тот момент, когда соседние имеют нулевое значение. Этим исключается их взаимодействие, а также более эффективно используется частотный спектр — не нужны защитные «противоинтерференционные» полосы. Для передачи сигнала применяется модуляция со сдвигом фазы (PSK и ее разновидности), при которой пересылается больше информации за отрезок времени, или квадратно амплитудная (QAM), более современная и позволяющая выжать максимум из пропускной способности канала. Конкретный тип выбирается в зависимости от требуемой скорости и условий приема. Сигнал разбивается на определенное количество параллельных потоков при передаче и собирается при приеме. Следует отметить, что на данный момент существует несколько технологий, претендующих на право использования 4G (LTE, TD-LTE, Mobile WiMAX, UMB и HSPA+) [3]. В наши дни большинство мобильных операторов мира склоняются к использованию технологии LTE, которая внедрена и в Казахстане. В настоящее время устройства LTE рассчитаны на скорость в 20 Мбит/с, но в будущем сеть четвёртого поколения позволит обеспечить скорость до 300 Мбит/с. В ближайшее время пользователям 4G мобильных устройств станет доступно интернет-телевидение HD качества. Новые возможности в передаче огромных объемов данных, которые предоставляются технологиями группы 4G, уже сейчас заставляют поставщиков мобильного контента задуматься о расширении своего бизнеса. Если сегодня основным товаром на этом рынке являются мелодии и простенькие игры, то появление 4G сделает намного более актуальным мобильное телевидение, video-on-demand (VOD — «видео по запросу»), «продвинутые» игры и т.п. Кроме того, благодаря 4G станут возможны мобильные видеоконференции (видеочаты) и мобильные peer-to-peer-сети. Представляет большой интерес применение платформы IMS(*IP Multimedia Subsystem*) в сетях мобильной связи 4G поколения. Сеть IMS – это современная мультимедийная система[5], являющаяся основным коммуникационным звеном, позволяющим предоставлять как традиционные услуги телефонной связи, так и новые есовременные услуги и сервисы. Изначально разрабатывалась только как мультимедийная платформа предоставления услуг (SDP, англ. *Service Delivery Platform*). Но позднее превратилась в архитектуру, полностью контролирующую соединение и работающую с различными сетями доступа. Возможность передачи мультимедиа даёт возможность оператору предоставлять разнообразные услуги, повышая тем самым среднюю выручку с абонента. А использование протокола IP позволяет построить гибкую сеть с низкими операционными расходами. В сети IMS пользователь может подписаться на пакет услуг, зарегистрировав для их получения несколько терминалов с различными характеристиками, адресами и типами подключений. Это могут быть: домашний ПК, подключенный к Интернету через DSL-линию или домовую сеть Ethernet; мобильный телефон с включенным сервисом GPRS; ноутбук или карманный ПК, “выходящий на связь” через хот-споты Wi-Fi. Каждый из этих терминалов регистрируется отдельно, но все они ассоциируются с одним пользователем, задающим правила, по которым входящие коммуникационные вызовы будут распределяться между разными терминалами. Говоря об “общераспространенных протоколах из семейства TCP/IP”, на которых базируется IMS, в первую очередь необходимо выделить SIP. Почему именно SIP оказался практически идеальным инструментом решения тех задач, которые поставили перед собой разработчики ISM? Этот относительно простой протокол предназначен именно для управления сеансами связи (инициация, модификация, завершение), причем он позволяет любому числу пользователей динамически подключаться к сеансу и выходить из него — отсюда широкие возможности по организации всякого рода конференций. Не менее важно и то, что SIP дает возможность динамически — опять-таки в рамках существующего сеанса связи! — подключать новые типы информации; например, сеанс связи можно начать с текстового чата, потом добавить голосовую связь, а затем при необходимости и видеокартинку. Наконец, средства SIP способны при инициации или модификации сеанса связи учитывать характеристики канала доступа и терминала каждого пользователя и задействовать их оптимальным образом. Скажем, для абонента видеотерминала, подключенного по широкополосному каналу, будут доступны все виды связи, вплоть до видео высокого разрешения, а для пользователя старенького мобильника — только базовые (голосовая связь и SMS). Архитектура IMS-системы предусматривает возможность использования ее элементов для предо-ставления множества услуг и работы множества приложений. Это позволяет сократить как капитальные затраты на оборудование и ПО, так и расходы, связанные с их обслуживанием и технической поддержкой. Опять-таки налицо принципиальное отличие от традиционных систем, в которых средства управления услугами и их доставки жестко “связаны” с конкретной услугой (например, АТС — телефония, сервер MCU — видео-конференц-связь и т. п.), а потому внедрение принципиально нового сервиса требует построения соответствующей инфраструктуры для его доставки. Реализовав принципы IMS, оператор может серьезно сэкономить и при наращивании мощностей своей сети. При использовании традиционной — “монолитной” — системы оператор вынужден модернизировать ее полностью, даже когда требуется повысить емкость (или другие характеристики) только одного логически выделенного функционального блока. В “слоеной” сети IMS каждый слой можно наращивать отдельно: транспортный — когда повышается объем трафика; управления сервисами (сеансами связи) — когда растет число абонентов и/или сеансов связи; наконец, прикладной — когда растет популярность конкретного сервиса или необходимо внедрить новый. Понятно, что при этом у оператора есть широкие возможности по оптимизации своих инвестиций в новые аппаратные и программные средства. Реализация новых услуг еще одно, уже не раз повторявшееся в статье преимущество архитектуры IMS. Независимость IMS от специфики сетевого транспорта и каналов доступа делает ее отличной основой для конвергенции служб фиксированной и мобильной связи (Fixed Mobile Convergence — FMC). Но здесь важно заметить, что IMS отнюдь не единственно возможный технологический фундамент FMC. Более того, на начальном этапе конвергенции экономически выгодными, скорее всего, окажутся другие решения. Развитие именно сетей 4G, в свою очередь, стимулирует операторов к внедрению технологии IMS, поскольку она дает возможность внедрять голосовые услуги на сетях LTE (VoLTE) и другие сервисы. Она позволяет создать единый фундамент для интеграции мультимедийного трафика, точек и способов доступа. Поддержка передачи трафика по IP-протоколу до абонентского терминала не накладывает на существующую сеть дополнительных требований в отношении метода доступа абонентов. При помощи платформы IMS операторы могут предоставлять целый ряд новых услуг в соответствии с ожиданиями абонентов, с возможностью одновременной передачи речи, данных, мультимедийного трафика и новые виды сервисов. К ним можно отнести видеозвонок, прием и передача сообщений, проведение видеоконференций в различных режимах качества (HD и SD), data-конференция, которая позволит одновременно и удаленно работать с рядом электронных документов, услуга eSpace. Все эти услуги продвигаются производителями и отраслевыми консорциумами как способ решения целого ряда проблем современных телекоммуникаций. В дальнейшем возможности платформы IMS будут постепенно расширяться. Предполагается, что, как унифицирующая технология, она будет способствовать конвергенции сетей, разработке приложений, развертыванию новых услуг и снижению издержек благодаря применению открытых стандартов. Тактическая цель внедрения IMS — реализация новых, интересных пользователям услуг — способна повысить привязанность абонентов к своему сервис-провайдеру. Однако полный переход к архитектуре IMS может повлечь совсем иной эффект. Как только среда управления предоставляемыми услугами станет стандартной и унифицированной (для сетей и фиксированной и мобильной связи), операторам станет труднее поддерживать строгий контроль над “своими” группами пользователей. Реализация “слоеной” IMS-архитектуры приведет к четкому разделению между поставщиками услуг и сетевыми операторами, и бизнес по предоставлению доступа к сетевым инфраструктурам также будет принципиально отделен от бизнеса по предоставлению коммуникационных и иных услуг . В сети IMS пользователь может подписаться на пакет услуг, зарегистрировав для их получения несколько терминалов с различными характеристиками, адресами и типами подключений.

При внедрении платформы IMS надо решить проблемы, сдерживающие полноценную реализацию архитектуры IMS. Развитие сетей на основе IMS платформы во многом будет зависеть и от рынка IMS совместимых терминалов.

Литература:

1. Каледин В.В. NFC в мобильных сетях: перспективы и пути развития // Электросвязь. - 2011. - №4.
2. Тихвинский В.О. Особенности сетей связи 4-го поколения // Электросвязь. -2013. -№4,
3. Барсков А.Г. Что такое 4G? Анализ эволюции сетей широкополосного беспроводного доступа // Первая Миля. - 2010. - №2.
4. *Сафронов А.* Технология мобильного широкополосного доступа // Технологии и средства связи. - 2006. - №1.
5. Источник: Пресс-служба компании J’son & Partners Consulting. – Рынок оборудования и перспективы внедрения новых услуг на базе технологии IMS // ИТ-Бизнес CRN. - 2013. - № 3.
6. Ремезов А. Что такое 4G-сети и какие преимущества они нам дают // Hi-tech. - 2013. - №1.

Резюме

Статья посвящена вопросам внедрения технологий мобильной связи четвертого поколения в Республике Казахстан. Рассмотрены преимущества и проблемы при внедрении технологий 4G LTE, а также новые услуги при использовании в сетях 4G платформы IMS.

Ключевые слова: мобильная связь четвертого поколения 4G, технология беспроводной коммуникации, телефонная связь, скорость передачи информации.

Түйіндеме

Ғылыми баяндаманың негізгі мақсаты - Казақстанға төртінші буындағы мобильді технологияларды енгізу болып табылады. Баяндамада 4G LTE технологияларын енгізу барысындағы артықшылықтар мен кемшіліктер қарастырылған, сонымен қоса IMS платформасының 4G жүйелерінде қолданылуының жаңа түрлері көрсетілген.

Кілт сөздер: 4G төртінші буындағы мобильдік байланыс, желісіз коммуникация технологиясы, телефон байланысы, ақпараттарды жеткізу жылдамдығы.

Summary

The report is devoted to the questions of the fourth generation mobile communication technologies introduction in the Republic of Kazakhstan, Advantages and problems white 4G LTE technologies introduction and new services in 4G networks of the IMS platform are considered.

Key words: fourth-generation mobile communications 4G, wireless communication technology, telecommunication, data transmission speed.

УДК 517.968

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНЫ В ЗАДАЧАХ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОЭЛАСТОДИНАМИКИ

Б.Н. АЛИПОВА, стипендиат им. А.Д. Тайманова
Институт теоретической и прикладной математики НАН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

Пусть термоупругая среда занимает область S^-, ограниченную замкнутой гладкой ляпуновской поверхностью S [1, 3]. Требуется найти $u(x,t)$, $\theta(x,t)$, удовлетворяющие уравнениям движения всюду, кроме конечного числа поверхностей - волновых фронтов, на которых выполнены условия на скачки и следующие начальные условия:

В начальный момент среда покоится:

$$u_i(x,0) = 0, \qquad x \in (S^- + S), \qquad t = 0 \tag{1}$$

$$\dot{u}_i(x,0) = 0, \qquad x \in S^- \tag{2}$$

а начальное температурное поле однородное:

$$\theta(x,0) = 0, \qquad x \in (S^- + S), \qquad t = 0 \tag{3}$$

В зависимости от краевых условий на S рассматривается четыре краевые задачи:

<u>Краевая задача 1.</u> На границе области известны действующие нагрузка и тепловой поток:

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j(x) = p_i(x,t), \qquad x \in S \tag{4}$$

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial n} = \frac{\partial\theta}{\partial x_j} n_j(x) = q(x,t), \qquad x \in S \tag{5}$$

Начальные условия (1)-(2).

<u>Краевая задача 2</u>. На границе заданы перемещения и температура

$$u_i(x,t) = u_i^S(x,t), \tag{6}$$

$$\theta(x,t) = \theta^S(x,t) \tag{7}$$

<u>Краевая задача 3.</u> На границе заданы перемещения и тепловой поток

$$u_i(x,t) = u_i^S(x,t), \tag{8}$$

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial n} = \frac{\partial\theta}{\partial x_j} n_j(x) = q(x,t), \qquad x \in S \tag{9}$$

<u>Краевая задача 4</u>. На границе заданы нагрузки и температура

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j(x) = p_i(x,t), \qquad x \in S \tag{10}$$

$$\theta(x,t) = \theta^S(x,t) \tag{11}$$

Во всех задачах необходимо также задавать условия согласования начальных данных с граничными, которые необходимы для сохранения сплошности среды:

$$\left[\sigma_{ij}n_j + \rho c_k \dot{u}_i\right]_{F_t} = 0, \qquad k = 1,2 \tag{12}$$

$$\left[q\right]_{F_t} = 0 \qquad \left[\dot{\theta}\right]_{F_t} = \frac{p\kappa}{c}\left[\dot{u}_j\right]_{F_t} n_j \tag{13}$$

Смешанные краевые задачи вводятся обычным способом разделения границы на части, на каждой из которых выполняются условия одной из краевых задач.

Пусть известны граничные значения перемещений, температуры, напряжений и теплового потока для полупространства в случае связанной термоэластодинамики:

$$u = u^S \qquad \theta = \theta^S \qquad \Sigma_{ij}n_j = f^S \qquad \frac{\partial\theta}{\partial n} = \varphi^S \tag{14}$$

Построим формулу, которая по этим граничным значениям позволяет определить перемещения и температуру среды, следуя методике [2].

Обозначим

$$\bar{\Sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \gamma\bar{\theta}\delta_i^j \tag{15}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ij}^{kl}\bar{u}_{k,l} \tag{16}$$

$\bar{\sigma}_{ij}$ - тензор "чисто упругих" напряжений, C_{ij}^{kl} - тензор упругих констант, в изотропном случае имеет следующий вид [3]:

$$C_{ij}^{kl} = \lambda\delta_i^j\delta_k^l + \mu\left(\delta_i^k\delta_j^l + \delta_i^l\delta_j^k\right), \tag{17}$$

и удовлетворяет следующим условиям симметрии по индексам:

$$C_{ij}^{kl} = C_{ij}^{lk} = C_{ji}^{kl} = C_{ji}^{lk}$$

Доопределим характеристическую функцию $H_S^-(x)$ множества S^- следующим образом:

$$H_S^-(x) = \begin{cases} 1, x \in D \\ \alpha(x), x \in S \\ 0, x \notin \bar{D} \end{cases} \tag{18}$$

здесь $\alpha(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{V\left(O_\varepsilon^-(x)\right)}{V\left(O_\varepsilon(x)\right)}$, где O_ε - шар радиуса ε с центром в точке *x*, $O_\varepsilon^- = O_\varepsilon \cap S^-$, $V(\cdot)$ - евклидов объем указанного множества, замыкание $\bar{D} = D + S$.

Если S - гладкая, то

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \tag{19}$$

Пусть *S* - ограниченная область $\Re_N$ с кусочно гладкой границей и с внешней единичной нормалью *n*. Перейдем в пространство обобщенных вектор-функций $\hat{u}(x,p) = H_S^-(x)\left(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_N,\bar{\theta}\right)$.

Производя дифференцирование обобщенных функций, получаем:

$$\hat{\sigma}_{ij} = C_{ij}^{kl}\bar{u}_{k,l} - C_{ij}^{kl}\left[\bar{u}_k\right]_S n_l \delta_S(x)$$

$$\hat{\theta}_{,j} = \bar{\theta}_{,j} - \left[\bar{\theta} n_j\right]_S \delta_S(x) \tag{20}$$

$$\hat{\theta}_{,jj} = \bar{\theta}_{,jj} - \left[\bar{\theta}_{,j} n_j\right]_S \delta_S(x) - \left(\bar{\theta} n_j \delta_S\right)_{,j}$$

где $\hat{\sigma}_{ij}$ - напряжение (чисто упругая часть) и $\hat{\theta}$ - температура в пространстве обобщенных функций. Так как $\left[\bar{u}_k\right]_S = -\bar{u}_k$ ($k = \overline{1, N+1}$)

$$\hat{\sigma}_{ij,j} = C_{ij}^{kl}\bar{u}_{k,lj} + C_{ij}^{kl}\bar{u}_{k,l} n_j \delta_S(x) + C_{ij}^{kl}\left(\bar{u}_k n_l \delta_S(x)\right)_{,j}$$

$$\hat{\theta}_{,jj} = \theta_{,jj} + \theta n_j \delta_S(x) + \left(\theta n_j \delta_S(x)\right)_{,j} \tag{21}$$

или, используя обозначения (2.31):

$$\hat{\sigma}_{ij,j} = C_{ij}^{kl}\bar{u}_{k,lj} + \bar{\sigma}_{ij} n_j \delta_S(x) + C_{ij}^{kl}\left(\bar{u}_k n_l \delta_S(x)\right)_{,j} \tag{22}$$

Уравнения движения с учетом (8) принимают вид

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{ij,j} - \gamma\hat{\theta}_{,i} - \rho p^2 \hat{u}_i + \hat{F}_i = \bar{\sigma}_{ij} n_j \delta_S(x) \\ \qquad + C_{ij}^{kl}\left(\bar{u}_k n_l \delta_S(x)\right)_{,j} - \gamma\bar{\theta} n_i \delta_S(x) \\ \hat{\theta}_{,jj} - \dfrac{p}{\kappa}\hat{\theta} - \eta p \hat{u}_{j,j} + \dfrac{1}{\kappa}\hat{F}_{N+1} = \bar{\theta}_{,j} n_j \delta_S(x) \\ \qquad + \left(\bar{\theta} n_j \delta_S(x)\right)_{,j} - \eta p \bar{u}_j n_j \delta_S(x) \end{cases} \tag{23}$$

Итак, новые обобщенные массовые силы и тепловые источники имеют вид
($i = \overline{1, N}$):

$$\begin{cases} \bar{\Im}_i = \hat{F}_i - n_j \bar{\Sigma}_{ij} \delta_S(x) - C_{ij}^{kl}\left(\bar{u}_k n_l \delta_S(x)\right)_{,j} \\ \bar{\Im}_{N+1} = \hat{F}_{N+1} - \dfrac{1}{\kappa}\left\{\left(\bar{\theta}_{,j} - \eta p \bar{u}_j\right) n_j \delta_S(x) - \left(\bar{\theta} n_j \delta_S\right)_{,j}\right\} \end{cases} \tag{24}$$

Используя свойства тензора Грина U_i^j, можно найти $\hat{u}(x,p)$
($i,j,k,l,m=\overline{1,N}$):

$$\begin{cases} -\hat{u}_m = U_m^i * \overline{\Sigma}_{ij} n_j \delta_S(x) + C_{ij}^{kl} U_{m,j}^i * \bar{u}_k n_l \delta_S(x) + \\ \qquad + \kappa U_m^{N+1} * \left(\bar{\theta}_{,j} - \eta p \bar{u}_j\right) n_j \delta_S(x) - \kappa U_{m,j}^{N+1} * \bar{\theta} n_j \delta_S(x) \\ -\hat{u}_{N+1} = U_{N+1}^i * \overline{\Sigma}_{ij} n_j \delta_S(x) + C_{ij}^{kl} U_{N+1,j}^i * \bar{u}_k n_l \delta_S(x) + \\ \qquad + \kappa U_{N+1}^{N+1} * \left(\bar{\theta}_{,j} - \eta p \bar{u}_j\right) n_j \delta_S(x) - \kappa U_{N+1,j}^{N+1} * \bar{\theta} n_j \delta_S(x) \end{cases} \quad (25)$$

Введем тензор $\overline{T}_m^k(x,n,p)$:

$$\overline{T}_m^k(x,n,p) = C_{ij}^{kl} \overline{U}_{m,j}^i n_l - \kappa \eta p \overline{U}_m^{N+1} n_j$$

$$\overline{T}_{N+1}^k(x,n,p) = C_{ij}^{kl} \overline{U}_{N+1,j}^i n_l - \kappa \eta p \overline{U}_{N+1}^{N+1} n_j$$

$$\overline{T}_m^{N+1}(x,n,p) = -\kappa \overline{U}_{m,j}^{N+1} n_j \quad (26)$$

$$\overline{T}_{N+1}^{N+1}(x,n,p) = -\kappa \overline{U}_{N+1,j}^{N+1} n_j, \qquad m,k,i,j,l=\overline{1,N}$$

Тогда с учетом выражения о свертках обобщенных функций можно представить свертки в (12) в классическом интегральном виде ($m,k=\overline{1,N+1}$):

$$-\bar{u}_m H_{\overline{S}}(x) = \int_S \left(U_m^k(x-y,p) f_k(y,p) + T_m^k(x-y,p,n(y)) \bar{u}_m^S(y,p) \right) ds(y) \quad (2.42)$$

$$\text{где } f_{N+1} = q = \left.\frac{\partial \theta}{\partial n}\right|_S \text{ и } u_{N+1}^S = \theta|_S .$$

Из (13) вытекают интегральные представления перемещений и температуры
($i=\overline{1,N}$)

$$-\hat{u}_i(x) = \int_S \left\{ \sum_{m=1}^N \overline{U}_i^m(x-y) f_m(y) + \overline{U}_i^{N+1}(x-y) q(y) \right\} ds(y) -$$

$$- \int_S \left\{ \sum_{m=1}^N \overline{T}_i^m(x-y,n(y),p) u_m(y) + \overline{T}_i^{N+1}(x-y,n(y),p) \theta(y) \right\} ds(y) \quad (27)$$

$$-\hat{\theta}(x) = \int_S \left\{ \sum_{m=1}^N \overline{U}_{N+1}^m(x-y) f_m(y) + \overline{U}_{N+1}^{N+1}(x-y) q(y) \right\} ds(y) -$$

$$- \int_S \left\{ \sum_{m=1}^N \overline{T}_{N+1}^m(x-y,n(y),p) u_m(y) + \overline{T}_{N+1}^{N+1}(x-y,n(y),p) \theta(y) \right\} ds(y),$$

Поскольку U_m^k и соответственно T_m^k имеют особенности лишь при *x-y=0*, т.е. на *S*, вне *S* подынтегральные функции не имеют особенностей и являются регулярными функциями, поэтому интегралы в правой части существуют [4].

Формула (14) выражает перемещения $(u_1,\ldots,u_N)$ и температуру θ внутри области через их граничные значения, значения нагрузки $(f_1,\ldots,f_N)$ и теплового потока $f_{N+1}=q$. Эти формулы являются аналогом формулы Грина теории потенциала [2]. В теории упругости формула, выражающая перемещения через граничные значения нагрузки и перемещений, получена

Сомильяной [2] для статических задач. По аналогии будем называть полученную формулу для решений задач термоупругости динамическим аналогом формулы Сомильяны.

Литература:

1. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. -Алматы: Ғылым, 1992. - 228 с.
2. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. - Москва, 1976. - 664 с.
3. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. - М., 1970. - 256 с.
4. Alipova B.N. Method of Boundary integral equations (BIEM) and generalized solutions of transient problems of thermoelastodynamics. ICNPAA 2012, 9-15 July, Vien, Austria.

Резюме

В статье рассматривается ограниченная термоупругая среда, в которой заданы четыре краевые задачи с определенными нагрузками и тепловым потоком, заданными на границе. При известных граничных значениях перемещений температуры, напряжений и теплового потока для полупространства в случае связанной термоэластодинамики и используя свойства обобщенных функций, получаем аналог формулы Грина теории потенциала. Полученный динамический аналог формулы Сомильяны выражает перемещения $\left(u_1,\ldots,u_N\right)$ и температуру θ внутри области через их граничные значения, значения нагрузки $\left(f_1,\ldots,f_N\right)$ и теплового потока $f_{N+1}=q$.

Ключевые слова: связанная термоупругость, обобщающие функции, динамический аналог формулы Сомильяны.

Түйіндеме

Шекараға жиектеріне белгілі салмақ және жылу ағыны бар төрт шекті есеп берілген ыстыққа төзімді шектеулі орта қарастырылады. Температураның, кернеудің және жылу ағынының жартылай кеңістік үшін анықталған шектік мәнінде термоэластодинамикаға байланысты жағдайда және жалпылама функциялар қасиеттерін қолдана отырып, Гриннің потенциал теориясының (баламасына қол жеткіземіз) аналогын аламыз. Алынған Сомильяна формуласының динамикалық аналогы аймақ ішінде олардың шектік мәні арқылы $\left(u_1,\ldots,u_N\right)$ және θ температураның жылжуын, $\left(f_1,\ldots,f_N\right)$ жүктемесінің және $f_{N+1}=q$ жылу ағынының мәнін көрсетеді.

Кілт сөздер: төзімді шектеулі орта, жалпылама функциялар, Сомильяна формуласының динамикалық аналогы.

Summary

There is considered the limited thermoelastic environment medium in which four boundary value problems with certain loads and heat flow were defined on the boundary. So we obtain an analogue of Green's formulae of potential theory by the known boundary values of displacement, temperature, stress and heat flow in the case of the half-space. The properties of generalized functions are used. The resulting dynamic analog of Somilyana's formula expresses displacement $\left(u_1,\ldots,u_N\right)$ and the temperature θ inside the medium through their limit value, the values of load $\left(f_1,\ldots,f_N\right)$ and heat flux $f_{N+1}=q$.

Key words: Linked thermoelasticity, generalized functions, dynamic analoque of Somilyana's formulae.

УДК 532.536:541.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ЧЕРВОТОЧИНЫ ПРИ КИСЛОТНОЙ ОБРАБОТКЕ КАРБОНАТНЫХ ПОРОД

Б.К. АСИЛБЕКОВ, PhD,
У.К. ЖАПБАСБАЕВ, доктор технических наук, профессор
Казахстанско-Британский технический университет , г.Алматы,
Республика Казахстан

Введение. Кислотные обработки карбонатных коллекторов являются наиболее распространенным способом химического воздействия на призабойную зону скважин для интенсификации добычи нефти [1,2]. Несмотря на многолетний опыт применения и большой опыт проведенных исследований, направленных на совершенствование и повышение эффективности метода, значительная часть обработок не дает высокие результаты. По различным оценкам успешность проведения кислотных обработок на многих месторождениях не превышает 30%. Эффективность процесса зависит от таких параметров как: выбор скважины; изученность геологической структуры резервуара, определение физико-химических свойств породы и флюидов, выбор агента (концентрация кислоты, ингибитора, стабилизатора; подбор температуры, давления нагнетания и время выдержки кислоты). Сравнительно низкая статистика успешных обработок в мире наряду с высокой эффективностью процесса при успешной обработке показывает актуальность изучения процесса кислотной обработки.

Анализ микропроцессов, происходящих на уровне отдельных пор, в процессе кислотной обработки карбонатных коллекторов, в первую очередь, выделяют процесс формирования "червоточин" или отдельных, высоко проводящих поровых каналов, в которых расходуется большая часть кислоты [3-5]. Этот режим считается самым эффективным для технологии кислотной обработки призабойной зоны скважины [1,2]. Опыты Фреда и Фоглера [6] по образованию и развитию червоточин в пористой среде при воздействии раствора кислоты или агента стали фундаментальными для исследования механизма червоточин (рис. 1). Диапазон форм "червоточин" изменяется от однородных пустот вблизи области закачки (полное растворение среды) при низких скоростях фильтрации до сильно разветвленных структур при высоких скоростях закачки (рис. 1).

Формирование каналов, близких по форме к прямым, связано с наиболее эффективным процессом кислотной обработки скважин в карбонатных пластах. В этом случае минимальное количество кислоты приводит к образованию каналов, связывающих скважину с невозмущенной областью пласта, а проницаемость в зоне реакции увеличивается на несколько порядков.

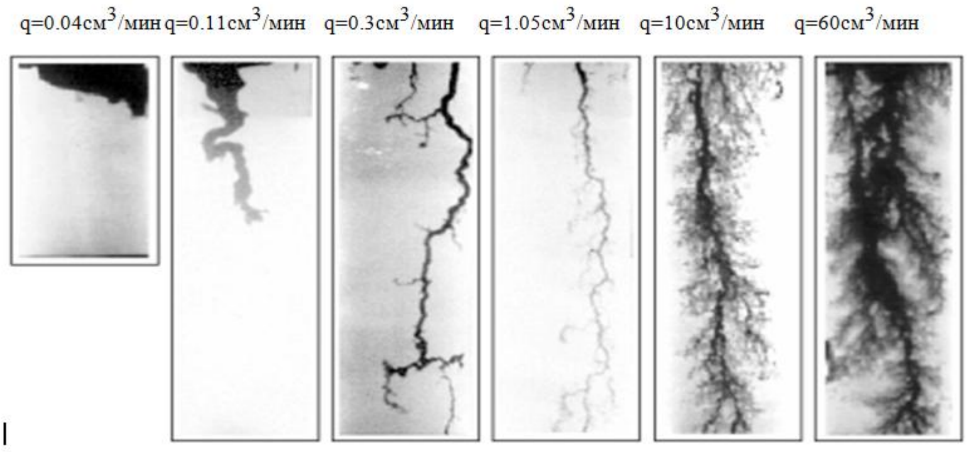


Рисунок 1–Типы структур растворения при различных скоростях закачки кислоты [6]

Развитие червоточины зависит от концентрации кислоты, проницаемости и минералогического состава горной породы [7-16]. В [13] сравнивается результаты проведения численного моделирования кислотной обработки горной породы в 2D и 3D. При этом переход с одного режима образования червоточины в другой происходит практически одинаково для двух моделей. С другой стороны, при дальнейшем увеличении темпа закачки кислоты, для 3D модели требуется меньшее количество кислоты, чем прогнозирует 3D модель. Такие же результаты для небольших темпов закачки показывает сравнение 3D радиальной и 2D линейной моделей. В режиме образования червоточины, темп закачки в 3D радиальном случае меньше, чем в 2D линейном [13].

Понимание процесса развития червоточин является фундаментальным для моделирования и прогноза процесса растворения горной породы [7-16]. Однако процесс усложняется взаимодействием массообменной и реакционной составляющей процесса кислотной обработки в масштабе пор. Кроме того, авторы [6] указывают на случайность природы направления распространения червоточины в пласте.

Согласно Фреду и Фоглеру [6] образование червоточин зависит от числа Дамкелера. Число Дамкелера показывает соотношения химической скорости растворения горной породы кислотой к скорости конвективного переноса кислоты.

$$Da_{mt} = aD_e^{2/3}\frac{l}{Q} \tag{1}$$

D_e– эффективный коэффициент диффузии, Q – расход кислоты, l - длина поры, a – константа, зависящая от типа карбонатной породы.

При оптимальном числе Дамкелера для соляной кислоты образуется червоточина с одним каналом, в то время как использование компонентных кислот приведет к образованию разветвленной червоточины. Число Дамкелера, определенное для растворения, ограничено массообменом реагентов, и не описывает общей процесс растворения.

В процессе образования червоточин образуется главный канал, который продолжает расти и отнимать часть рабочего агента от меньших каналов. При этом структура растворения горной породы под действием кислотного раствора зависит от свойств кислоты, горной породы и интенсивности закачки.

Участки, обладающие большими фильтрационно-ёмкостными характеристиками лучше подвержены кислотной обработки, нежели участки с более низкими фильтрационно-емкостными свойствами. Эта особенность кислотной обработки особенно сильно применима в карбонатных коллекторах [1-5].

В этой работе моделирование и расчет формирования и развития червоточин при кислотной обработке исследованы с использованием модели двухмасштабного континуума, разработанного Панга и соавторами [12]. Модель двухмасштабного континуума состоит из модели макроскопического масштаба Дарси и модели для порового масштаба [12-16].

Математическая модель.

Закачка раствора соляной кислоты с начальной концентрацией C_0 и скоростью u_0 проводится в вертикально расположенном керне карбонатной породы с длиной L и высотой H. Поток соляной кислоты перемещается в керне и начинает растворять карбонатную породу за счет химической реакции. Считается, что в зависимости от распределения фильтрационно-емкостных свойств, скорости закачки и химической реакции происходит процесс кислотной обработки керна карбонатной породы.

Задача рассматривается в декартовой системе координат. Ось x направляется по длине исследуемого керна карбонатной породы, ось y – ортогонально к ней.

Процесс конвективного переноса раствора кислоты с учетом ее химической реакции с карбонатной матрицей описывается уравнениями сохранения массы исходных веществ и продуктов химической реакции [12-16]. Модель масштаба Дарси включает уравнение потока (2), уравнение массового баланса для жидкости (3) и породы (6), уравнение переноса концентрации в жидкой (4) и твердой фазе (5):

$$\vec{U} = -\frac{K}{\mu}\cdot\nabla P, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t'} + \nabla\cdot\vec{U} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\varepsilon C_f)}{\partial t'} + \nabla\cdot(\vec{U}\cdot C_f) = \nabla\cdot(\varepsilon D_e\cdot\nabla C_f) - k_c a_v (C_f - C_s), \tag{4}$$

$$k_c(C_f - C_s) = R(C_s), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t'} = \frac{R(C_s) a_v \alpha}{\rho_s}, \tag{6}$$

где $\vec{U}$ – вектор скорости Дарси, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости закачки, $\boldsymbol{K}$ – тензор проницаемости, P – давление, ε – пористость, t' - время, C_f – концентрация кислоты в жидкой фазе, C_s – концентрация кислоты на межфазной поверхности жидкой и твердой фазы, $\boldsymbol{D}_e = (D_{eX}, D_{eT})$ – тензор эффективной дисперсии, k_c – локальный коэффициент массобмена, a_v – площадь поверхности отнесенный к единичному объему породы доступный для реакции, α – степень растворения кислоты (грамм растворенной твердой фазы на моль кислоты), ρ_s – плотность твердой фазы. Кинетика реакции представлена скоростью $R(C_s)$. Для реакции первого порядка скорость равна $R(C_s) = k_s C_s$, где k_s - константа скорости реакции на поверхности породы имеет размерность скорости.

Модель порового масштаба описывает изменение локальной проницаемости (7), среднего радиуса поры (8) и удельной поверхности растворения (9) в зависимости от изменения пористости структуры:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon(1-\varepsilon_0)}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}\right)^{2\beta}, \tag{7}$$

$$\frac{r_p}{r_0} = \sqrt{\frac{K\varepsilon_0}{K_0\varepsilon}}, \tag{8}$$

$$ъ\frac{a_p}{a_0} = \frac{\varepsilon\cdot r_0}{\varepsilon_0 r_p}, \tag{9}$$

где β – константа, зависящая от структуры породы, $K_0, \varepsilon_0, r_0, a_0$ – средняя начальная проницаемость, пористость, радиус поры и площадь удельной поверхности растворения, соответственно, r_p – средний радиус поры.

Коэффициенты массообмена и тензора эффективной дисперсии уравнения (4) определяются следующими эмпирическими соотношениями:

$$Sh = \frac{2k_c r_p}{D_m} = Sh_\infty + \frac{0.7}{m^{1/2}}\mathrm{Re}_p^{1/2} Sc^{1/3}, \tag{10}$$

$$D_{eX} = a_{0s} D_m + \frac{2\lambda_x |\vec{U}| r_p}{\varepsilon}, \tag{11}$$

$$D_{eT} = a_{0s} D_m + \frac{2\lambda_T |\vec{U}| r_p}{\varepsilon}, \tag{12}$$

где Sh - число Шервуда, Sh_∞ - асимптота число Шервуда, m – отношение длины пора к ее диаметру, $\mathrm{Re}_p = 2|\vec{U}| r_p/\nu$ – поровое число Рейнольдса, $|\vec{U}|$ – модуль скорости, ν – кинематическая вязкость жидкости, D_m – молекулярный коэффициент диффузии, $Sc = \nu/D_m$ – число Шмидта, $\lambda_x, \lambda_T, a_{0s}$ – константы, зависящие от типа породы.

Для удобства решения система уравнений приводится к безразмерному виду. Вводятся следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{x'}{L},\ y = \frac{y'}{L},\ \vec{u} = \frac{\vec{U}}{u_0},\ t = \frac{t'}{\left(\frac{L}{u_0}\right)},\ \eta = \frac{2r_0}{L},\ \alpha_0 = \frac{H}{L},\ r = \frac{r_p}{r_0},$$

$$A_v = \frac{a_v}{a_0},\ k = \frac{K}{K_0},\ c_f = \frac{C_f}{C_0},\quad c_s = \frac{C_s}{C_0},\ p = \frac{P - P_e}{\left(\frac{\mu u_0 L}{K_0}\right)},\ \phi^2 = \frac{2k_s r_0}{D_m},$$

$$N_{ac} = \frac{\alpha C_0}{\rho_s},\ Da = \frac{k_s a_0 L}{u_0},\ Pe = \frac{u_0 L}{D_m},\ \Phi^2 = DaPe = \frac{k_s a_0 L^2}{D_m},$$

где L – длина пористой среды, H – высота пористой среды, C_0 – концентрация кислоты на входе, u_0 – скорость закачки, P_e – давление на выходе, ϕ^2, Φ^2 – параметры Тиле для масштаба элементарной поры и пористой среды, N_{ac} – число емкости кислоты, Da – число Дамкелера, Pe – число Пекле.

С учетом вышеприведенных безразмерных величин уравнения (2)-(12) примет следующий вид:

$$\nabla \cdot (k \nabla p) = Da_{eff} N_{ac} c_f, \tag{13}$$

$$\vec{u} = -k \nabla p, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (c_f \vec{u}) = \nabla \cdot (D_e \nabla c_f), \tag{15}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = Da_{eff} N_{ac} c_f, \qquad 16)$$

$$k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon (1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 (1 - \varepsilon)} \right)^{2\beta}, \tag{17}$$

$$r = \sqrt{\frac{k \varepsilon_0}{\varepsilon}} \tag{18}$$

$$A_v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 r'}, \tag{19}$$

$$Sh = Sh_\infty + \frac{0.7}{m^{1/2}} \mathrm{Re}_p^{1/2} Sc^{1/3}, \tag{20}$$

$$D_{eX} = \frac{\alpha_{0s} Da}{\Phi^2} + \lambda_X |u| r \eta, \tag{21}$$

$$D_{eT} = \frac{\alpha_{0s} Da}{\Phi^2} + \lambda_T |u| r \eta, \tag{22}$$

$$D_{eff} = \frac{DaA_v}{\left(1 + \frac{\phi^2 r}{Sh}\right)}, \qquad \pi = \varepsilon \left(c_f + \frac{1}{N_{ac}} \right) \tag{23}$$

В систему уравнения входят параметры, определяющие процессы взаимодействия кислоты с породой керна. Параметр микро Тиле ϕ^2 выражает отношение времени диффузии на время реакции в масштабах элементарной поры. Число Дамкелера Da определяет отношение времени конвекции на время реакции в масштабах Дарси керна. Параметр емкости кислоты N_{ac} выражает отношение объема вещества, растворенного в единице объема кислоты. Число Пекле выражает отношение времени диффузии на время конвекции. Параметр макро Тиле Φ^2 является аналогом микро Тиле ϕ^2 и вводится для определения влияние скорости закачки в масштабах Дарси. Параметры α_{0s}, λ_X, λ_T являются эмпирическими постоянными для выражения структуры рассматриваемой карбонатной породы керна. Параметры скорости химической реакции и эмпирические постоянные взяты в соответствии с условиями расчетов [12-14].

Система уравнения решается при граничных и начальных условиях. Для давления на левой границе ставится поток жидкости (скорость закачки), на верхней и нижней границах – условие непротекание, а на правой границе – условие Дирихле. Для концентрации кислоты на левой, верхней и нижней и правой границах ставятся постоянное значение, условие непротекание, соответственно. Начальным условиям для концентрации и пористости являются отсутствие концентрации и начальное распределение пористости, соответственно, в момент $t = 0$:

$$c_f = 0 \quad \text{при t=0,} \tag{27}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \hat{f} \quad \text{при t=0,} \tag{28}$$

$$-k\frac{\partial p}{\partial x} = 1 \text{ при x=0,} \tag{29}$$

$$p = 0 \quad \text{при x=1,} \tag{30}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ при y=0, } \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \alpha_0, \tag{31}$$

$$c_f = 1 \text{ при x=0, } \frac{\partial c_f}{\partial x} = 0 \text{ при x=1,} \tag{32}$$

$$\frac{\partial c_f}{\partial y} = 0 \text{ при y=0, } \frac{\partial c_f}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \alpha_0, \tag{33}$$

где $\hat{f}$ – является флуктуацией, которая выражает неоднородности пористости карбонатной породы керна. Значение флуктуации изменяется в интервале $[-\Delta\varepsilon_0, \Delta\varepsilon_0]$ и задается в поле начальной пористости ε_0. Величина этой флуктуации $a = \Delta\varepsilon_0 / \varepsilon_0$ равна величине разнородности породы керна. Масштаб порового канала $l_H = L_h / \eta L$ - безразмерная величина и выражает масштаб разнородности породы керна при изменении начальной местной пористости.

Численный метод решения и алгоритм расчета.

Система уравнений (13) – (23) с краевыми условиями (27) – (33) решается численным методом. Разностные аналоги системы уравнений (13) – (16) получены методом контрольного объема на разностной сетке, показанной на рис. 2. Размеры разностной сетки таковы, что в пределах порового масштаба помещаются не менее 5 ячеек контрольного объема.

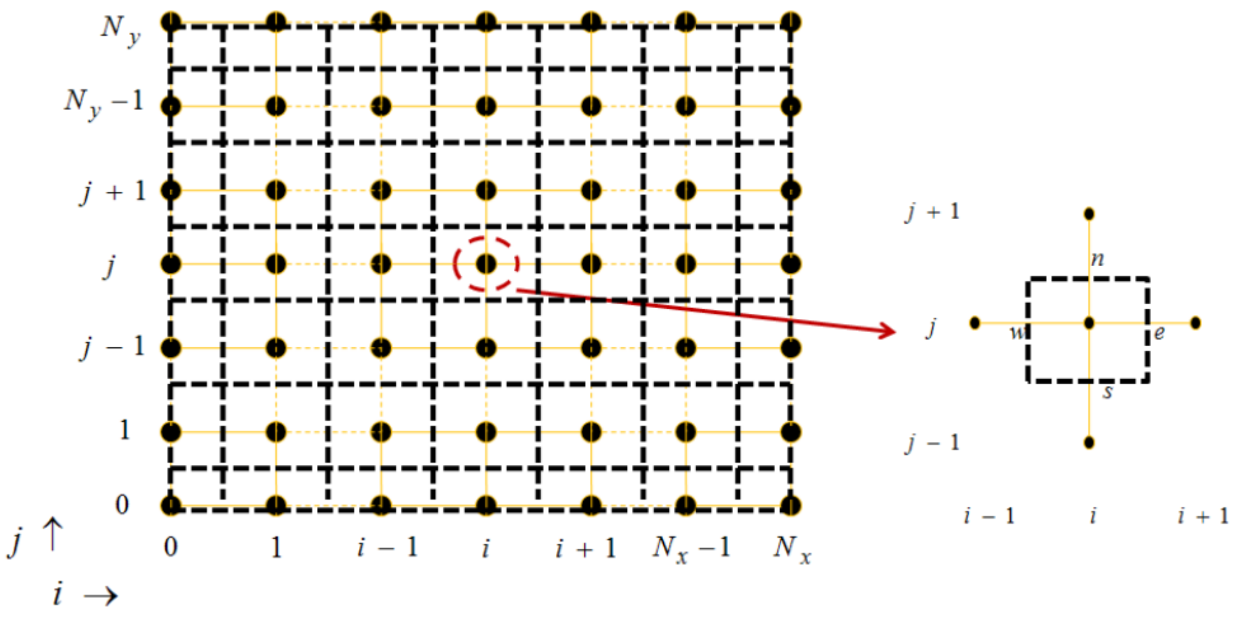


Рисунок 2 – Разностная сетка метода контрольного объема (давление вычисляется в круге, концентрация и пористость, компоненты скорости – на сторонах объема)

Алгоритм расчета задачи выглядит следующим образом. По начальному распределению концентрации и пористости из разностного аналога (13) итерационным методом находится поле давления. По известному полю давления вычисляются компоненты скорости (14). Разностные аналоги уравнения (15), (16) решаются совместно методом расщепления на процессы конвекции-диффузии и реакции. На первом этапе рассчитываются разностные аналоги уравнений конвекции-диффузии и находятся промежуточные значения концентрации и пористости. На втором этапе проводится расчет разностных аналогов уравнений с учетом реакции, и вычисляются окончательные значения концентрации и пористости. Причем на каждом шаге по времени проводится итерационный процесс до выполнения условия сходимости. Такая процедура продолжается до тех пор, пока поток раствора кислоты не прорывается на правом конце пористой среды.

Обсуждение результатов расчетов.

В численных расчетах использованы параметры, приведенные в таблицах 1, 2.

Таблица 1 – Исходные данные, использованные в численных расчетах

Параметр	Значение	Параметр	Значение
L	10 см	C_0	4.4 моль/л
H	4 см	ρ_s	2160 кг/м^3
K_0	10^{-13} м^2	α	48 г/моль
ε_0	0.2	β	1
μ	4.32 мПа*с	m	1
k_s	2*10^{-3} м/с	α_{0s}	0.5
D_m	2*10^{-9} м^2/с	λ_X	0.5
r_0	10^{-6} м	λ_T	0.1
a_0	100 м$^{-1}$		

Таблица 2 – Значение использованных безразмерных параметров

Параметр	Значение
Da	40 - 40000
N_{ac}	0.05 – 0.5
Φ^2	10^6
ϕ^2	0.1 - 10
Sc	10^3
η	2*10^{-5}

Механизм формирования и развития червоточин является сложной и зависит от следующих факторов: 1) Скорости потока кислотного раствора в пористой среде; 2) Диффузии кислоты в масштабах микропор и Дарси пористой среды; 3) Скорости химической реакции растворения породы керна; 4) Массообмена кислотного раствора с поверхностью породы керна; 5) Фильтрационно-емкостных свойств пористой среды. Влияние этих факторов определяется параметрами: число Дамкелера Da (отношение скорости реакции к скорости закачки кислоты); параметр микро Тиле ϕ^2 (отношение скорости реакции к скорости молекулярной диффузии в порах); параметр макро Тиле Φ^2 (отношение скорости реакции к скорости молекулярной диффузии в масштабах Дарси); параметр емкости кислоты N_{ac} (отношение растворенного объема твердой фазы в порах на единицу объема кислоты).

В расчетах было исследовано влияние этих параметров на формирование червоточин. На рис. 3, 4 показаны расчетные данные при разных значениях N_{ac}. На каждом значении N_{ac} проведены расчеты с разными скоростями подачи кислоты u_0 или разных числах Дамкелера Da (рис. 4). Рисунок 3 иллюстрирует поле пористости. Как уже указано выше, параметр N_{ac} выражаект отношение объема породы, растворенного в единице объема кислотного раствора. Верхний рисунок 3,а показывает поле пористости от скорости закачки кислотного раствора u_0 при N_{ac}=0.05. Рисунки 3,а слева направо получены с ростом скорости закачки. При малой скорости закачки u_0 (большое значение числа Дамкелера Da) происходит режим с полным растворением породы в масштабах Дарси. Скорость конвекции мала по сравнению скоростью химической реакции и процесс лимитируется скоростью конвекции. Частицы кислотного раствора в местах, где проницаемость керна выше моментально вступает в реакцию с породой, растворяют ее и образуют каверны. Каверны растут по мере растворения (первый слева рис. 3,а).

В следующем режиме рост скорости закачки u_0 (снижение числа Дамкелера Da) приводит к формированию и развитию червоточин в керне, образуется доминирующая червоточина (второй слева, рис. 3,а). В этом случае скорость конвекции кислоты равняется скорости реакции. Объем кислоты, поступающий в поровый канал, расходуется в точности на протекание реакции, т.е. достигается баланс скорости конвекции и химической реакции. При этом расходуется наименьшее количество кислотного раствора для формирования и развития доминирующей червоточины.

При дальнейшем росте скорости закачки u_0 происходит увеличение объема кислотного раствора и нарастание размеров и размыванию червоточины (третий слева, рис. 3,а). Скорость конвекции начинает превалировать скорость реакции. Это приводит к возрастанию объема израсходованного кислотного раствора.

При больших скоростях закачки происходит вынос кислотного раствора по поровым каналам без растворения породы (четвертый слева, рис. 3,а), т.е. скорость конвекции кислотного раствора намного превышает скорость протекания химической реакции, что приводит к выносу кислотного раствора без растворения стенок поровых каналов керна.

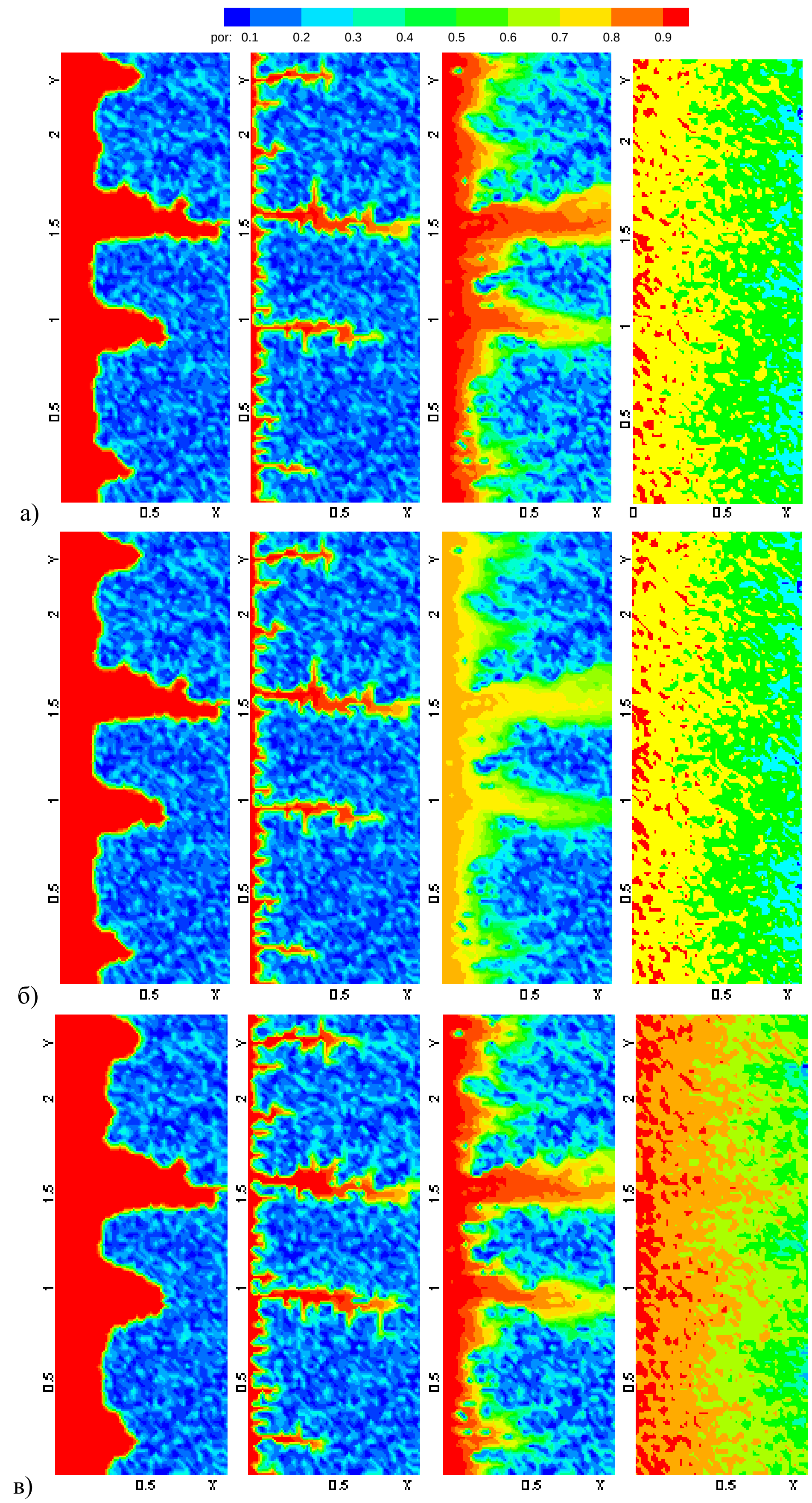
Таким образом, процесс формирования и развития червоточин в керне определяется числом Дамкелера при значении параметра N_{ac}=0.05.

На рис. 4 показан график зависимости PV_{bt}/PV (отношение объема кислоты прорыва к объему поры) от скорости закачки кислоты u_0 при значении N_{ac}=0.05. В этом случае (N_{ac}=0.05) из-за малости объема растворенной породы в единице объема кислоты график зависимости PV_{bt}/PV от u_0 проходит выше по сравнению со значениями N_{ac}=0.1; 0.5.

При N_{ac}=0.05 оптимальное значение скорости закачки равно u_0=0.001 см/с для фомирования червоточин при минимальном расходе кислоты (рис. 4). При меньших значениях скорости закачки, чем оптимальная скорость фомирование черточин не проиходит, а при больших скоростях имеет место перерасход объема закаченного кислотного раствора.

Рисунок 4 дополняет описание конкурирующих воздействий скорости конвекции и химической реакции потока кислотного раствора в керне. При малых скоростях закачки раствора u_0 превалирует величина скорости химической реакции k_s, и отношение PV_{bt}/PV имеет большое значение из-за того, образуются каверны из-за больших объемов кислоты прорыва в объемах пор керна. С ростом скорости закачки раствора u_0 время конвекции и время химической реакции становится одинаковым и отношение PV_{bt}/PV достигает минимума, т.е. количество кислоты прорыва полностью расходуется на растворение стенки пор керна. Баланс скорости переноса частиц кислоты на поверхность твердой фазы и скорости растворение стенки поры приводит к образованию червоточины. Эта величина скорости закачки u_0 и соотвествующее значение параметра Дамкелера - оптимальные при N_{ac}=0.05. В этом режиме потребляется минимальное количество кислотного раствора для формирования червоточин в керне. Дальнейший рост скорости закачки u_0 приводит к превалированию скорости конвекции по отношению скорости химической реакции. Объем кислоты прорыва начинает возрастать в червоточинах и растет отношение PV_{bt}/PV (правое крыло графика, рис. 4). Объем кислоты расходуется на повышение проницаемости и размыванию червоточины.

При больших скоростях закачки u_0 еще больше возрастает отношение PV_{bt}/PV и кислотный раствор прорывается из рассматриваемой области пористой среды, не успев реагировать породой, т.е. скорость конвекции в поровых каналах намного превышает скорость химической реакции.



а) – $N_{ac} = 0,05$ б) – $N_{ac} = 0,1$ в) – $N_{ac} = 0,5$

Рисунок 3 - Распределение пористости в момент времени прорыва при различных значениях параметра N_{ac}

Увеличение параметра N_{ac}=0.1 (рис. 3,б) и N_{ac}=0.5 (рис. 3,в) оказывает заметное влияние на формирование и развитие червоточины. При оптимальных скоростях закачки формируются доминирующие червоточины при минимальном расходе кислотного раствора. Повышение объема растворенной твердой фазы в единице объема кислотного раствора (N_{ac}=0.1) и (N_{ac}=0.5) приводит к более разветвленным формам червоточины, соответственно, (рис. 3,б) и (рис. 3,в) при оптимальных скоростях закачки.

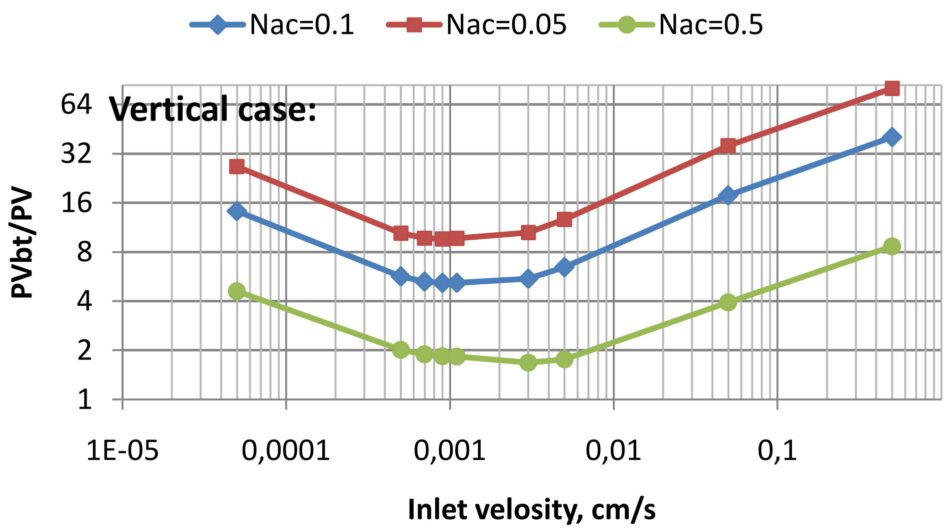
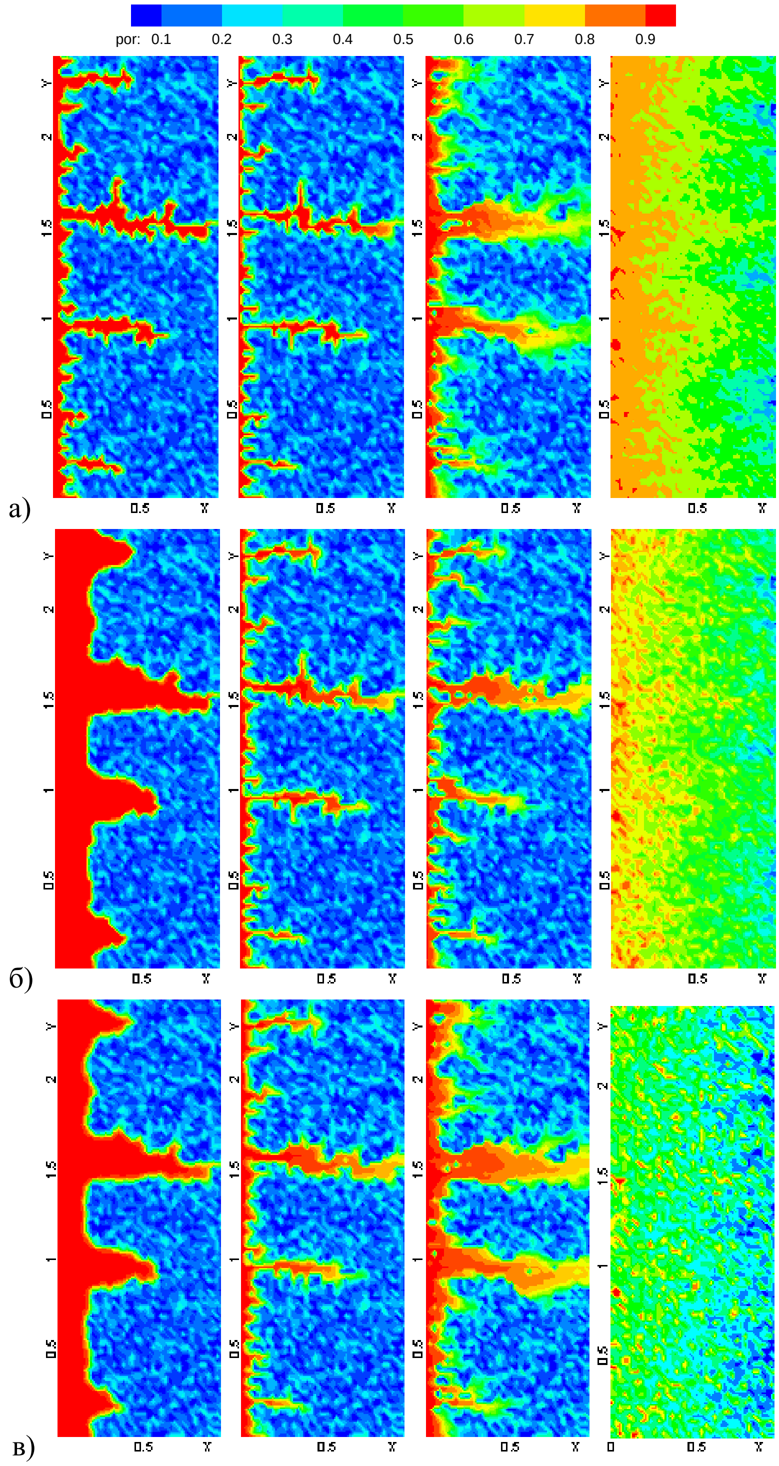


Рисунок 4 – Зависимость PV_{bt}/PV (отношение объема кислоты к объему поры) от скорости закачки кислоты u_0 при разных значениях параметра N_{ac}

Графики зависимости PV_{bt}/PV (отношение объема кислоты прорыва к объему поры) от скорости закачки кислоты u_0 при значениях N_{ac}=0.1, N_{ac}=0.5 имеют аналогичный характер и проходят ниже, чем при N_{ac}=0.05 (рис. 4). Оптимальная скорость закачки для N_{ac}=0.1 равна u_0 =0.001 см/с, а для N_{ac}=0.5 - u_0=0.003 см/с (рис. 4). Для N_{ac}=0.05 и N_{ac}=0.1 оптимальные скорости закачки совпадают, а для N_{ac}=0.5 - несколько больше. Это объясняется ростом количество объема кислоты для растворения соотвествующего объема породы в оптимальном режиме при значении параметра N_{ac}=0.5.

Одним из определяющих критериев формирование и развитие червоточин являетяя параметр микро Тиле ϕ^2, выражающий отношение скорости химической реакции и молекулярной диффузии внутри порах породы.

Рисунок 5 иллюстрирует распределение пористости при различных значениях параметра микро Тиле ϕ^2. Серийные расчеты проведены при каждом значении ϕ^2 путем варьирования скорости закачки кислотного раствора. При значении ϕ^2=0.1 скорость поверхностной реакции мала по сравнению скорости молекулярной диффузии в порах. Несмотря на малости скорости закачки кислоты u_0 (левое крыло графика, рис. 6) происходит формирование червоточины (первый слева рис.5,а). Механизм образования червоточины вызван диффузии, доставляющей частиц кислоты на поверхность червоточины, где происходит реакция и растворение породы.



а) – $\phi^2 = 0{,}1$ б) – $\phi^2 = 2$ в) – $\phi^2 = 10$

Рисунок 5 - Распределение пористости в момент времени прорыва при различных значениях параметра микро Тиле ϕ^2

В этом случае формирование червоточины определяется диффузией молекул кислоты на поверхность твердой фазы в поровом объеме, и образование червоточины лимитируется диффузионным режимом в поровом масштабе.

График зависимости PV_{bt}/PV от скорости закачки снижается (левое крыло графика, рис. 6), т.е. объем кислоты для прорыва меньше объема пор керна. При ϕ^2=0.1 скорость молекулярной диффузии превышает скорость растворения стенки червоточины и объем кислоты в поровых каналах повышает их пористость и проницаемость.

При оптимальной скорости закачки u_0 график зависимости PV_{bt}/PV имеет минимум. Объем закаченной кислоты прорыва полностью расходуется на растворение породы. Скорость растворения поверхности пор обеспечивает формирование червоточин равного объему кислотного раствора. Поэтому пористость червоточины не столь высока, как в предыдущем случае. Это заметно по данным картины распределения пористости червоточины в этом режиме (второй слева, рис. 5,а).

С ростом скорости закачки u_0 график зависимости PV_{bt}/PV возрастает (правое крыло графика, рис. 6). Червоточины увеличиваются в размерах и размываются из-за повышения объема кислоты в поровых каналах керна (третий слева, рис 5,а). Скорость диффузии не успевает доставлять частицы кислотного раствора. Это тормозит протекание диффузионного режима химической реакции в масштабах поры при ϕ^2=0.1.

При больших скоростях закачки u_0 объем кислоты еще больше растет, отношение PV_{bt}/PV возрастает. Скорость реакции, лимитируемая внутренней диффузией, не успевает расходовать кислоту, и поток раствора прорывается через пористую среду керна (крайне правый, рис. 5,а).

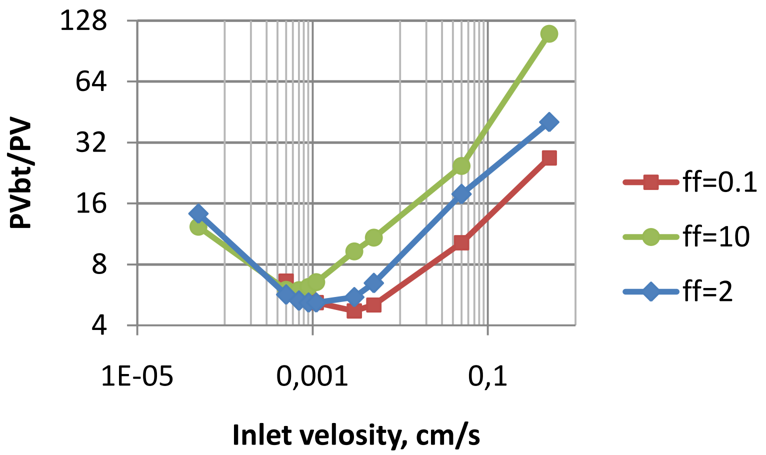


Рисунок 6 - Зависимость PV_{bt}/PV (отношение объема кислоты к объему поры) от скорости закачки кислоты u_0 при разных значениях параметра микро Тиле ϕ^2.

При значениях параметра микро Тиле ϕ^2=2, 10 скорость реакции превышает скорость молекулярной диффузии в масштабах поры. Скорость химической реакции не лимитируется диффузионным режимом в масштабах поры. Процесс формирования и развития червоточин определяется параметром Дамкелера Da. Картины распределения пористости ϕ^2=2 (рис. 5,б) и ϕ^2=10 (рис. 5,в) практически идентичны.

Если для ϕ^2=0.1 минимум PV_{bt}/PV достигается при u_0=0.003 см/с, то для ϕ^2=2 и ϕ^2=10 миниумм PV_{bt}/PV имеет место при u_0=0.001 см/с, u_0=0.0007 см/с (рис. 6), соответственно. Такое обстоятельство объясняется зависимости процесса формирование червоточин от конвекции, диффузии и скорости химической реакции. Как уже указано выше, при ϕ^2=0.1 процесс лимитируется диффузионным режимом в масштабах поры. Для ϕ^2=2 и ϕ^2=10 процесс определяется соотношением скорости конвекции и скорости химической реакции. С ростом параметра микро Тиле ϕ^2 начинает превалировать массобмен между потоком и поверхностью червоточин, т.е. процесс лимитируется скоростью конвекции. Поэтому для ϕ^2=10 оптимальное значение PV_{bt}/PV имеет место при меньшей скорости закачки u_0=0.0007 см/с, чем для случая ϕ^2 =2 (рис. 6)

Заключение.

Рассмотрено использование двух масштабной модели для описания закачки кислотного раствора соляной кислоты в керн пористой среды карбонатной породы. В расчетах исследовано влияние параметров емкости кислоты N_{ac} от 0.05 до 0.5 и микро Тиле ϕ^2 от 0.1 до 10. Для каждых значений параметров N_{ac} и ϕ^2 расчеты проводились при изменении скорости закачки кислотного раствора и числа Дамкелера Da от 10 до 40000.

Результаты расчетов показали, что при варьировании параметра N_{ac} процесс взаимодействия кислотного раствора с породой определяется числом Дамкелера Da или скоростью закачки кислотного раствора. Найдено, что при равенстве скорости конвекции и химической реакции происходит формирование и развитие червоточин при минимальном расходе кислотного раствора.

При значении параметра микро Тиле ϕ^2=0.1 процесс формирования и развития червоточин лимитируется диффузионном режимом протекания химической реакции в масштабах поры. С ростом параметра микро Тиле ϕ^2=2 и ϕ^2=10 скорость химической реакции переходит во внешне диффузионный режим и процесс формирования и развития червоточин определяется числом Дамкелера Da.

Литература:

1. Bulgakova G.T., Kharisov R.Y., Sharifullin A.R., Pestrikov A.V. Optimizing the Design of Matrix Treatments // SPE. 2011. № 43959. pp. 1-15.
2. Каневская Р.Д., Вольнов И.А. Моделирование соляно-кислотного воздействия на карбонатные пласты // Нефтяное хозяйство. 2009. № 7. С. 97–99.
3. Wang Y., Hill A.D. and Schechter R.S.- The Optimum Injection Rate for Matrix Acidizing of Carbonate Formations // SPE Conference Paper. 1993. 26578. MS.
4. Huang T., Hill A.D. and Schechter R. Reacton rate and fluid loss: the key to wormhole initiation and propagation in carbonate acidizing // SPE International Symposium and Oilfield Chemistry. 1997. February. pp. 18-21.
5. MaGee J., Buijse M.A. and Pongratz R. Method for effective fluid diversion when performing a matrix acid stimulation in carbonate formation // SPE. 1997. №37736. pp. 23-35.
6. Fredd C.N., Fogler H.S. Influence of Transport and Reaction on Wormhole Formation in Porous Media //AIChE Journal. 1998.Vol. 44. pp.1933-1949.
7. Buijse M.A. Understanding Wormholing Mechanisms Can Improve Acid Treatments in Carbonate Formations // SPE. 2000. №65068. pp. 63-75.
8. Golfier F., Zarcone C., Bazin B., Lenormand R., Lasseux D. and Quintard M. On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous medium // Fluid Mechanics. 2002.Vol. 457. pp. 213-254.
9. Kang Q.J., Zhang D.X., Chen S.Y. and He X.Y. Lattice-Boltzman simulation of chemical dissolution in porous media // Phys Rev. 2002. E 65 (3). pp.1–8.
10. Li C., Xie T., Pournik M., Zhu D., and Hill A.D. Fine-Scale Simulation of Sandstone Acidizing // SPE. 2004. №90428. pp. 1-10.
11. Buijse M.A. and Glasbergen G. A semi empirical Model to Calculate Wormhole Growth in Carbonate Acidizing // SPE. 2005. №96892. pp. 34-45.
12. Panga, M.K.R., Ziauddin, M., Balakotaiah, V. Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization // AIChE. Journal. 2005. Vol. 51. pp. 3231-3241.
13. Cohen C.E., Ding D., Bazin B., and Quintard M. A New Matrix-Acidizing Simulator Based on a Large-Scale Dual-Porosity Approach // SPE. 2007. №107755. pp. 1-14.
14. Kalia N. and Balakotaiah V. Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates // Chemical Engineering Science. 2009. Vol. 64. pp. 376-390.
15. Izgec O., Ding Zhu, Hill D.A. Numerical and experimental investigation of acid wormholing during acidization of vuggy carbonate rocks // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2010. Vol.74, pp.51-66.
16. Liu M., Zhang S., Mou J. and Zhou F. Wormhole Propagation Behavior Under Reservoir Condition in Carbonate Acidizing // Transport in Porous Media. 2013.Vol. 96, pp.203-220.

Резюме

Приводятся результаты расчетов двухмасштабной модели закачки раствора соляной кислоты в керн пористой среды карбонатной породы. В расчетах определены влияние числа Дамкелера Da, параметров емкости кислоты N_{ac} и микро Тиле ϕ^2 на формирование и развитие червоточины. Показано, что при значении микро Тиле ϕ^2=0.1 формирование и развитие червоточины определяется диффузионным режимом скорости реакции в масштабах поры. Число Дамкелера Da является определяющим для изменения емкости кислоты N_{ac} и при больших значениях микро Тиле ϕ^2.

Ключевые слова: кислотная обработка, карбонатные породы, червоточина, моделирование.

Түйіндеме

Карбонатты жынысты кеуекті ортаны тұз қышқылымен өңдеудің екі масштабты моделі арқылы есептеу нәтижелері келтірілген. Құрт түріндегі каналдардың пайда болуын және дамуына Дамкелер санының Da, тұз қышқылының сиымдылығы N_{ac} және Тиле ϕ^2 параметрлерінің әсерлері есептеулердің нәтижелерінде анықталған. Тиле параметрінің ϕ^2=0.1 мәнінде құрт түрінде каналдардың пайда болуы және дамуы реакция жылдамдығының диффузиялық режимінде болатындығы анықталған. Тиле параметрінің ϕ^2 үлкен мәндерінде тұз қышқылының сиымдылығын N_{ac}, яғни карбонатты жыныс еруінің өзгеруін Дамкелер саны Da анықтайтындығы көрсетілген.

Кілт сөздер: қышқылмен өңдеу, карбонатты жыныстар, құртты каналдар, моделдеу

Summary

Results on two-scale model of hydrochloric acid injection into porous carbonate core calculation are shown. The effect of Damkohler number Da, acid number N_{ac} and micro-Thiele ϕ^2 on wormhole formation and development are determined in calculations. It is shown that at micro-Thiele $\phi^2 = 0.1$ wormhole formation and development are controlled by diffusion of the reaction rate on the scale of pores. Damkohler number determines the acid number N_{ac} at high micro-Thiele ϕ^2 values.

Key words: acidizing, carbonate rocs, wormhole, modeling.

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

А.Т.АСАНОВА, доктор физико-математических наук
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г. Алматы, Республика Казахстан

Краевые задачи для уравнений гиперболического типа встречаются в приложениях в качестве математической модели реальных физических процессов и представляют собой обширную и активно развивающуюся часть современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Основной и наиболее изученной задачей теории гиперболических уравнений второго порядка является периодическая краевая задача [1, 2], для решения которой применялись метод Фурье, метод последовательных приближений, методы функционального анализа и вариационный метод. В работах L.Cesari [1], J.K. Hale, G. Hesquet, A.K. Aziz, A.M. Meyers, M.G. Horak, S.L. Brodsky, V. Lakshmikantham, S.G. Pandit, С.В. Жесткова исследуются периодические на полосе и плоскости решения уравнения гиперболического типа со смешанными частными производными. Условия существования периодических решений гиперболических уравнений высоких порядков, связанные с проблемой малых знаменателей, изучались Б.И.Пташником [3]. В работах Ю.А.Митропольского, Г.П. Хомы, М.И.Громяк для исследования периодических решений волновых уравнений были применены асимптотические методы. В монографии А.М.Самойленко, Б.П. Ткача [4] численно-аналитический метод применен к исследованию периодических краевых задач для систем уравнений с частными производными гиперболического типа с отклоняющимся аргументом. В работе А.Ю.Колесова, Е.Ф.Мищенко, Н.Х.Розова [5] рассматривается математическая модель RSLG-генератора - краевая задача для системы телеграфных уравнений. Развивая асимптотическую теорию периодических по времени решений дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, моделирующих колебательные процессы в автогенераторах с распределенными параметрами, установлены характерные особенности динамики рассматриваемых уравнений, выявлена роль резонансности как источника релаксационных колебаний и проведено теоретическое обоснование наблюдаемого в физических системах феномена буферности. Задачи с сингулярностями для гиперболических уравнений изучались Ф.Т.Барановским, М.П. Григолия.

В последние десятилетия интенсивно развивается теория нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений со смешанными производными. Одной из первых в этом направлении была работа Ю.А.Митропольского и Л.Б.Урманчевой [6], где численно-аналитическим методом установлены достаточные условия существования единственного решения двухточечной краевой задачи для квазилинейной системы. В работах А.М.Нахушева, С.С.Харибегашвили, В.М. Шалова, Н.Д.Голубевой и Л.С.Пулькиной для решения краевых задач с нелокальными условиями применялись метод Римана, методы математической физики и вариационный принцип. В работах Т.И.Кигурадзе [7] исследовались периодические и некоторые нелокальные краевые задачи для уравнений и систем гиперболического типа, а также задача нахождения ограниченного решения гиперболических уравнений на полосе. Для изучения указанных задач применены методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, методы теории функциональных уравнений и фундаментальная матрица линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

На сегодняшний день применение разнообразного математического аппарата к исследованию краевых задач для гиперболических уравнений позволило разработать методы их решения и выделить классы разрешимых задач. Использование различных подходов при изучении вопросов существования, единственности и нахождения решений нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений привело к результатам, сформулированным в различных терминах. Однако, многообразие возникающих вопросов, необходимых для выяснения свойств и решения рассматриваемых задач, заставляет расширить круг применяемых методов исследования и установить условия классической разрешимости нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений в терминах исходных данных. Как известно, развитие вычислительной техники и ее всестороннее применение в прикладных задачах предъявляет новые требования на разрабатываемые методы, уделяя особое внимание на их конструктивность. Основной характеристикой конструктивных методов является эффективная проверяемость условий их применимости и возможности с их помощью нахождения конечного результата. Широкое практическое применение систем гиперболических уравнений со смешанной производной в математическом моделировании различных процессов, с одной стороны, и необходимость разработки методов исследования нелокальных краевых задач для них, позволяющих расширить класс разрешимых нелокальных краевых задач и построить эффективные алгоритмы нахождения их решений, с другой стороны, показывают важность и актуальность указанной темы.

Таким образом, современные тенденции развития теории краевых задач для уравнений математической физики приводят к необходимости создания конструктивных методов исследования и решения нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанной производной, установлению коэффициентного критерия корректной разрешимости линейных нелокальных краевых задач и эффективно проверяемых условий разрешимости нелокальных краевых задач для систем нелинейных гиперболических уравнений, построение алгоритмов нахождения их решений.

Постановка нелокальной краевой задачи. В $\overline{\Omega}=[0,T]\times[0,\omega]$ рассматривается краевая задача с данными на характеристических линиях для системы гиперболических уравнений со смешанной производной

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} +$$

$$+ S_1(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial t} + S_0(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $u = colon(u_1, u_2, ..., u_n)$, $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, n-вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, $[0,\omega]$ соответственно, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.
Нелокальная краевая задача (1)-(3) является краевой задачей с данными на характеристиках, где в условии (2) задается значение искомой функции на характеристике $x = 0$, а условие (3) является общим линейным нелокальным условием, которое связывает значения искомой функции и ее производных по t и по x на характеристиках $t = 0$, $t = T$.
Функция $u(t,x) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ называется классическим решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \overline{\Omega}$ и выполняются краевые условия (2), (3).
Когда коэффициенты системы (1) – постоянные матрицы, к задаче (1)-(3) можно применить метод Римана [8]. Достаточным условием однозначной классической разрешимости будет обратимость матрицы $P_2(x) + S_2(x)e^{AT}$. Когда коэффициенты системы (1) – переменные матрицы, применить метод Римана, вообще говоря нельзя, так как матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$ являются только непрерывными по t, x. Однако, используя фундаментальную матрицу $U(t,x)$ линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v$, можно установить, что достаточным условием однозначной классической разрешимости задачи (1)-(3) будет невырожденность матрицы $P_2(x)U(0,x) + S_2(x)U(T,x)$, т.е. $\det(P_2(x)U(0,x) + S_2(x)U(T,x)) \neq 0$ при всех $x \in [0,\omega]$. В связи с тем, что для системы с переменными коэффициентами построить фундаментальную матрицу $U(t,x)$ достаточно сложно, этот признак применим для узкого класса краевых задач.

Поэтому возникает естественный вопрос: можно ли установить коэффициентные достаточные условия существования единственного классического решения нелокальной краевой задачи (1)-(3)? Для ответа на этот вопрос разрабатывается метод введения функциональных параметров [9,10], развивающий идею метода параметризации [11,12] на уравнения с частными производными гиперболического типа. Метод параметризации позволил установить коэффициентные необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейных краевых задач для систем гиперболических уравнений. Суть метода параметризации заключается в том, что промежуток, где рассматривается система дифференциальных уравнений, разбивается на части с некоторым шагом $h > 0$ и исходная задача сводится к эквивалентной задаче с параметрами. При этом свойства решений системы дифференциальных уравнений переходят в свойства параметров, являющихся значениями решения в точках разбиения. В методе введения функциональных параметров прямоугольная область, где рассматривается система гиперболических уравнений (1), разбивается на прямоугольные области с некоторым шагом $h > 0$ по переменной t. Краевая задача с данными на характеристиках (1)-(3) сводится к эквивалентной многохарактеристической краевой задаче с функциональными параметрами, зависящими от x. Свойства решений и его частных производных переходят в свойства функциональных параметров, являющихся значениями решения на отрезках линий разбиения – характеристиках. Это позволяет воспользоваться свойствами характеристики и из склеивания вдоль характеристик частной производной по x решения получить склеивания самого решения и его частной производной по t. Склеивание вдоль характеристик разбиения смешанной производной следует из систем уравнений. Относительно введенных функциональных параметров получается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. В методе параметризации ставится условие склеивания значения решений краевой задачи во внутренних точках разбиения, а относительно параметров получается система алгебраических уравнений.

Метод введения функциональных параметров позволил установить достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемых задач в терминах исходных данных, предложить алгоритмы нахождения их решений, а также получить коэффициентный критерий корректной разрешимости линейной краевой задачи с данными на характеристиках [13-17]. Полученные результаты применены к исследованию краевых задач с данными на характеристиках и задачи нахождения ограниченного на полосе решения систем квазилинейных и нелинейных гиперболических уравнений, получены достаточные условия их разрешимости в терминах исходных данных [18-22].

Литература:

1. Cesari L. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Internat. Sympos. Nonlinear Vibrations (Kiev 1961), Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR. - Kiev. - 1963. - Vol. 2, - P. 440-457.

2. Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: time - periodic solutions. - Prague : Martinus Nijhoff Publ, Hague, Boston, London, 1982. - 358p.

3. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев: Наук. думка. 1984. - 264с.

4. Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. - Киев: Наук. думка, 1992. - 208с.

5. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. - М.: Наука, 1998. - 191с. - (Тр. МИАН; Т. 222).

6. Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б. О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Укр. матем. журнал. - 1990. - Т. 42. - №12. - С. 1657-1663.

7. Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Diff. Equations Math. Phys. - 1994. - Vol. 1, - P. 1-144.

8. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука. 1981. – 448с.

9. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость краевых задач с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Вычисл. матем. и матем. физ. -2002. - Т. 42. - № 11. - С. 1673-1685.

10. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. - 2003. - Т. 39. №10. - С. 1343-1354.

11. Джумабаев Д.С. Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник АН КазССР. - 1988. - №1. - С.48-52.

12. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыновенных дифференциальных уравнений // Вычисл. матем. и матем. физ. - 1989. - Т. 29. - №1. - С.50-66.

13. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Критерий корректной разрешимости краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. - 2002. - № 3. - С. 20-26.

14. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. - 2003. - Т. 391. - №3. - С. 295-297.

15. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. - 2005. - Т. 41. - №3. - С. 337-346.

16. Асанова А.Т. Об однозначной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Фундамент. и прикл. матем. - 2006. - Т. 12. - № 4. - С. 21-39.

17. Джумабаев Д.С., Асанова А.Т. Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доповіді НАН Украіни. - 2010. - № 4. - С. 7-11.

18. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Ограниченные решения систем гиперболических уравнений и их аппроксимация // Вычисл. матем. и матем. физ. - 2003. - Т. 43. - № 8. - С. 1183-1200.

19. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Периодические и ограниченные на плоскости решения систем гиперболических уравнений // Украинский матем. журнал. - 2004. - Т. 56. - № 4. - С. 562-572.

20. Асанова А.Т. О нелокальной краевой задаче для систем квазилинейных гиперболических уравнений // Доклады РАН. - 2006. - Т.411. - №1. - С.5-9.

21. Асанова А.Т. Об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи с данными на пересекающихся линиях для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. - 2009. - Т. 45. - № 3. - С. 373-381.

22. Асанова А.Т. О краевой задаче с данными на нехарактеристических пересекающихся линиях для систем гиперболических уравнений со смешанной производной // Нелинейные колебания. - 2012. Т. 15. - № 1. - С. 3-12.

Резюме

В статье приведен краткий обзор литературы и оценка современного состояния теории нелокальных краевых задач для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. Описаны основные результаты по нелокальной краевой задаче с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений со смешанной производной и их место в теории нелокальных краевых задач для уравнений в частных призводных.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, гиперболическое уравнение, метод функциональной параметризации.

Түйіндеме

Аралас туындысы бар гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал шеттік есептер теориясының әдебиетіне қысқаша шолу мен қазіргі жағдайының бағалауы келтірілген. Аралас туындысы бар гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері сипаттамаларда берілген бейлокал шеттік есеп бойынша басты нәтижелер мен олардың дербес туындылы теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер теориясындағы орны сипатталған.

Кілт сөздер: бейлокал шеттік есеп, гиперболалық теңдеу, функционалдық параметрлеу әдісі.

Summary

A short review and assessment of the contemporary achievement of the theory of nonlocal boundary value problems for system of hyperbolic equations with mixed derivative is provided. The main results on the nonlocal boundary value problem with data on characteristics for system of hyperbolic equations with mixed derivative and their place in the theory of nonlocal boundary value problems for the equations in partial derivatives are described.

Key words: nonlocal boundary value problem, hyperbolic equation, method of functional parametrization.

ӘОЖ 621.3.083.92:621.3.052:621.3.037.372

ДИСКРЕТТІ ЛОГАРИФМ ЕСЕБІ НЕГІЗІНДЕ ЭЛЕКТРОНДЫ САНДЫҚ ҚОЛТАҢБА ЖҮЙЕСІН ҚҰРУ

Ұ.Ж.ӘЙТІМОВА, физика-математика ғылымдарының кандидаты,
И.Ө.МАХАМБАЕВА, физика-математика ғылымдарының кандидаты,
П.С.ДҮЙСЕНОВА
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Қандай да бір құжат берілген болсын. Криптографиялық тұрақты хэш-функциясын иемдене отырып, біз h хэш-функциясының қолтаңбасын сол қолтаңба қойылған құжатпен біріктіре аламыз. Электронды сандық қолтаңба (ЭСҚ) жүйесінде бұл-осылайша істеледі, өйткені құжатқа қолтаңба сол құжаттың өлшеміне байланыссыз салыстырмалы түрге ие, бірақ та электронды сандық қолтаңба жүйесінің әсерінің механизімінің түсуіне арнайылықты қажет етпейді. Қолтаңба құпия кілті мен h хэш-функция мәніне тәуелді болуы тиіс [1].

Келесі түрде *S* қолтаңбаның теңдігін тексеруге тырысып көрейік:

$$h = y^S (\mathrm{mod}\, P).$$

Егер құпия кілттің егесіне берілген h мәніне *S* қолтаңбасын есептеу мүмкін болатын болса, енді біз ЭСҚ жүйесін иемденген болатын едік. Осы формула бойынша бекітілген ашық кілтті қолдана отырып, әрбір адам қолтаңбаның әділділігін тексере алады. Алайда жалпы жағдайда құпия кілт егесі $h = y^S = \alpha^{xs} (\mathrm{modP})$ шартын қанағаттандыратын *S* мәнін есептей алмайды, себебі h хэш-функциясының мәнін α дәрежесі түрінде, дәлірек айтқанда $h = \alpha^W (\mathrm{mod}\, p)$ түрде көрсетуіміз қажет. Яғни қолтаңбаны есептеу үшін дискретті логарифм есебін шешкені жөн. Қолтаңбаны тексерудің басқа да теңдіктерін табу керек, мысалы, келесі түрде

$$\alpha = y^S (\mathrm{mod}\, P).$$

у ашық кілтін біле отырып екінші теңдікті қанағаттандыратын S мәнін есептеу қиын екендігі белгілі. Мұндай жағдайда х құпия кілттің егесі s қолтаңбасын оңай есептей алады, себебі ол $\alpha^h = y^S = \alpha^{xs} (\mathrm{mod}\, P)$ қатынасын қолдана алады, бұдан қолтаңбаны есептеудің теңдігі шығады [1]:

$$h = xs(\mathrm{mod}(\mathrm{p}-1)), s = h / x(\mathrm{mod}\, p-1).$$

Олай болса, *p*-1 модулі бойынша құпия кілттің кері мәнінің элементі көбейтуді қажет етеді. Егер *x* және *p*-1 өзара жай болса, онда ол бар және жалғыз. Құпия кілт көптеген тұтынушылардың ішінде ең болмағанда біреуіне белгілі болады. Электронды сандық қолтаңба жүйесі мұндай мүмкіндікті жібермеуі қажет. Алғашқы сәтсіздіктерге қарамай, біз өзімізге пайдалы фактілерді ұға аламыз: құжаттың хэш-функциясының мәнін мақсатты түрде α санының дәрежесі ретінде немесе осы дәреженің көп мүшесі ретінде қолдануға болады. Бұл құпия кілт бойынша қолтаңбаны есептеудің мүмкіншілігін ұсынады. Жұмыста қарастырылатын мәселе формаланған қолтаңба бойынша құпия кілтті есептеуді мүмкін емес ету. Бұл қасиеттерді қосымша ашық кілттерді қолдану арқылы қамтамасыз етуге тырысып көрейік, мына формула бойынша

$$r = \alpha^K (\mathrm{mod}\, p).$$

Мұнда к-кездейсоқ таңдалған сан. Енді бізде қосымша жаңа мүмкіншіліктерге сенім білдіретін параметрлер пайда болады. Енді қолтаңбаның тексерудің келесі теңдігін қарастырайық: $\alpha^h = y^s r (\mathrm{mod}\, p)$.

Қарастырылып отырған мысалда қолтаңба ретінде *(s, r)* сандарының жұбы алынады, яғни қолтаңба екі есе ұлғаяды, бірақта қолтаңбаны тексерудегі жасырын кілтті параметрлері мағынасына байланысты есептеу мүмкін емес. Алайда бір құжатқа қойылған қолтаңбаның екіншісі құжатқа көшіріліп алынбауы маңызды. Бірақтан бұл жасырын кілтті есептемей-ақ іске асуы мүмкін. Бұл сұрақтың талдауы оның дәлдігін айтады.

Мысалы: *h* хэш-функциясының мәніне сәйкес құжаттың *(s,r)* қолтаңбасы берілген. Енді хэш-функциясы h'-қа тең құжатты қарастырамыз және осыған сәйкестендіріп (s', r') қолтаңбасын құруға тырысамыз. Бізге $\alpha^{h'} = y^{s'} r' (\mathrm{mod}\, p)$ шарты орындалатындай s' және r' мәндерін таңдап алуымыз қажет. Соңғы өрнектің сол жағын былайша түрлендіруге болады: $\alpha^{h'} = \left(\alpha^{h}\right)^{h'/h} = \left(y^{s}r\right)^{h'/h} = \left(y^{s}\right)^{h'/h} r^{h'/h} = y^{sh'/h} r^{h'/h} \left(\mathrm{mod}\, p\right).$

Соңғы нәтежеден біз екінші құжаттың нақты қолтаңбасы ретінде $s' = sh'/h\left(\mathrm{mod}\left(p-1\right)\right)$ және $r' = r^{h'/h}\left(\mathrm{mod}\, p\right)$сандар жұбын алуға болатынына көз жеткіздік. Осылайша біз мынадай қорытындыға келеміз: қолтаңбаны тексерудің соңғы теңдеуі әліде де болса да жаңартуды қажет етеді, себебі қолтаңбаның бір үлгісінен басқа да құжаттарға дәл сол қолтаңбаның көшірмесін алу оңай, алайда егер бірінші қолтаңба қойылмаса оны есептеу өте күрделі. Келесі теңдеулерге $\alpha^{h} = \left(yr\right)^{s}\left(\mathrm{mod}\, p\right)$және $\left(\alpha r\right)^{h} = y^{s}\left(\mathrm{mod}\, p\right)$осыған ұқсас талдау жасаймыз, егер олардың құпия кілтті пайдалана отырып алынған бір дұрыс қолтаңбасы болса, жаңа қолтаңбаларды құру мүмкіндіктерінің бар екендігін байқаймыз.

Келесі қолтаңбаны тексеру мен құрудың теңдеулерін талдайық: $\alpha^{\mathrm{hr}} = y^{s} r\left(\mathrm{mod}\, p\right)$және $s = \left(hr-k\right)/x\left(\mathrm{mod}\, p-1\right).$

Қолтаңбаның дәл тұжырымдамасын жасау үшін p-1-ге өзара жәй кез-келген жасырын кілтті таңдау қажет. Берілген h хэш-функциясы үшін дискретті логарифмдеу мәселелерімен байланысты жасырын кілтті білмей тұрып қолтаңбаны есептеу күрделі тапсырма болып табылады.

Берілген теңдеулер жұбын электронды сандық қолтаңба жүйесі ретінде қолдануға мүмкіндік бар, бірақ та соңғының кемшіліктері жасырын кілтті таңдауға қойылатын шектеулердің (НОD(x, p-1)=1)болуы.

Жасырын кілтті таңдау шектеуін алып тастау үшін алдыңғы параметрлерден s және h-ты алмастыру арқылы алынған, ЭСҚ-ң басқа нұсқасын тексереміз: $\alpha^{\mathrm{sr}} = y^{h} r\left(\mathrm{mod}\, p\right)$ және $\mathrm{s} = \left(\mathrm{hx}+\mathrm{k}\right)/r\left(\mathrm{mod}\, p-1\right).$

Енді p-1 –мен өзара жәй r мәнін алу қажет. Бұл тексеруді жүргізбес бұрын үлкен бүтін дәрежелеу амалын орындап алу керек, ол p-1 мен өзара жай мәнді табуды қиындатады. Сонымен қатар, бұл өзара жәй болуға тексеру амалы әрбір хаттамаға қол қойғанда орындалуы керек (егер екі әртүрлі хабарламаларға қол қою үшін r-ң бір тек бір мәні қолданылса, онда қолтаңба қоюдың x және k белгісіздері бар екі әртүрлі теңдеулерді құруға болады).

Осы айтарлықтай кемшіліктермен келісуге болар еді, алайда біздің алға қойған мақсатымыз жасырын кілтті білмей-ақ дұрыс қолтаңбаны басқа да құжаттарға көшіру болып табылады. Шынында да айталық h оның хэш-функциясы болсын. Қалауымызша алынған k-ны таңдайық және $r=\alpha^{k}y^{-h}(mod\ p)$ мәнін есептейік.

Егер НОD(r,p-1)>1 болса, онда басқа k-ны таңдаймыз және есептеуді НОD(r,p-1)=1 болғанға дейін қайталаймыз. Осыдан кейін s қолтаңбасын s=k/r(mod p-1) формуласымен есептейміз. Алынған (s,r) мағынасы қолтаңбаны тексеру теңдеуін қанағаттандыратынын оңай тексеруге болады.

Қолтаңбаны тексеру теңдеуі $\alpha^{hr}=y^{s}r(mod\ \ p)$ болатын электронды сандық қолтаңба жүйесінде қалауымызша алынған S үшін құпия кілтті білмей-ақ (r,s) дұрыс болатындай етіп хэш-функцияны былайша құрылымдауға болады: $h=k/r$.

Егер хэш-функциясының орнына хабарламаның m мәні алынса (мұндағы, $m<p$), онда соңғы келтірілген мысалда m кездейсоқ хабарламасын көшіруге және оған қолтаңба алуға болар еді. Тек кейбір жағдайлара ғана электронды сандық қолтаңбаны қолданудың мұндай жағдайы қолайсыздық тудырады. Кез келген өлшемді хабарламаларың хэш-функцияларының мәнін пайдалану электронды сандық қолтаңба мәселесін жасырын кілттің мағынысын білмей-ақ қандай да бір кездейсоқ h мәнін табуға және оған сәйкес (r,s) қолтаңбаны табуға мүмкіндік береді. Электронды сандық қолтаңбаның берік болып саналатын көптеген нұсқалары осы ерекшелікке ие.

r мәнін s дәрежеге шығара отырып, терік электронды сандық қолтаңбаның түрлі нұсқаларын алуға болады. Олардың кейбіреулері қолтаңбаны тексеру мен есептеудің сәйкесті келесі теңдеулерімен берілген:

$\alpha^{\mathrm{h}} = y^{s} r^{\mathrm{r}}$ (mod p) және $s=(h-kr)/x$ (mod p-1)

$\alpha^{\mathrm{h}} = y^{\mathrm{r}} r^{s}\left(\mathrm{mod}\, p\right)$ және $s=(h-xr)/k$ (mod p-1)

$\alpha^{\mathrm{s}} = y^{\mathrm{r}} r^{h}$ (mod p) және $s=xr+kh$ (mod p-1)

$\alpha^{\mathrm{r}} = y^{h} r^{s}$ (mod p) және $(s=r-xh)/k$ (mod p-1)

$$\alpha^{r} = y^{s} r^{h} \text{ (mod } p \text{) және } s=(r-kh)/x \text{ (mod } p\text{-1)}$$

Қолтаңбаны табудағы $s=xr+kh(\mathrm{mod}p-1)$ теңдеуімен берілген электронды сандық қолтаңба қызығушылық тудырады, мұнда бөлу амалы орындалмайды, яғни p-1 модуліне өзара қарапайым мәнді табуды талап етпейді. Бірінші және бесінші электронды сандық қолтаңба жүйесіндегі жасырын кілтті p-1-ге өзара қарапайым етіп таңдау қажет. Екінші және төртінші электронды сандық қолтаңба жүйесінде жасырын кілтті табуға еш шек қойылмайды, тек әр жаңа хабарламаға қолтаңба қою үшін mod (k,p-1)=1тексеру қажет. Онда k-ға кері сан бар және табылады, осыдан кейін s–ны табуға мүмкіндік болады [2].

Электронды сандық қолтаңбаның жоғарыда көрсетілген барлық бес нұсқасында жасырын кілттің мағынасын білмей-ақ *(r,s) h* қолтаңбасына сәйкес келетіндей үш санды *h, r* және *s*-ті табуға болатындығын байқадық. Алайда жағдайды алдын ала берілген *h*–тың мәніне сәйкес келетін *(r,s)* қолтаңбасының табылуы есептеу тұрғысынан алғанда күрделі екендігі құтқарады. Егер тәртіп бұзушы қолтаңба қойылған *h* хэш-функциясын көрсетсе, онда тексеруші онымен қатар кезекті қолтаңба қойылған хабарламаны сұрайды. Ал хэш-функциясы алдын ала берілген кездейсоқ мәнге тең хабарламаны табу берік хэш-функцияны қолданғанда есептеу тұрғысынан алғанда орындалмайтын тапсырма.

Жоғарыда көрсетілген әрбір теңдеулер жұбының жасырын кілтті білместен қолтаңбаны алудағы қиындығы дискретті логарифмнің тапсырмасының деңгейіндегідей қиын. Теңдеулердің екінші жұбы электронды сандық қолтаңбаның Эль-Гамаль жүйесін сипаттайды, ол дискретті логарифм тапсырмасына негізделген қазіргі электронды сандық қолтаңба нұсқасының тек жеке бөлігін бейнелейді.

Ескере кететін жағдай *r* дәрежесінің орнына *F(r)*-ді қолдануға болады, мұндағы *F(r) r*-ден қалауымызша алынған функция. Мысалы мынадай теңдеулер жұптарын пайдалануға болады:

$$\alpha^{h} = y^{F(r)} r^{s} \text{ (mod } p\text{)} \quad \text{және} \quad s= (h-xF(r))/k \text{ (mod } p\text{-1)},$$

$$\alpha^{F(r)} = y^{h} r^{s} \text{ (mod } p\text{)} \quad \text{және} \quad s= (F(r)-xh)/k \text{ (mod } p\text{-1)}$$

Алайда бұл электронды сандық қолтаңба жүйесінде көрсетілген ескертуді алып тастамайды. Кемшіліктерді жою тек *h* және *r* екі аргументтен тұратын *F'(r,h)*- берік хэш-функциясын дәреже ретінде қолданғанда ғана орындалады. Бұл жаңарту *F* және F'функцияларын есептеуді талап ететін қосымша процедуралар енгізеді, ал ол өз кезегінде қолтаңба қоюды және қолтаңбаны тексеруді қиындатады. Аталған кемшіліктерді жою үшін h-ң ағымдағы мәнін *F* және F' немесе $F''(h)$ функцияларымен бірге екі функцияның дәрежелері ретінде қолдану керек.

$F''(h)$ мәнін ғана дәреже ретінде (не деңгей көпмүшесі ретінде) қолдана отырып қандай да бір анықталған тұжырымға келуге болады. *Мысалы:* F',$F''(h)$ және *s*-ді сәйкесінше таңдау қолтаңба тексеруінің теңдеуін қанағаттандыруы мүмкін. Алайда берік біржақты функцияны қолдану арқылы бұл жағдайда $F''(h)$ -ң керекті мәнін беретін *h*-ты мәнін табу мүмкін емес. Егер қолтаңбаны тексеру теңдеуі m хабарламаның мағынасы тікелей енсе, онда m мәнінің орнына $F''(m)$ мәнін қоюға болар еді. Басынан бастап *m* хабарламасының *h(m)* берік хэш - функциясын қолданғанда $F''(h)$ функциясы айтарлықтай өзгерістер әкелмейді, себебі *h,s,r* кездейсоқ таңдалған мәндер қолтаңбаны тексеру теңдеуін қанағаттандырады, ал қолтаңба қойылған қандайда бір хабарламаны есептеудің практикалық тұрғыда шешімі жоқ. Сондықтан да *h(m)*-ді $F''(h(m))$ ауыстыру белгілі мағынадағы берілген құжаттың хэштеу алгоритмінің қарапайым өзгерісіне эквивалентті, яғни бұл қолтаңбаны құру мен тексеру теңдеуінің қасиеттеріне әсер етпейді. Ескере кететін жағдай *F*, F' және F'' функцияларын жеке-жеке немесе автоматты түрде барлығын бірдей енгізу электронды сандық қолтаңба жүйесінің барлық әлсіз жақтарын алып тастауға мүмкіндік бермейді. Оларды еңгізгеннен кейін электронды сандық қолтаңба жүйесінде соған сәйкес қайтадан талдау жасау қажет[2].

Мысалы: $\alpha^{sF(r,h)} = y^{h} r \text{ (mod } p\text{)}$ қолтаңбаны тексеру теңдеуі әлсіз электронды сандық қолтаңбаға сәйкес келсін. Жасырын кілттің мәнін білмей-ақ қалай жалған қол қоюға болатындығын көрсетеміз. Қандай да бір құжатты аламыз және оның *h* хэш-функциясын табамыз. Ары қарай мынадай алгоритм бойынша әрекет етеміз:

1. z<p-1 болатындай қандай да бір z параметрін таңдаймыз.

2. $r = \alpha^{z} y^{-h}$ және *F(r,h)* мәндерін есептейміз.

3. Егер НОД(*F(r,h)*,*p*-1)>1 болса, онда бірінші және екінші қадамды НОД *(F(r,h)*,*p*-1)=1 болғанға дейін қайталау.

4. *S = Z/F(r,h)* есептеу.

5. *h* хэш-функциясының қолтаңбасы ретінде *(r,s)* жұбын ұсынамыз. Қолтаңбаны тексеру теңдеуінің сол жағына *s=z/F(r,h)* мәнін, ал оң жағына $r=\alpha^{z}y^{-h}$ мәнін қоя отырып, $\alpha^{z}=y^{h}\alpha^{z}y^{-h}$ (mod *p*) орындалатынын көрсету оңай.

Дискретті логарифмге негізделген электронды сандық қолтаңбалардың жоғарыда қарастырылған берік нұсқаларынан басқа көптеген нұсқалары бар. Практикалық тұрғыда қолдануға олардың арасынан қолтаңбаларды құру мен тексеруде азырақ еңбек шығынын қажет ететін, алайда беріктілігі дискретті логарифмдеу есептерінен кем еместерін ұсынуға болады [3]. Ескере кететін жағдай қолтаңбаны құру мен тексеру теңдеулері түрлі формаларда берілуі мүмкін. Мысалы, төмендегі 1- кестедегідей:

Кесте 1 - ЭСҚ жүйелерінің берілу нұсқалары

Қолтаңбаны тексеру теңдеулері	*p*-1 модулі бойынша (мұндағы α - mod *p* бойынша *алғашқы түбір*)	*q* модулі бойынша (мұндағы α - mod *p* бойынша *q* көрсеткішіне жататын сан
$\alpha^{a}=y^{b}r^{c}$ (mod *p*)	$a=bx+ck$ (mod *p*-1)	$a=bx+ck$ mod *q*
$y^{a}=\alpha^{b}r^{c}$ (mod *p*)	$ax=b+ck$ (mod *p*-1)	$ax=b+ck$ mod *q*
$r^{a}=\alpha^{b}y^{c}$ (mod *p*)	$ak=b+cx$ (mod *p*-1)	$ak=b+cx$ mod *q*
$r^{a}\alpha^{b}=y^{c}$ (mod *p*)	$ak+b=cx$ (mod *p*-1)	$ak+b=cx$ mod *q*
$r^{a}\alpha^{b}y^{c}$=1(mod *p*)	$ak+b+ck=1$ (mod *p*-1)	$ak+b+ck=1$ mod *q*

Қолтаңбаны тексеру теңдеуі екі нұсқамен берілуі мүмкін: *p*-1 модулі бойынша немесе *p*-1-дің бөлгіші болып табылатын және өлшемі 160 не одан да биттен тұратын қандай да бір *q* санының модулі бойынша. *p*-1 санының кез келген бөлгіші жәй *p* модулі бойынша көрсеткіш болып табылатыны белгілі. Кез келген көрсеткіш үшін *p*-1-ден артпайтын β табылады және ол үшін мына шарттар орынды екені белгілі: 1) $\beta^{q}=1(\mod p)$және 2) $\beta,\beta^{1},\beta,...,\beta^{q}$ сандары өзара *p* модулі бойынша салыстырылмайды. Бұл шарттар өлшемі бойынша р-дан кіші *q* модулі бойынша қолтаңбаны құру теңдеуін қолдану мүмкіндігін береді. Бұдан *s*<*q* мәнін алуға болады. Құпия кілтсіз қолтаңбаны құру *p* модулі бойынша дискретті логарифм есебін шешуді талап етеді, яғни *s* өлшемін бұлай қысқарту ЭСҚ жүйесінің беріктігін төмендетпейді.

Осылайша *p*-1 санының бөлгіші модулі арқылы қолтаңбаны есептеу теңдеуін қолдану қолтаңбаның бір параметрінің, атап айтқанда, *s* мәнінің ұзындығын қысқартуға мүмкіндік береді. Мұнда *p* жәй модулінің ұзындығына тәуелсіз, соңғысын әрқашан *q* ұзындығы 160-256 биттен артпайтындай етіп таңдап алуға болады. Бұл *(s,r)* қолтаңбасының ұзындығын қолтаңба теңдеуін *p*-1 модулі бойынша есептеуге қарағанда екі есеге дейін қысқартуға мүмкіндік береді. Шынында да *r (r<p)* мағынасының ұзындығы *p* –ға тең, ол жоғарғы беріктікті қамтамасыз ету тұрғысынан алғанда 1000 немесе одан жоғары бит. *p* модулінің көрсетілген ұзындығында *q-ң* 160-биттік көрсеткішін қолданғанда қолтаңба ұзындығы 1.7 есе қысқарады. Мұнда сонымен қатар ЭСҚ беріктігін арттыру мақсатында р модулі өлшемін *q-ң* өлшемін сақтай отырып үлкейтуге болады. ЭСҚ беріктігі *p* жәй санының ұзындығымен ғана және қолтаңбаны тексеру теңдеуінің дұрыс таңдалуымен ғана анықталатын болады.

q модулі бойынша қолтаңбаны есептеу нұсқасын таңдағанда біз α саны ретінде р модулі бойынша *q* көрсеткішіне қатысты қандай да бір санды таңдаймыз. Яғни, α^{q}=1(mod *p*) қатысы орындалатын сан таңдалады.

Кесте 2 - Қолтаңбаның қысқартылған ұзындықтағы ЭСҚ жүйелері, мұндағы $r'=r$ (mod *q*) және α^{q}=1 (mod *p*) [3].

$r'k=s+hx$ (mod *q*)	$r^{r'}=\alpha^{s}y^{h}$ (mod *p*)
$r'k=h+sx$ (mod *q*)	$r^{r'}=\alpha^{h}y^{s}$ (mod *p*)
$sk=r'+hx$ (mod *q*)	$r^{s}=\alpha^{r'}y^{h}$ (mod *p*)
$sk=h+r'x$ (mod *q*)	$r^{s}=\alpha^{h}y^{r'}$ (mod *p*)
$hk=s+r'x$ (mod *q*)	$r^{h}=\alpha^{s}y^{r'}$ (mod *p*)
$hk=r'+sx$ (mod *q*)	$r^{h}=a^{r'}y^{s}$ (mod *p*)

2 - кестеде келтірілген ЭСҚ жүйелерінде r' ретінде r-ден алынған қандай да бір F хэш-функциясын алуға болады, яғни $r' = F(r)$. Сонымен қатар қолтаңбаның екінші параметрі r-ді қысқарту мүмкіндігі бар. Мұндай мүмкіндік егер қолтаңбаны тексеру теңдеуінің оң және сол жақтары p модулі бойынша салыстырылса, онда оның сол және оң жақтарын p-ға бөлгендегі қалдықтары кез келген модуль бойынша салыстырылады. Оны былайша жүзеге асыруға болады. $\mathrm{R}^{a} = \alpha^{b} y^{c}$ (mod p) типті қолтаңбаны тексеру теңдеуі таңдалады және оны эквивалентті етіп мына түрге түрлендіреміз: $R \equiv \alpha^{u} y^{v}$ (mod p), яғни (R mod p)=($\alpha^{u} y^{v}$ mod p), мұндағы $u = ba^{-1}$ (mod q), $v = ca^{-1}$ (mod q), ал R кездейсоқ таңдалған k саны арқылы құрылады, k саны $\mathrm{R} = \alpha^{\mathrm{k}}$ mod p формуласына сәйкес келетін бір ретті құпия кілт. Осыдан кейін тексеру теңдеуін мына түрде түрлендіреміз:

(R mod p)=($\alpha^{u} y^{v}$ mod p) mod q, яғни ((R mod p) mod q)=(($\alpha^{u} y^{v}$ mod p) mod q).

Соңғы формулада u және υ сандар жұбының сәйкесті қолтаңба қойылатын h құжаты мен (r,s) қолтаңбасына тәуелділігін көрсету керек, мұнда $r=((R$ mod $p)$ mod $q)$. Енді қолтаңбаның екі элементі де (яғни r және s) q-дан аспайтын мәнге ие. Қолтаңба ұзындығы 4-6 есе азайды (q және p модульдерінің ұзындығына байланысты).

r параметрінің орнына $r=F(R$ mod $p)$ хэш-функциясының мәнін алуға болады. Бұл жағдайда қолтаңбаны тексеру теңдеуі келесі түрге келтіріледі:r=F($\alpha^{u} y^{v}$ mod p).

Соңғы теңдеуде u және v сандар жұбының h және $r=F(R$ mod $p)$ тәуелді екендігін байқаймыз. Кесте 1.3-де u және υ параметрлерін h, r және s арқылы көрсетудің мүмкін болатын нұсқалары келтірілген. Ескере кететін жағдай бұл нұсқаларда h, r және s сандарына кері мәндерді іздеу қажеттілігі жоқ, себебі қолтаңбаны құру өрнегі жәй q санының модулі бойынша жазылған. Бұл q модуліне көшудің тағы да бір жетістігін көрсетеді.

Кесте 3 - ЭСҚ-н *(r,s)* қысқартылған қолтаңбасымен берілу нұсқалары

u параметрі	v параметрі
$r^{-1} s$ mod q	$r^{-1} h$ mod q
$r^{-1} h^{-1}$ s mod q	$h^{-1} r^{-1}$ mod q
$r^{-1} s$ mod q	$h^{-1} r^{-1}$ mod q
$h^{-1} s$ mod q	$h^{-1} r^{-1}$ mod q
$h^{-1} r$ mod q	$h^{-1} s^{-1}$ mod q

Дискретті логарифмдеу есептерінің күрделілігіне негізделген ЭСҚ жетістіктерінің негізгілерінің бірі олардың салыстырмалы түрде кіші өлшемді қолтаңбаны құрудың нұсқаларын жасауға мүмкіндік беретіндігі болып табылады.

Әдебиеттер:

1. Рябко Б.Я., Фионов А.Н. Криптографические методы защиты информации.- Москва: Горячая линия-Телеком, 2005. - 41 с.

2. Иванов М.А. Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях.- Москва: Кудиц-Образ, 2001. - 368 с.

3. Молдовян Н.А., Молдовян А.А. Введение в криптосистемы с открытым ключом. -Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2006. - 107 с.

Түйіндеме

Құжаттың хэш-функциясының мәнін α санының дәрежесі немесе сол дәреженің көбейткіші ретінде қолданған ыңғайлы болар еді. Бұл қолтаңбаны белгілі құпия кілт арқылы есептеуге мүмкіндік береді. Біздің мақсатымыз құрылған қолтаңба бойынша құпия кілтті табуға мүмкіндік бермеу. Бұл қасиеттің орындалуы үшін қосымша ашық кілт енгіземіз.

Кілт сөздер: сандық қолтаңба, дискретті логарифмдеу, криптожүйелер, құпия кілт, хэш-функция.

Резюме

В статье предлагается значение хэш-функции документа целесообразно использовать как степень числа α или множитель этой степени. Это предоставит возможность вычисления подписи по известному секретному ключу. Наша задача состоит в том, чтобы сделать вычислительно невозможным нахождение секретного ключа по сформированной подписи. Делается попытка обеспечить это свойство путем использования разового дополнительного открытого ключа.
Ключевые слова: цифровая подпись, дискретный логарифм, криптосистема, секретный ключ, хэш-функция.

Summary

The hash value is used as the document number or ratio of this degree. This will provide the ability to calculate a signature for a given private key. Our challenge is to make it impossible to find the secret key upon the generated signature. We will try to provide this property through the use of one-time additional public key.
Key words: Digital signature, discrete logarithm, cryptosystem, secret key, hash function.

ӘОЖ 517.988.68

КӨП ӨЛШЕМДІ КЕРІ ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ ШЕКТЕУЛІ – АЙЫРЫМДЫҚ ӘДІСІ

Г.Б. БАКАНОВ, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор,
Р.М.ЖОЛАМАНОВА
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Келесі кері есептің дискретті аналогы қарастырылады:

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^m}{\partial y^2} - q(x,y)u^m, \quad x \in R, \qquad y \in R, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u^m(x,y,0) = 0, \qquad \frac{\partial u^m}{\partial t}(x,y,0) = \delta(x)e^{imy}, \ x \in R, \qquad y \in R, \tag{2}$$

$$u^m(0,y,t) = f^m(y,t), \qquad \frac{\partial u^m}{\partial x}(0,y,t) = 0, \qquad y \in R, \quad t > 0. \tag{3}$$

қатынастарын қанағаттандыратын $q(x,y)$ функциясын табу керек. Мұндағы $f^m(y,t) \in L_2(D \times [0,T])$, $D = \{y: y \in R\}$, $m-$ бүтін сан. $q(x,y)$ функциясы барлық айнымалылар бойынша жұп функция, ал $u^m(x,y,t)$ және $q(x,y)$ функциялары y айнымалысы бойынша периоды 2π-ге тең периодты функциялар.

(1)-(2) Коши есебінің жалпылама шешімі келесі түрде анықталады [1]:

$$u^m(x,y,t) = \frac{1}{2}e^{imy}\theta(t-|x|) + \tilde{u}^{\,m}(x,y,t),$$

$$u^m(x,y,t) \equiv 0, \ \ t < |x|.$$

Барлық $t \le 0$ үшін $u^m\ (x,y,t)$ және $f^m(y,t)$ функцияларын келесі түрде анықтаймыз:

$$\bar{u}^m(x,y,t) = \begin{cases} u^m(x,y,t), & t > 0, \\ -u^m(x,y,-t), & t \le 0. \end{cases}$$

$$\bar{f}^m(y,t) = \begin{cases} f^m(y,t), & t > 0, \\ -f^m(y,-t), & t \le 0. \end{cases}$$

Сонда

$$\bar{f}^m(y,t) = \tilde{f}^m(y,t) + \tfrac{1}{2}e^{imy}[\theta(t) - \theta(-t)], \ \text{мұндағы} \ \tilde{f}^m(y,0) = 0.$$

Келесі функцияны енгізейік: $U^m(x,y,t) = \frac{\partial \bar{u}^m}{\partial t}$.

Сонда $q(x,y)$ және $U^m(x,y,t)$ функциялары үшін келесі кері есепті аламыз:

$$\frac{\partial^2 U^m}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U^m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U^m}{\partial y^2}-q(x,y)U^m, \qquad x\in R, \qquad y\in R, \quad t>0, \tag{4}$$

$$U^m(x,y,0)=\delta(x)e^{imy}, \quad \frac{\partial \bar{u}^m}{\partial t}(x,y,0)=0, \ x\in R, \ y\in R, \tag{5}$$

$$U^m(0,y,t)=\frac{\partial \bar{f}^m}{\partial t}(y,t), \frac{\partial \bar{u}^m}{\partial x}(0,y,t)=0, \ y\in R, \quad t\geq 0 \tag{6}$$

қатынастарын қанағаттандыратын $q(x,y)$ функциясын табу керек.

(4)-(5) Коши есебінің жалпылама шешімі келесі түрде анықталады [1] :

$$U^m(x,y,t)=\frac{1}{2}e^{imy}[\delta(x+t)+\delta(x-t)]+\widetilde{U}^m(x,y,t)$$

және

$$U^m(x,y,t)\equiv 0, \qquad 0<t<|x|.$$

Олай болса, (4)-(6) кері есебі келесі кері есепке келтіріледі:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}^m}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \widetilde{U}^m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \widetilde{U}^m}{\partial y^2}+\frac{1}{2}[\delta(x+t)+\delta(x-t)]\left[\frac{\partial}{\partial y^2}\left(e^{imy}\right)-e^{imy}q(x,y)\right]-q(x,y)\widetilde{U}^m(x,y,t),$$

$$x\in R, \qquad y\in R, \quad t>0, \tag{7}$$

$$\widetilde{U}^m(x,y,0)=0, \qquad \frac{\partial \widetilde{U}^m}{\partial t}(x,y,0)=0, \qquad x\in R, \qquad y\in R, \tag{8}$$

$$\widetilde{U}^m(0,y,t)=\frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial t}(y,t), \qquad \frac{\partial \widetilde{U}^m}{\partial x}(0,y,t)=0, \qquad y\in R, \ t\geq 0 \tag{9}$$

қатынастарын қанағаттандыратын $q(x,y)$ функциясын табу керек.

Айталық, T −белгілі оң сан, $N, N_1>3$ −натурал сандар, $h=T/N, \quad h_1=\pi/N_1$ болсын. Келесі белгілеулерді енгізейік [2]:

$$\tilde{v}_{i,j}^k=\tilde{v}(ih,jh_1,kh), \quad \tilde{q}_{i,j}=\tilde{q}(ih,jh_1), \quad f_j^k=f(jh_1,kh),$$

$\tilde{v}_x=\frac{\tilde{v}_{i+1,j}^k-\tilde{v}_{i,j}^k}{h}, \qquad \tilde{v}_{\bar{t}}=\frac{\tilde{v}_{i,j}^k-\tilde{v}_{i,j}^{k-1}}{h}, \qquad \tilde{v}_{y\bar{y}}=\frac{\tilde{v}_{i,j+1}^k-2\tilde{v}_{i,j}^k+\tilde{v}_{i,j-1}^k}{h_1^2}$ т.с.с.

Айталық $\quad (\tilde{f}_j^k)_{\substack{0\\t}}^m=\ (f_j^k)_{\substack{0\\t}}^m-\delta_k^h e^{imjh_1}$

болсын, мұндағы

$$(f_j^k)_{\substack{0\\t}}^m=\begin{cases}1/h, & k=0,\\ 0, & k=\pm 1,\\ \dfrac{f_j^{|k|+1}-f_j^{|k|-1}}{2h}, & k=\pm 2,\pm 3,\dots,\end{cases}$$

ал δ_k^h − Дирак дельта функциясының дискретті аналогы:

$$\delta_k^h=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, k=0,\\ 0, k\neq 0.\end{cases}$$

Енді (7)-(9) кері есебінің дискретті аналогын қарастырайық [3]:

$$\tilde{v}_{t\bar{t}}^{\,m}=\tilde{v}_{x\bar{x}}^{\,m}+\tilde{v}_{y\bar{y}}^{\,m}+\frac{1}{2}\left[\delta_{i+k}^h+\delta_{i-k}^h\right]\left[\left(e^{imjh_1}\right)_{y\bar{y}}-e^{imjh_1}\tilde{q}_{i,j}\right]-\tilde{q}_{i,j}(\tilde{v}_{i,j}^k)^m,$$

$$i\in Z, \ k\geq 1, \ j,m=\overline{1,2N_1}, \tag{10}$$

$$(\tilde{v}_{i,j}^0)^m=0, \ (\tilde{v}_{i,j}^1)^m=0, \quad i\in Z, \quad j,m=\overline{1,2N_1}, \tag{11}$$

$$(\tilde{v}_{0,j}^0)^m=0, \ (\tilde{v}_{0,j}^1)^m=0, \quad (\tilde{v}_{0,j}^k)^m=(\tilde{f}_j^k)_{\substack{0\\t}}^m, \ k>1, \ j,m=\overline{1,2N_1}. \tag{12}$$

қатынастарын қанағаттандыратын $\tilde{q}_{i,j}$ торлық функциясын табу керек. Мұндағы Z−бүтін сандар жиыны.

Айталық $\tilde{q}_{i,j}$, $\tilde{v}_{i,j}^k$ торлық функцияларын j айнымалысы бойынша $2N_1$ периодты функциялар деп жориық.

Айталық, g_j −торлық функциясы барлық $j=\overline{1,2N_1}$ үшін анықталған болсын. Осы функцияны

$$g_j=\sum_{n=1}^{2N_1} g_{(n)}e^{injh_1}$$

түрінде жазайық, мұндағы $g_{(n)}$ - Фурье коэффициенттері келесі формула бойынша анықталады:

$$g_{(n)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2N_1} h_1 e^{-injh_1} g_j.$$

Лемма 1. Келесі формула орындалады:

$$h_1 \sum_{j=1}^{2N_1} e^{ijh_1(m-n)} = \begin{cases} 0, & \text{егер } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{егер } m = n. \end{cases} \qquad (13)$$

Лемма 2. Келесі формула орындалады:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2N_1} h_1 e^{-injh_1} \tilde{v}_{\ y\bar{y}} = -\lambda_n \tilde{v}_{(n)}, \qquad (14)$$

мұндағы

$$\lambda_n = \left[\frac{2}{h_1}\sin\left(\frac{nh_1}{2}\right)\right]^2.$$

Енді j айнымалысы бойынша Фурье қатарына жіктелуін қолдана отырып және (13),(14) формулаларын ескере отырып, (10)-(12) қатынастарынан

$$\left[\tilde{v}_{(n)i}^k\right]_{t\bar{t}}^m = \left[\tilde{v}_{(n)i}^k\right]_{x\bar{x}}^m - \lambda_n\left[\tilde{v}_{(n)i}^k\right]^m - \frac{1}{2}\left[\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h\right]\left[\lambda_m\delta_{mn} + \tilde{q}_{(n-m)i}\right] - \sum_{p=1}^{n}\left[\tilde{v}_{(p)\ i}^k\right]^m \tilde{q}_{(n-p)i},$$

$$i \in Z, \qquad k \geq 1, \qquad m,n = \overline{1,2N_1}, \qquad (15)$$

$$\left[\tilde{v}_{(n)i}^0\right]^m = 0, \qquad \left[\tilde{v}_{(n)i}^1\right]^m = 0, \quad i \in Z, \qquad m,n = \overline{1,2N_1}, \qquad (16)$$

$$\left[\tilde{v}_{(n)0}^0\right]^m = 0, \qquad \left[\tilde{v}_{(n)0}^1\right]^m = 0, \qquad \left[\tilde{v}_{(n)0}^k\right]^m = \left[\tilde{f}_{(n)}^k\right]_{\substack{0\\t}}^m, \qquad k > 1, \qquad n,m = \overline{1,2N_1}, \qquad (17)$$

мұндағы

$$\left[\tilde{f}_{(n)}^k\right]_{\substack{0\\t}}^m = \left[f_{(n)}^k\right]_{\substack{0\\t}}^m - \delta_k^h\delta_{mn},$$

$$\tilde{q}_{(n-m)i} = 0$$

$m > n$, ал δ_{mn} − Кронеккер символы.

Егер $\tilde{V}, Q, \tilde{F}, O, E - 2N_1$ өлшемді квадраттық матрицалар болса, онда дискретті (15)-(17) кері есебі келесі бір өлшемді дискретті кері есептер жүйесіне келтіріледі:

$$\left[\tilde{V}_i^k\right]_{t\bar{t}} = \left[\tilde{V}_i^k\right]_{x\bar{x}} - Q_i\tilde{V}_i^k - \frac{1}{2}\left[\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h\right]Q_i, \qquad k \geq 1, \qquad i \in Z, \qquad (18)$$

$$\tilde{V}_i^0 = 0, \qquad \tilde{V}_i^1 = 0, \qquad i \in Z, \qquad (19)$$

$$\tilde{V}_0^0 = 0, \qquad \tilde{V}_0^1 = 0, \quad \tilde{V}_0^k = \tilde{F}_{\substack{0\\t}}^k, \quad k > 1 \qquad (20)$$

қатынастарынан Q_i функциясын табу керек.

Мұндағы $\tilde{F}_{\substack{0\\t}}^k = F_{\substack{0\\t}}^k - \delta_k^h E$, E −бірлік матрица, 0 −нольдік матрица.

Теорема 1. Айталық, (18)-(20) дискретті кері есебінің шешімі бар деп жориық. Сонда әрбір $i = \overline{2,N}$ үшін келесі

$$\widetilde{W}_i^k + h\sum_{j=1}^{i-1}\left[\tilde{F}_{\substack{0\\t}}^{k-j} + \tilde{F}_{\substack{0\\t}}^{k+j}\right]\widetilde{W}_i^j + h\tilde{F}_{\substack{0\\t}}^k\widetilde{W}_i^0 = -\frac{1}{2}\left[\tilde{F}_{\substack{0\\t}}^{k-i} + \tilde{F}_{\substack{0\\t}}^{k+i}\right], \qquad 0 \leq k < i, \qquad i = \overline{2,N}.$$

теңдеулер жүйесі бірмәнді шешіледі.

Теорема 2. Егер әрбір $i = 2,3,\dots,N$ үшін

$$\widetilde{W}_i^k + h\sum_{j=-i+1}^{i-1}\widetilde{W}_i^j\,\tilde{F}_{\substack{0\\t}}^{k-j} = -\frac{1}{2}\left[\tilde{F}_{\substack{0\\t}}^{k-i} + \tilde{F}_{\substack{0\\t}}^{k+i}\right], \qquad 0 \leq |k| < i$$

теңдеулер жүйесі $\widetilde{W}_i^k$ функциясына байланысты бірмәнді шешілетін болса, онда (18)-(20) дискретті кері есебінің жалғыз шешімі бар болады.

Әдебиеттер:

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264 с.
2. Кабанихин С.И. Проекционно – разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений.-Новосибирск: Наука, 1988. -167с
3. Кабанихин С.И., Баканов Г.Б. Дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана // Докл.РАН – 1997.-Т. 356. - №2. – С. 157-160.
4. Баканов Г.Б. Методы решения конечно – разностных обратных задач теории распространения волн. –Кызылорда: КГУ, 2001.-128с.

Түйіндеме

Жұмыста гиперболалық теңдеу үшін қойылған көп өлшемді кері есептің дискретті аналогы қарастырылады. Гельфанд – Левитан әдісінің негізінде шектеулі – айырымдық кері есептің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Кілт сөздер: кері есеп, Гельфанд – Левитан әдісі, қажетті және жеткілікті шарттары.

Резюме

В работе рассматривается дискретный аналог многомерной обратной задачи для гиперболического уравнения. На основе метода Гельфанда – Левитана получены необходимые и достаточные условия существования решения дискретной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, метод Гельфанда – Левитана, необходимые и достаточные условия.

Summary

We consider the discrete analogy of multi – dimensional inverse problem for hyperbolic equation. On the basic of the Gelfand – Levitan method we have obtained the necessary and sufficient condition for solutions of discrete inverse problem.

Key words: inverse problem, the Gelfand – Levitan method, the necessary and sufficient condition.

УДК 519.624

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Э.А. БАКИРОВА, кандидат физико-математических наук, доцент,
Ж.М. КАДИРБАЕВА, кандидат физико-математических наук
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы,
Республика Казахстан

На отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная периодическая краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + K(t)x(\theta_1) + f(t), \quad t \in [0,T] \setminus \{\theta_1\}, \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to \theta_2 - 0} x(t) - \lim_{t \to \theta_2 + 0} x(t) = \varphi, \qquad \varphi \in R^n, \tag{2}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3}$$

где матрицы $A(t)$, $K(t)$ и вектор-функция $f(t)$ кусочно-непрерывны на $[0,T]$, с разрывом первого рода в точке $t=\theta_2$, $\|x\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|x_i|$, $\|A(t)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|\le\alpha,\ \|K(t)\|\le\beta,\quad \alpha,\beta-const.$

Решением задачи (1)-(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x(t)$, которая удовлетворяет нагруженному дифференциальному уравнению (1) на $[0,T]$, кроме точки $t=\theta_2$, условию импульсного воздействия (2) и периодическому краевому условию (3).

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями возникают при математическом моделировании реальных процессов механики, химии, физики, техники, биологии и встречаются во многих задачах прикладного направления.

Различные задачи для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, методы их решений и другие вопросы теории импульсных систем рассматривались в работах [1-5]. В работе [6] для исследования и решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений предложен метод параметризации, позволяющий получить условия разрешимости в терминах исходных данных и построить алгоритмы нахождения ее решения.

В работе [7] метод параметризации был распространен на двухточечные краевые задачи для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Получен коэффициентный критерий однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. Этот метод в [8] также был применен к краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений.

В данной работе метод параметризации применяется к краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и предлагается алгоритм нахождения ее решения.

Пусть $h_r=\theta_r-\theta_{r-1}$. Учитывая точку нагрузки θ_1 и точку импульса θ_2 промежуток $(0,T)$ разделим на три части: $(0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{3}(t_{r-1},t_r)$, где $t_0=\theta_0=0$, $t_1=\theta_1$, $t_2=\theta_2$, $t_3=\theta_3=T$. Сужение функций $x(t)$ на r-й интервал (t_{r-1},t_r) обозначив через $x_r(t)$, введя дополнительные параметры $\lambda_r=x_r(t_{r-1})$ и на каждом $r-$ом интервале произведя замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$ получим трехточечную краевую задачу с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)u_r(t)+A(t)\lambda_r+K(t)\lambda_2+f(t),\qquad t\in(t_{r-1},t_r),\tag{4}$$

$$u_r(t_{r-1})=0,\qquad r=\overline{1,3}\tag{5}$$

$$\lambda_1+\lim_{t\to\theta_1-0}u_1(t)=\lambda_2\ ,\tag{6}$$

$$\lambda_2+\lim_{t\to\theta_2-0}u_2(t)-\lambda_3\ =\varphi,\tag{7}$$

$$\lambda_1=\lambda_3+\lim_{t\to T-0}u_3(t).\tag{8}$$

Здесь (6) – условие склеивания решения в точке θ_1.

Задачи (1)-(3) и (4)-(8) эквивалентны. Если функция $x(t)$ является решением задачи (1)-(3), то пара $(\lambda,u[t])$, где $\lambda=(x(0),x(\theta_1),x(\theta_2))$, $u[t]=(x(t)-x(0),x(t)-x(\theta_1),x(t)-x(\theta_2))$ будет решением задачи (4)-(8). И наоборот, если пара $(\tilde\lambda,\tilde u[t])$, где $\tilde\lambda=(\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2,\tilde\lambda_3)$, $\tilde u[t]=(\tilde u_1(t),\tilde u_2(t),\tilde u_3(t))$ - решение задачи (4)-(8), то функция $\tilde x(t)$, определяемая равенствами $\tilde x(t)=(\tilde\lambda_r+\tilde u_r(t))$, $t\in(t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$, $\tilde x(T)=\tilde\lambda_3+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde u_3(t)$ будет решением исходной задачи (1)-(3).

Появление начальных условий $u_r(t_{r-1})=0$, $r=\overline{1,3}$ позволяют при фиксированных $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ определить функции $u_r(t)$, $r=\overline{1,3}$ из интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$u_r(t)=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau)u_r(\tau)d\tau+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau)\lambda_{r1}d\tau+\int_{t_{r-1}}^{t}K(\tau)\lambda_2 d\tau+\int_{t_{r-1}}^{t}f(\tau)d\tau,\qquad t\in(t_{r-1},t_r),\tag{9}$$

В уравнений (9) вместо $u_r(\tau)$ подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс $\nu(\nu=1,2,...)$ раз получим представления функций $u_r(t)$ вида

$$u_r(t)=D_{\nu r}(t)\lambda_r+H_{\nu r}(t)\lambda_2+G_{\nu r}(u,t)+F_{\nu r}(t), \qquad t\in(t_{r-1},t_r), \tag{10}$$

где

$$D_{\nu r}(t)=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{\tau_1}A(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$H_{\nu r}(t)=\int_{t_{r-1}}^{t}K(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{\tau_1}K(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}K(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(u,t)=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu)u_1(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(t)=\int_{t_{r-1}}^{t}f(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{\tau_1}f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

Переходя в правой части (10) к пределу при $t\to t_r-0$ и подставив соответствующие им выражения в условия (6),(7),(8) получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$:

$$\lambda_1+D_{\nu 1}(\theta_1)\lambda_1+H_{\nu 1}(\theta_1)\lambda_2-\lambda_2=-G_{\nu 1}(u,\theta_1)+F_{\nu 1}(\theta_1), \tag{11}$$

$$\lambda_2+D_{\nu 2}(\theta_2)\lambda_2+H_{\nu 2}(\theta_2)\lambda_2-\lambda_3=-G_{\nu 2}(u,\theta_2)-F_{\nu 2}(\theta_2), \tag{12}$$

$$\lambda_1-\lambda_3-D_{\nu 3}(T)\lambda_3-H_{\nu 3}(T)\lambda_2=G_{\nu 3}(u,T)+F_{\nu 3}(T), \tag{13}$$

Обозначив через $Q_\nu(\theta_1,\theta_2)$ матрицу соответствующей левой части (11),(12),(13) запишем ее в виде

$$Q_\nu(\theta_1,\theta_2)\lambda=-F_\nu(\theta_1,\theta_2)-G_\nu(u,\theta_1,\theta_2), \qquad \lambda\in R^{3n}, \tag{14}$$

где I - единичная матрица размерности $(n\times n)$,

$$Q_\nu(\theta_1,\theta_2)=\begin{pmatrix} I+D_{\nu 1}(\theta_1) & -I+H_{\nu 1}(\theta_1) & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(\theta_2)+H_{\nu 1}(\theta_2) & -I \\ I & -H_{\nu 3}(T) & -I-D_{\nu 3}(T)\end{pmatrix},$$

$$F_\nu(\theta_1,\theta_2)=(F_{\nu 1}(\theta_1),\varphi+F_{\nu 2}(\theta_2),F_{\nu 3}(T)),$$

$$G_\nu(u,\theta_1,\theta_2)=(G_{\nu 1}(u,\theta_1),G_{\nu 2}(u,\theta_2),G_{\nu 3}(u,T)).$$

Таким образом, для нахождения неизвестных пар $(\lambda,u[t])$- решения задачи (4)-(8) имеем замкнутую систему уравнений (9),(14). Пара $(\lambda,u[t])$ находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $k=0,1,2,\ldots$, определяемой по следующему алгоритму:

0-шаг: а) Предполагая, что при выбранном $\nu\in\mathrm{N}$ матрица $Q_\nu(\theta_1,\theta_2)$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\lambda_3^{(0)})$ определим из уравнения $Q_\nu(\theta_1,\theta_2)\lambda=-F_\nu(\theta_1,\theta_2)$, т.е. $\lambda^{(0)}=-[Q_\nu(\theta_1,\theta_2)]^{-1}F_\nu(\theta_1,\theta_2)$.

б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)}\in R^{3n}$ и решая задачи Коши (4),(5) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ на интервалах (t_{r-1},t_r), находим функции $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,3}$.

1-шаг: а) Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,3}$ в правую часть (14), из уравнения $Q_\nu(\theta_1,\theta_2)\lambda=-F_\nu(\theta_1,\theta_2)-G_\nu(u^{(0)},\theta_1,\theta_2)$ определим $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\lambda_3^{(1)})$.

б) На отрезках (t_{r-1},t_r), $r=\overline{1,3}$ решая задачи Коши (4),(5) при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $r=\overline{1,3}$. И.т.д.

Продолжая процесс, на **k-шаге** получаем систему пар $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $k=0,1,2,...$.

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма и однозначной разрешимости задачи (1)-(3) устанавливает

Теорема. Пусть при некотором $\nu \in \mathrm{N}$ матрица $Q_\nu(\theta_1,\theta_2)$: $R^{3n} \to R^{3n}$ обратима и выполняются неравенства

$$\left\|[Q_\nu(\mu,\theta)]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(\mu,\theta),$$

$$q_\nu(\mu,\theta) = \gamma_\nu(\mu,\theta)\left\{e^{\alpha\bar{h}} - \sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha\bar{h})^j}{j!} + \beta\bar{h}\left(e^{\alpha\bar{h}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\bar{h})^j}{j!}\right)\right\} < 1,$$

где $\bar{h} = \max h_r$, $r = \overline{1,3}$.

Тогда краевая задача (1)-(3) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы из [6].

Пример. На отрезке $[0,1]$ рассматривается периодическая краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{t}{4} & 0 \\ 0 & \frac{t}{16} \end{pmatrix} x\left(\frac{1}{3}\right) + \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ f_2(x,t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1] \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\},$$

$$\lim_{t \to \frac{2}{3}-0} x(t) - \lim_{t \to \frac{2}{3}+0} x(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$x(0) = x(1),$$

где $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix}$, $K(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{4} & 0 \\ 0 & \frac{t}{16} \end{pmatrix}$, $\theta_1 = \frac{1}{3}$, $\theta_2 = \frac{2}{3}$, $T = 1$.

Используя схему метода параметризации произведем разбиение $(0,T) = \bigcup_{r=1}^{3}(t_{r-1},t_r)$, где $t_0 = \theta_0 = 0$, $t_1 = \theta_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \theta_2 = \frac{2}{3}$, $t_3 = T = 1$. Сужение $x(t)$ на r-ый интервал (t_{r-1},t_r) обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$ для $t \in (t_{r-1},t_r)$, $r = \overline{1,3}$, т. е. $x_1(t) = x(t)$, $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $x_2(t) = x(t)$, $t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $x_3(t) = x(t)$, $t \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$. Обозначив через $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1,3}$, и введя функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_1$, $r = \overline{1,3}$, получим краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix}(u_r(t) + \lambda_r) + \begin{pmatrix} \frac{t}{4} & 0 \\ 0 & \frac{t}{16} \end{pmatrix}\lambda_2 + \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ f_2(x,t) \end{pmatrix}, \; t \in (t_{r-1},t_r), \; r = \overline{1,3},$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,3},$$

$$\lambda_1 + \lim_{t \to \frac{1}{3}-0} u_1(t) = \lambda_2,$$

$$\lambda_2 + \lim_{t \to \frac{2}{3}-0} u_2(t) - \lambda_3 = \varphi,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 + \lim_{t \to 1-0} u_3(t).$$

При $\nu = 2$ матрица $Q_2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ имеет вид

$$Q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} 1.006 & 0.333 & -0.986 & 0.00038 & 0 & 0 \\ 0.055 & 1.012 & 0.00038 & -0.997 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.065 & 0.335 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.162 & 1.04 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -0.069 & -0.0027 & -1.039 & -0.333 \\ 0 & 1 & -0.0084 & -0.017 & -0.246 & -1.043 \end{pmatrix}.$$

Матрица $Q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ обратима и

$$\left[Q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 0.133 & 2.296 & -0.187 & 2.224 & 0.74 & -2.368 \\ 1.075 & 0.022 & 0.973 & -0.285 & -1.083 & 0.62 \\ -0.515 & 2.35 & 0.138 & 2.172 & 0.389 & -2.207 \\ 1.099 & -0.854 & 0.978 & -0.166 & -1.059 & 0.498 \\ -0.18 & 2.218 & -0.525 & 2.259 & 0.06 & -2.185 \\ 1.059 & -0.506 & 1.039 & -0.82 & -1.038 & 0.159 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия теоремы:

$$\left\|\left[Q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right]^{-1}\right\|\le 7.948,$$

$$q_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=7.948\cdot\left[\left(e^{\frac{1}{3}}-1-\frac{1}{3}-\frac{(1/3)^2}{2}\right)+0.25\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(e^{\frac{1}{3}}-1-\frac{1}{3}\right)\right]=0.095<1.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены и задача имеет единственное решение.

Литература:

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Наука, 1971.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - Киев: Вища школа, 1987. - 285с.
3. Перестюк Н.А. Численно-аналитический метод исследования периодических систем с импульсами // Труды семинара по математической физике. – Киев, 1969. - В. 3.- С. 243-253.
4. Bajo I., Liz E.Periodic boundary value problem for first order differential equations with impulses at variable times // Journal of mathematical analysis and applications. 1996. p. 65-73.
5. Hristova S. G., Bainov D.D. Monotone–Iterative Techniques of V. Lakshmikantham for boundary value problem for systems of impulsive differential equations // Journal of mathematical analysis and applications. 1996. №1, p. 1-13.
6. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1989. - Т. 29. - №1. - С. 50-66.
7. Тлеулесова А.Б. Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием // Математический журнал. – 2004. - Т. 4. - № 4. -С.93-102.
8. Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 2005. - № 1. - С. 95-102.

Резюме

Рассматривается линейная периодическая краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения с импульсным воздействием. В терминах данных получены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи и предложен алгоритм нахождения ее решения.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальные уравнения, импульс, метод параметризации.

Түйіндеме

Импульс әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты периодты шеттік есеп қарастырылады. Бастапқы берілімдер терминінде қарастырылып отырған есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары алынды және оның шешімін табудың алгоритмі құрылды.

Кілт сөздер: шеттік есеп, дифференциалдық теңдеулер, импульс, параметрлеу әдісі.

Summary

The linear periodic boundary value problem for loaded differential equations with pulse influence is considered. The sufficient conditions of unique solvability of considering problem in the term initial data are established and the algorithm finding its solution is constructed.

Key words: Boundary value problem, differential equations, pulse, parameterization method.

ӘОЖ 621.8:517.957

ИДЕАЛ ЕМЕС ЭНЕРГИЯ КӨЗІ БАР ОРТОГОНАЛЬДІ МЕХАНИЗМНІҢ ЖҰМЫСТЫҚ ЗВЕНОНЫ ЖҮКТЕГЕНДЕГІ РОТАЦИЯЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫ

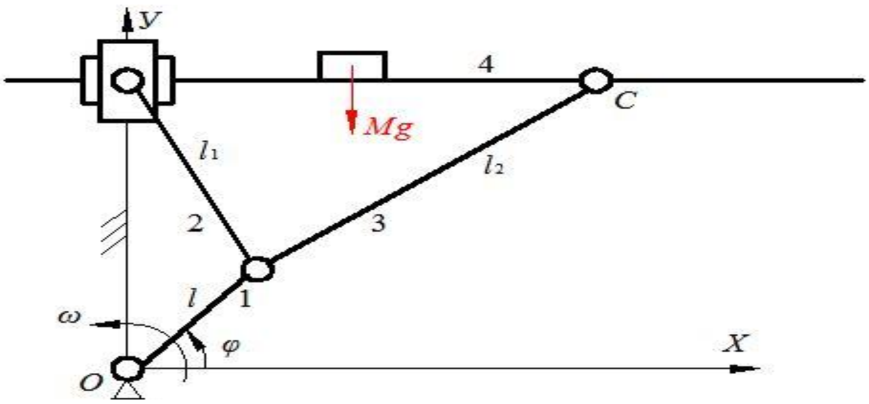
Қ. БИСЕМБАЕВ, техника ғылымдарының докторы,
Ж.ИСКАКОВ, техника ғылымдарының кандидаты, доцент,
Ө. А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қ.,
Б.Т.ЕЛЕУСІНОВ, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент
«Өрлеу» БАҰО АҚ филиалы Қызылорда облысы бойынша педагогикалық қызметкерлердің біліктілігін арттыру институты, Қазақстан Республикасы

Сызықты және сызықты емес динамикалық жүйелер қуаты шектеулі энергия көздерінен әсер алады не қозады. Бұл жерде кез-келген нақты қозғалтқыштың, генератордың, аккумулятордың сипатын анықтайтын табиғи шектелу жайлы. Мұндай энергия көздерінің әсерінен жүйелердің қозғалысы энергия көзі мен жүйенің өзараәрекетімен қабаттаса жүреді. Бұл жағдай, тек энергия көзінің жүйеге әсерін ескеретін, жүйенің энергия көзіне әсер ету мүмкіндігін қарастырмайтын, есептің дәстүрлі қойылысын пайдалануға мүмкіндік бермейді. Шектелген қоздыру әрекетіне душар болатын жүйенің қассиеттері энергия көзінің қасиеттеріне тәуелді.

Берілген жұмыстың мақсаты идеал емес энергия көзі бар дірілдегіш столдың ортогональді механизмінің жұмыстық звенодағы жүктемені ескергендегі динамикасын зерттеу болып табылады.

Кинематикалық қатыстар

Ортогональді механизмнің есептік моделі 1 суретте көрсетілген. OXY координаталар жүйесінің басын кривошип өсінде орналастырайық. Бұл жерде C шарнирінің координаталарын X және Y арқылы, ал ортогональді механизмнің горизонталь және вертикаль тербелістерінің амплитудаларын сәйкесті



Сурет 1 – Дірілдегіш столдың ортогональді механизмінің сұлбасы

a_1 және a_2 арқылы белгілейік. Векторлық контурлардың тұйықтығы теңдеулерінің координаталар өстеріндегі проекцияларынан келесі кинематикалық қатыстарды [1] жазуға болады

$$X = l\cos\varphi + l_2\sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}+\frac{l^2}{l_2^2}\cos^2\varphi},$$

$$Y = l\sin\varphi + l_1\sqrt{1-\frac{l^2}{l_1^2}\cos^2\varphi}\ , \tag{1}$$

мұндағы l, l_1, l_2 және l_3 сәйкесті 1,2,3 және 4 звенолардың ұзындықтары, φ - кривошиптің өсінің айналу бұрышы (сурет 1).

X және Y координаталардың экстремальді мәндері

$$X_{\max} = X(0) = l + l_2\sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}+\frac{l^2}{l_2^2}}\ ,$$

$$X_{\min} = X(\pi) = -l + l_2\sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}+\frac{l^2}{l_2^2}} \tag{2}$$

$$Y_{\max} = l + l_1,$$

$$Y_{\min} = -l + l_1$$

X және Y координаталардың орта мәндері

$$X_{me} = \frac{X_{\max}+X_{\min}}{2} = l_2\sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}+\frac{l^2}{l_2^2}}\ ,$$

$$Y_{me} = \frac{Y_{\max}+Y_{\min}}{2} = l_1, \tag{3}$$

Ортогональді механизмнің C шарнирінің горизонталь және вертикаль тербелістерінің координаталардың орташа мәндеріне қатысты амплитудалары:

$$a_1 = X_{\max} - X_{me} = X_{me} - X_{\min} = l$$

$$a_2 = Y_{\max} - Y_{me} = Y_{me} - Y_{\min} = l\ , \tag{4}$$

Бұдан горизонталь және вертикаль тербелістердің амплитудалары тең екендігі көрінеді. OXY координаталар жүйесінің басын (X_{me}, Y_{me}) нүктесіне ауыстырамыз, яғни OXY координаталар жүйесін $O'\xi\eta$ координаталар жүйесіне түрлендіреміз

$$X = X_{me} + \xi,\ Y = Y_{me} + \eta, \tag{5}$$

бұдан

$$\xi = l\cos\varphi - l_2\left[\sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}+\frac{l^2}{l_2^2}} - \sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}+\frac{l^2}{l_2^2}\cos^2\varphi}\right],$$

$$\eta = l\sin\varphi - l_1\left[\sqrt{1-\frac{l^2}{l_2^2}} - \sqrt{1-\frac{l^2}{l_1^2}\cos^2\varphi}\right] \tag{6}$$

Механизмнің қозғалыс теңдеуі

Ортогональді механизмнің горизонталь звенода (4 звенода) жүк болғандағы қозғалыс теңдеуі [2] жұмысында алынған. Ол келесі түрдегідей

$$A_0\ddot{\varphi} + \left[A_3\left(\frac{1}{2}\cos^3\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right) + fMl^2\sin\varphi\right]\dot{\varphi}^2 + P\cos\varphi + k\dot{M}_D\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$= M_D - fMgl - kM_D, \tag{7}$$

мұндағы

$$A_0 = M\left(1+\frac{m_3}{M}\right)l^2 + J,\ A_3 = 2Ml^2\frac{l}{l_1},$$

$$P = M\left[1+\frac{m_1}{M}+\frac{m_2}{M}+\frac{m}{2M}\right]gl,$$

M - жүктің массасы, m, m_1, m_2 және m_3 - 1, 2, 3 және 4 звенолардың массалары, J - 1 звеноның инерция моменті, f - сырғанау үйкеліс коэффициенті, k - айналу үйкеліс коэффициенті, M_D - қозғалтатын күштердің моменті.

Жүйенің қозғалыс теңдеуі

$$\frac{m}{M} \prec\prec 1,\ \frac{m_1}{M} \prec\prec 1,\ \frac{m_2}{M} \prec\prec 1,\ \frac{l}{l_1} \prec\prec 1,\ \frac{l_1}{l_2} \prec\prec 1,\ f = 0, k = 0, \tag{8}$$

шарты орындалғанда келесі түрге келеді

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cos\varphi = \frac{M_D}{Ml^2}, \tag{9}$$

мұндағы

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l},$$

g - еркін түсу үдеуі.

Идеал емес энергия көзі қозғаушы күштер моменттерінің алдын ала белгіленіп қойылған өзгеру заңдылығын қамтамасыз ете алмайды, өйткені оның жұмыс режимі тербелмелі жүйенің қозғалысынан тәуелді. Қозғаушы күштің моментін уақыттан анық функция түрінде беру мүмкін емес. Идеал емес энергия көзінің тербелмелі жүйеге әсерін $M(\varphi, \dot{\varphi})$ функциясы түрінде өрнектеуге тура келеді. Бұл жерде φ - энергия көзінің қозғалысының координатасы.

Қайсібір қозғалтқыштың, мысалы параллель қоздырғышты тұрақты ток қозғалтқышының өсіндегі қозғаушы момент

$$M_D = a - b\dot{\varphi} \tag{10}$$

формуласымен анықталады, мұндағы a және b - қозғалтқыштың параметрлерінен тәуелді тұрақты коэффициенттер.

(10) - ды (9) – ға қойып және $d\tau = \omega_0 dt$ қатысын пайдаланып жүйенің (9) қозғалыс теңдеуін өлшемсіз түрге келтіреміз

$$\ddot{\varphi} + \varepsilon\dot{\varphi} + \cos\varphi = B, \tag{11}$$

мұндағы

$$\varepsilon = \frac{в}{Ml^2\omega_0},\ B = \frac{a}{Ml^2\omega_0^2}$$

(11) теңдеу түбегейлі сызықты емес, өйткені сызықты емес мүше теңдеуге кіші параметрсіз енеді.

Ортогональді механизмнің қозғалтқыштың роторының айналмалы қозғалысы кезіндегі тербелісі

Енді (11) жүйенің қозу энергиясының үлкен мәндеріне сәйкес қозғалыстарын қарастыруға көшеміз.

$$\varphi = z,\ \dot{z} = \Omega + x \tag{12}$$

қойылымы (11) теңдеуін келесі түрге келтіреді:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon x - \cos z \\ \dot{z} &= \Omega + x \end{aligned} \tag{13}$$

$\tau=\mu s$, мұндағы $\mu=\Omega^{-1}$ деп есептейік. Сонда (13) теңдеулер жүйесі келесі түрге келеді:

$$x' = -\mu\cos z - \mu^2 Bx,$$
$$z' = 1 + \mu x\,, \tag{14}$$

мұнда $x' = \dfrac{dx}{ds}$ белгілеуі қабылданған. Бұл жәй өзгеретін $-x$ бұрыштық айналу

жылдамдығы мен тез өзгеретін z айнымалысының теңдеулері жүйесі, соңғысын қозғалтқыштың роторының айналу бұрышы деуге болады. Мұнан басқа оң жақтары "тез айнымалы" z – тің периодты функциясы болып табылады. Сонымен (14) жүйені зерттеу үшін қозғалысты асимптотикалық бөлу әдісі қолданылуы мүмкін [3].

(14) жүйе үшін келесі Коши есебін қарастырайық деп шарт қояйық. Бастапқы шарт бойынша

$$\tau = 0 : x = x_0, z = 0 \tag{15}$$

[3] жұмысына сәйкесті

$$x = \bar{x} + \mu u_1(\bar{x},\bar{z}) + \mu^2 u_2(\bar{x},\bar{z}) + ...,$$
$$z = \bar{z} + \mu\upsilon_1(\bar{x},\bar{z}) + \mu^2\upsilon_2(\bar{x},\bar{z}) + ... , \tag{16}$$

мұндағы $\bar{x}$ және $\bar{z}$ функциялары келесі теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\dot{\bar{x}} = \mu A_1(\bar{x}) + \mu^2 A_2(\bar{x}) + ...,$$
$$\dot{\bar{z}} = 1 + \mu B_1(\bar{x}) + \mu^2 B_2(\bar{x}) + ... \tag{17}$$

u_i и υ_i функцияларын шектелген деп есептейік. Мұнан әрі (15) шарттарды қанағаттандыру үшін

$$u_i(\bar{x},0) = \upsilon_i(\bar{x},0) = 0 \tag{18}$$

деп қабылдаймыз.

u_i, υ_i, A_i және B_i функцияларын анықтау үшін теңдеулер мынадай болады:

$$\frac{du_1}{d\bar{z}} = -\cos\bar{z} - A_1(\bar{x}),\ \frac{d\upsilon_1}{d\bar{z}} = \bar{x} - B_1(\bar{x}),$$
$$\frac{du_2}{d\bar{z}} = \upsilon_1\sin\bar{z} - k\bar{x} - \frac{du_1}{d\bar{x}}A_1(\bar{x}) - \frac{du_1}{d\bar{z}}B_1(\bar{x}) - A_2(\bar{x}), \tag{19}$$
$$\frac{dv_2}{d\bar{z}} = \upsilon_1 - \frac{du_1}{d\bar{x}}A_1(\bar{x}) - \frac{dv_1}{d\bar{z}}B_1(\bar{x}) - B_2(\bar{x})$$

(19) жүйесі теңдеулерінің алғашқысын қарастырайық. u_1 функциясының шектелуі үшін

$$A_1(\bar{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\bar{z}d\bar{z}$$

болуы қажетті және жеткілікті.

Сонымен

$$A_1 = 0 \tag{20}$$

Бұдан

$$u_1(\bar{x},\bar{z}) = -\int_0^{\bar{z}}\cos\bar{z}d\bar{z} + C(\bar{x}),$$

мұндағы $C(\bar{x})$ - $\bar{x}$ - тің кез – келген функциясы. Десек те (18) шарты $C(\bar{x}) = 0$ береді. Сонда біз жаза аламыз

$$u_1(\bar{z}) = -\sin\bar{z} \tag{21}$$

(19) жүйенің теңдеулерінің екіншісі үшін ой – пікірімізді қайталап алатынымыз

$$B_1 = \bar{x} \tag{22}$$

және сондықтан

$$\upsilon_1 \equiv 0 \tag{23}$$

(21), (22) және (23) нәтижелерін пайдаланып (19) жүйенің үшінші теңдеуін көшіріп жазамыз

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = -B\bar{x} - A_2(\bar{x}) - \frac{du_1}{dz}\bar{x}$$

Бұдан

$$A_2(\bar{x}) = -B\bar{x} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\bar{z} + \bar{x} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\bar{z}d\bar{z} = -B\bar{x} \tag{24}$$

және сондықтан

$$u_2(\bar{x},\bar{z}) = \bar{x}\int_0^{\bar{z}} \cos z dz = \bar{x}\sin\bar{z} \tag{25}$$

Ақырында алынған нәтижелерді ескеріп (19) жүйенің соңғы теңдеуін көшіріп жазайық

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial z} = -\sin\bar{z} - B_2(\bar{x})$$

Бұдан

$$B_2(\bar{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\bar{z}d\bar{z} = 0$$

және сондықтан алатынымыз

$$\upsilon_2(\bar{x},\bar{z}) = -\int_0^{\bar{z}} \sin z dz = \cos\bar{z} - 1.$$

Бұл шараны жалғастырып A_3 оңай аламыз және т. с. с. Есептеулерімізде $O(\mu^2)$ реттегі мүшелермен ғана шектеліп (16) және (17) теңдеулеріне келесі түр береміз

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} - \mu\sin\bar{z} + \mu^2\bar{x}\sin\bar{z}, \\ z &= \bar{z} + \mu^2(\cos\bar{z} - 1), \\ \bar{x}' &= -\mu^2 B\bar{x}, \\ \bar{z}' &= 1 + \mu\bar{x} \end{aligned} \tag{26}$$

(26) теңдеулердің үшінші және төртіншісін интегралдап және (15) шарттарды ескеріп, алатынымыз

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 e^{-\mu^2 Bs}, \\ \bar{z} &= s + \frac{x_0}{\mu B}(1 - e^{-\mu^2 Bs}) \end{aligned} \tag{27}$$

(27) өрнектер негізінде (26) жүйенің қалған теңдеулері келесі түрде болады:

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{-\mu^2 Bs}(1 + \mu^2\sin\bar{z}) - \mu\sin\bar{z}, \\ z &= s + \frac{x_0}{\mu B}(1 - e^{-\mu^2 Bs}) + \mu^2(\cos\bar{z} - 1), \\ \bar{z} &= s + \frac{x_0}{\mu B}(1 - e^{-\mu^2 Bs}) \end{aligned} \tag{28}$$

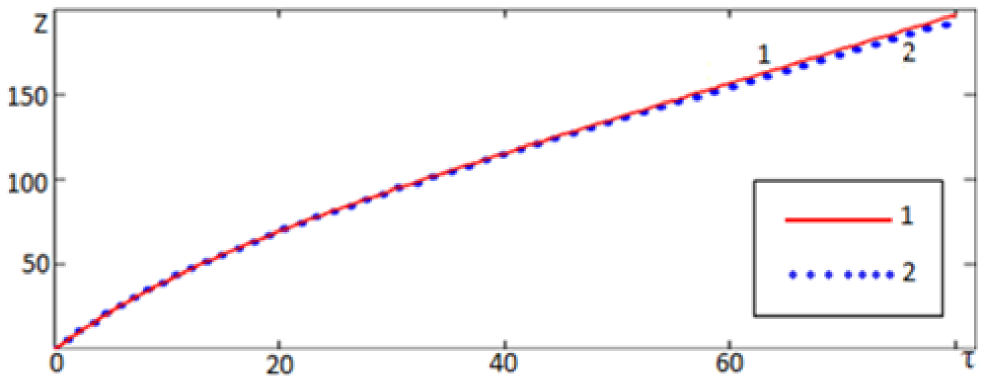
$\tau = \dfrac{s}{\Omega}$ айнымалысына оралып және $\mu = \dfrac{1}{\Omega}$ деп есептеп (28) формуланы қайта жазайық

$$x = x_0 e^{-\varepsilon\tau}(1 + \frac{1}{\Omega^2}\sin\bar{z}) - \frac{1}{\Omega}\sin\bar{z},$$

$$z = \Omega\tau + \frac{x_0}{\varepsilon}(1 - e^{-\varepsilon\tau}) + \frac{1}{\Omega^2}(\cos\bar{z} - 1), \quad (29)$$

$$\bar{z} = \Omega\tau + \frac{x_0}{\varepsilon}(1 - e^{-\varepsilon\tau})$$

(29) шешімдерді сызбалық кескіндеу 2, 3 және 4 суреттерде берілген. Есептеулер

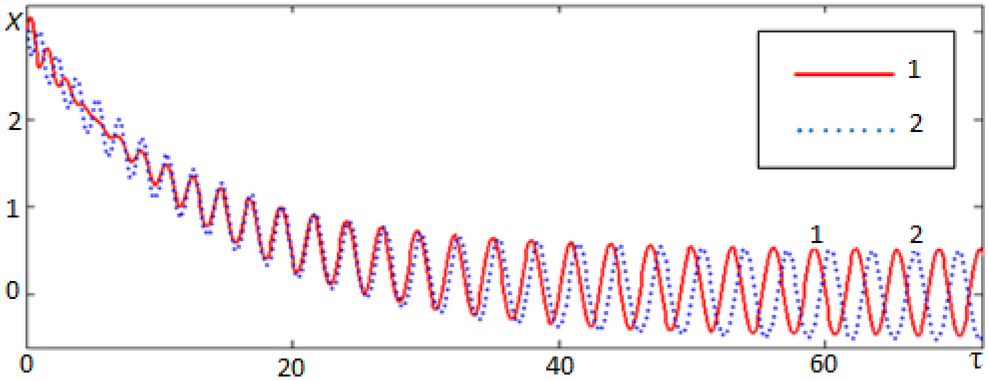


Сурет 2 – Қозғалтқыш білігінің айналу бұрышының уақытқа тәуелділігі

параметрлердің келесі мәндерінде жүргізілді:

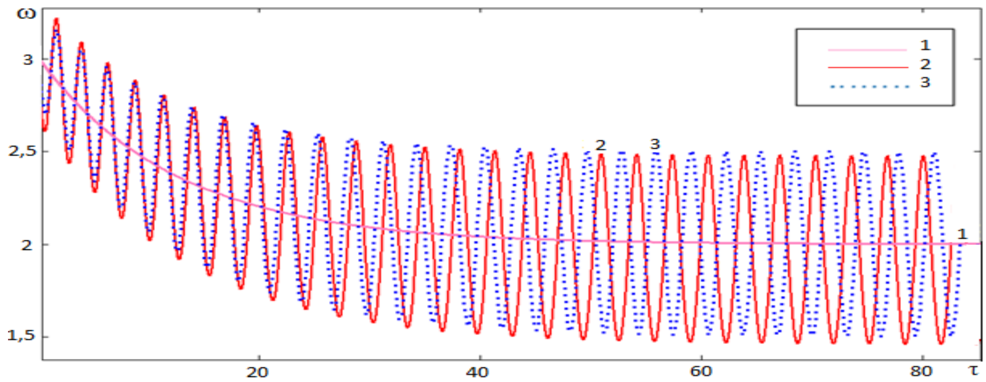
$$\varepsilon = 0.08, \Omega = 2, x_0 = 3$$

z және x - тің уақытқа τ - ға тәуелділіктері 2 және 3 суреттерде көрсетілген. Тұтас сызық

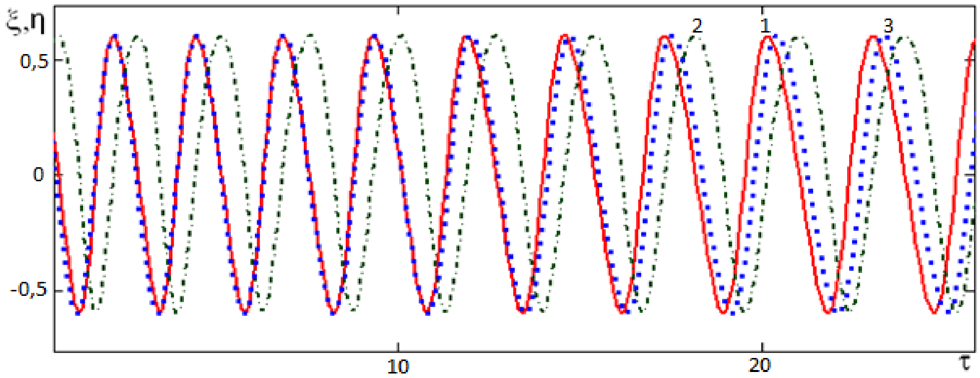


Сурет 3 – Жетекші звенонның айналу бұрыштық жылдамдығының айнымалы құраушысының уақытқа тәуелділігі

(1 қисық) аналитикалық шешімдер нәтижелері бойынша, ал нүктелерден тұратын сызық (2 қисық) (13) теңдеулері жүйесін сандық шешу нәтижелері бойынша тұрғызылған. 2 және 3 суреттерде көрсетілген ұқсас қисықтар аналитикалық және сандық шешімдердің жақындығын білдіреді. Қозғалтқыштың білігінің бұрыштық жылдамдығының τ уақытқа тәуелділігі 4 суретте көрсетілген. 1 қисық $\bar{\varpi} = \Omega + (\bar{\varpi}_0 - \Omega)e^{-\varepsilon\tau}$ формула бойынша



Сурет 4 – Жетекші звенонның айналу бұрыштық жылдамдығының уақытқа тәуелділігі қатысты горизонталь және вертикаль тербелістерінің осциллограммалары тұрғызылған және біліктің орташа бұрыштық айналу жылдамдығының уақыттан өзгерісінің өтпелі процесін сипаттайды. 2 қисық (29) өрнектерін ескеріп $\omega = \Omega + x$ формуласы бойынша алынған, ал 3 қисық сандық есептеулер нәтижелері бойынша тұрғызылған. 5 суретте ортогональді механизмнің X және Y координаталарының орташа



Сурет 5 - Ортогональді механизмнің X және Y координаталарының орташа мәндеріне

мәндеріне қатысты горизонталь (1 қисық) және вертикаль (2 қисық) тербелістерінің осциллограммалары берілген. Үзік сызық (3 қисық) сандық шешу нәтижелерін көрсетеді.

Қорытынды

Ортогональді механизмнің қозғалтқыш білігінің айналмалы қозғалысын қарастыра отырып, қозғалтқыштың білігінің бұрыштық жылдамдығының мәндері біліктің бұрыштық жылдамдығының орташа мәнінің маңында гармоникалық заңдылықпен тербеледі екен деп қорытынды жасауға болады. Гармоникалық тербелістің жиілігі біліктің бұрыштық жылдамдығының орташа мәніне тең.

Әдебиеттер:

1. Тулешов А.К., Тулешов Е.А. Решение уравнений динамики вибростола в классе обобщенных функций методом итерации. //Труды международной научной конференции «Современные достижения в науке и образовании» (26-27 августа 2012 г.). - Хмельницкий национальный университет, 2012.
2. Бисембаев К., Искаков Ж. Математическая модель ортогонального механизма вибростола прессавтомата. //Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. - 2012. - №3(39).
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теорий нелинейных колебаний. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 407 с.

Түйіндеме

Идеал емес энергия көзі бар ортогональді механизмнің жұмыстық звеноны жүктегендегі сызықты емес тербелісінің теңдеуі құрылады. Ротациялық қозғалыстың теңдеулері қозғалысты бөлу асимптотикалық әдісімен шешіліп, нәтижелері сандық есептеу нәтижелерімен салыстырылады. Қозғалтқыштың білігінің айналу бұрышының, айналу бұрыштық жылдамдығының және жұмыстық звеноның координаталарының уақытқа тәелділіктерінің графиктері тұрғызылып, талданады. Жұмыстық звено амплитудалары бірдей ортогональді гармоникалық тербелістер жасаса, жетекші звеноның бұрыштық жылдамдығының мәндері біліктің бұрыштық жылдамдығының орташа мәнінің маңында гармоникалық заңдылықпен тербеледі екен.

Кілт сөздер: жүктелген ортогональді механизм, идеал емес энергия көзі, ротациялық қозғалыс, орнықтылық.

Резюме

В статья составляется уравнение нелинейных колебаний ортогонального механизма с неидеальным источником энергии при нагрузке рабочего звена.Уравнения ротационного движения решаются асимптотическим методом разделения движения, результаты сравниваются с результатами численных решений. Построены графики зависимостей угла вращения, угловой скорости вращения вала двигателя и координат рабочего звена от времени и они обсуждаются. Если рабочее звено совершает ортогональные гармонические колебания с одинаковой амплитудой, то значение угловой скорости ведущего звена колеблется, около среднего значения угловой скорости, по гармоническим законам.

Ключевые слова: нагруженный ортогональный механизм, неидеальный источник энергии, ротационное движение, устойчивость.

Summary

The equation of nonlinear fluctuations of the orthogonal mechanism with a nondeal power source under load operating link was composed. The equations of rotational movement are solved by an asymptotic method of division movement, results are compared with results of numeral solutions. Schedules of dependences rotational angle, rate of rotation of engine shaft and coordinates of a working link from lime are constructed and they are discussed. If the working link makes ortholonal harmonious fluctuations with an identical amplitude, value of angular speed of a leading link fluctuates, about average value of angular velocity at the harmonic laws.

Key words: orthogonal loaded mechanism, a non-ideal source of energy, rotational motion, stability.

УДК 334

НАРЫҚ ЖАҒДАЙЫНДА ҚАРЖЫЛЫҚ МЕНЕДЖМЕНТІҢ ЕСЕПТЕРІН ШЕШУ ТЕХНОЛОГИЯСЫ

А.Ө. БИЯРОВА, экономика ғылымдарының кандидаты, доцент
Т.Рысқұлов атындағы Қазақ экономикалық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы

Нарықтық экономикада қаржыны басқару оның қызметінің ауқымына және саласына, ұйымдастыру нысанына қарамастан кез келген кәсіпорынның алдында тұрған негізгі және басымдылықты міндеттердің бірі. Экономикалық обьектіні басқару мақсаттарында жүйедегі осы бағыттың артықшылығы кез келген аз ғана уақыт аралығында: негізгі және айналым құралдарымен, жұмыс күшімен және т.б. тікелей тасымалдауға қабілетті, ресурстардың бір ғана түрін ұсынатын, қаржылардың ерекше рөліне бекітілген. Осыған ұқсас өзгерістердің рационалдылығы, мақсатқа сәйкестігі және тиімділігі көбінесе кәсіпорынның, оның қызметкерлері мен меншік иелерінің экономикалық әл-ауқатын анықтайды. Уақытша бос немесе басы артық қаржылық ресурстар кәсіпорынның экономикасында қызметтің өзіндік саласын олардың басқаруымен бөліп көрсетудің қажеттігіне жағдай жасайды.

Кәсіпорынның экономикасындағы қаржылық ресурстарды шешуші рөлі олардың қызметінің өзіндік саласында басқару міндеттерін бөліп көрсетудің қажеттігін айқындайды. Қазіргі уақытта ұйым осыған ұқсас қызметтерді *қаржылық менеджмент* деген атау алған арнайы басқару жүйесі шеңберінде жүзеге асырады.

Экономикада кез келген жүйені басқарудың міндеті ҚР заңдарына, Президенттің жарлығына, үкіметтің қаулыларына, министрліктер мен мекемелердің нормативтік актілеріне, лицензияларына, сондай-ақ нақтылы кәсіпорынның жұмысының тәртібін белгілейтін жарғылық құжаттарға, ережелер мен нұсқаулықтарға қатысты әрекет етуші *заңдық қамтамасыз етулердің* шеңберінде жүзеге асырылады.

Осыған байланысты қаржыларды басқарудың қазіргі жүйелерінің маңызды және бөлінбейтін элементтері оның ақпараттық, техникалық және программалық қамтамасыз етілуі болып табылады.

Кез келген экономикалық обьектіні басқару оның құрылымдық элементтері мен айналаны қоршаған орта арасындағы ақпараттармен алмасумен тығыз байланысты болады. Бұл ақпараттардың өз уақыттылығы, толықтығы, нақтылығы және айқындығы қазіргі бизнесте табысты анықтайтын шешуші факторлардың бірі болып табылады.

Қаржылық басқару саласында ақпараттардың рөлі өте жоғары болады.

Қаржылық менджменттің қосалқы жүйесін басқаратын *программалық қамтамасыздандыру* маман-пайдаланушыларының өзара әрекеті мен қызметті міндеттерін шешетін, оның техникалық кешенінің жұмысқа қабілеттілігін қамтамасыз етеді.

Microsoft Office, Lotus Notes, StarOffice программалық кешендердің маңызды жіктері кеңсе қызметін автоматтандырудың қолоданбалы программаларының пакеті болып табылады.

Нарық жағдайындағы қаржылық менеджменттің мақсаты әр түрлі болуы мүмкін. Әрбір нақтылы жағдайда олар кәсіпорында жүзеге асырылатын стратегиялық және тактикалық міндеттерге байланысты болады.

Автоматтандырылған ақпараттық технология жағдайында қаржылық менеджмент есептерін шешу технологиясына ақпаратты жинау және дайындау, мәліметтерді өңдеу, жинақтау және сақтау, мәліметтерді үлгілендіру, нәтижелік ақпараттарды қалыптастыру, шешім қабылдаған тұлғаға ақпаратты беру, шешім қабылдау үдерістерін орындау жатады.

Міндеттердің нақтылы түрлері мен ерекшеліктеріне байланысты, сонымен бірге осы кәсіпорында ақпаратты автоматты түрде өңдеуді ұйымдастыру бойынша технологиялық шешімдердің жоғарыда көрсетілген үдерістердінің кейбірі болмауы мүмкін. Әдетте, бұл бірегей ақпараттық база пайдалануды болжайтын кәсіпорынның қаржылық-шаруашылық қызметін басқарудың автоматты кешенді жүйесін қолдану жағдайында обьект туралы ішкі ақпаратты пайдалануды талап ететін шешімдер, міндеттер үшін сипатты болады. Мұндай міндеттердің мысалдары оның менеджментімен жүзеге асырылатын, ағымдағы жоспарлау, айналмалы қаржыларын басқару, есеп айырысулар мен төлемақыларды және т.б. жүзеге асыруға жедел бақылау, кәсіпорынның қаржылық жағдайын талдауға қызмет етуі мүмкін.

Қаржылық менеджменттің міндеттерінің сыртқы ақпарат сияқты, ішкі ақпаратты да пайдалануды талап ететін міндеттер қатары бар. Кәсіпорындағы қолданылатын ақпаратты технологиялық шешімдерге қарамастан, әдетте, жеке тәртіпте, қолданбалы программалардың сәйкесті пакеттерін пайдалану ұсынылады және ақпаратты өңдеудің жоғары көрсетілген барлық үдерістерін қосады.

Бұл жіктің типтік өкілі инвестициялық жобалардың техника-экономикалық негіздеулерін дайындау және талдау есебі болып табылады. Қазіргі уақытта оның шешімдері үшін пайдаланылатын кеңінен танымал программалардын отандық өнімдері мыналар болып табылады: Project Expert **(**PRO-INVEST Consulting) және «Альт-Инвест» («Альт»).

Project Expert программасы сол немесе басқа жобалаудың кезеңін жүзеге асыратын, сәйкесті бөлімнің сілтемесін (мәтінін) іріктеу жолымен диалогтық нысан-мәзірден жүзеге асырылатын тәуелсіз үлгілендірулердің, қолжетімділіктің жиынтығы түрінде құрылымдана жүзеге асырылады.

Мынадай тоғыз бөлімдері бар: «Жоба», «Компания», «Қоршаған орта», «Инвестициялық жоспар», «Операциялық жоспар», «Қаржыландыру», «Нәтижелер», «Жобаны талдау», «Өзектілігі».

Әрбір бөлімнің ішкі үлгілендірілуі талап ететін шақыру пиктограммалық сәйкесті нүктені басу жолымен жүзеге асырылады.

«Альт-Инвест» программасының ядросы өзара байланысты мазмұндалған кестелердің көмегімен, жоба бойынша нәтижелік ақпаратты қалыптастыру және есеп айырысулар, сипаттаулар жүзеге асырылатын «Жоба» парағы болып табылады. «Жоба» парағы кестелерінің міндеттік белгіленімі бойынша мынадай блоктарға біріктірілуі мүмкін: жалпы және сырты мәліметтер; жоба бойынша түсімдерді сипаттау; өнімнің өзіндік құнын сипаттау; инвестициялық шығындарды сипаттау; қаржыландыру көздерін сипаттау; нәтижеленетін нысандар.

«Альт-Инвест» программасында пайдаланылатын, негізгі макроэкономикалық көрсеткіштердің құрылымы бейнеленген.

Жоба бойынша қаржыландырудың көздерін сипаттау блогы «Қордағы салықтар мен төлемақылар» арнайы кестесінде салық төлемақыларын жүзеге асырудың тізімдемелері, мөлшерлемелері мен шарттары берілген.

Project Expert программасында осыған ұқсас ақпараттарды енгізу «Қоршау» бөлімінің сәйкесті үлгіленулерін іріктеу арқылы жүзеге асырылады.

Жоба туралы *жалпы ақпаратқа*, әдетте, мыналар енеді: жобаның басталу уақыты мен ұзақтығы; өнімдердің ж/немесе қызметтердің тізімдемесі; ішкі және сыртқы нарықта төлемақылар операцитялары және есеп айырысуға пайдаланылатын валюталар; қолданылатын өлшеу бірліктері және т.б.

Project Expert программасында бұл ақпараттың сипатталуы «Жоба» бөлімінде жүзеге асырылады. «Альт-Инвестте» қажетті мәліметтер «Жүзеге асыру жоспары» кестесіне және «Жобаны сипаттау» парағының басына енгізіледі.

Project Expert программасында жобаны жүзеге асырудың бастапқы шарттары «Компания» бөлімінде модулдер құралымен сипатталады.

«Альт-Инвестте» қажетті мәліметтер жобаның жүзеге асырылуы басталуы уақытында«Баланс» кестесіне енгізіледі.

Жобаның *ішкі ақпараттарына* жататындар: өнімдер мен қызметтердің уақытқа бөлінген көлемдері мен жүзеге асырылуы; өндірістік шығындар мен жөнелтпе құжаттар туралы мәлметтер; пайдаланылатын активтер мен ресурстар туралы мәліметтер; қызметкерлер мен еңбекақы туралы мәліметтер және т.б.

Project Expert программасында жобалар туралы ішкі ақпарат «Инвестициялық жоспар» және «Операциялық жоспар» бөлімдерінің модульдерінің көмегімен беріледі. Бұл жерде пайдаланылған ресурстардың құнының көлемдері мен уақыттарының көрсетілуімен орындалған жұмыстардың күнтізбелік жоспары құрылуы мүмкін.

«Операциялық жоспар» бөлімінің «Өткізу жоспары» модулінің пайдаланылуымен өнімдерді өткізудің жоспары үлгілендірілген және әзірлеу үшін диалогтық нысан мысалы көрсетілген. Бұл модуль алуан түрлі жеткізу жағдайларын, сатып алушылардың өнімдерге ақы төлеуін (фактілер, аванс бойынша, кредитке, дәстүрлі емес сызбалар), тауарлар мен қызметтерге бағалардың өзгеруін есептеуге мүмкіндік береді.

Осыған ұқсас нысандар ақпаратты енгізу үшін және басқа да программалардың бөлімдерінде пайдаланылады.

«Альт-Инвест» программасында осыған ұқсас міндеттерді орындау үшін мынадай блоктардың кестелер кешені қарастырылған: «Жүзеге асыру жоспары», «Жүзеге асыру бағасы», «Сатудан түскен табыстар» (жоба бойынша түсімдерді сипаттау блогы); «Материалдар және жинақтаушылар», «Істелген жұмысыан кесімді жалақы», «Ағымдағы шығындар» (өнімдердің өзіндік құнын сипаттау блогы); «Тұрақты активтер», «Лизингтер», «Айналмалы қор» және т.б. (жоба бойынша инвестициялық шығындарды сипаттау блогы).

Қарастырылатын міндеттерді шешудің келесі қадамы *қаржыландыруда қажеттілікті анықтау және оның стратегиясын әзірлеу* болып табылады.Қаржыландыруда қажеттілікті анықтау үшін программалармен автоматты түрде орындалатын, жобаның алдын ала есеп айырысуы жүргізілуі тиіс. Алдын ала есеп айырысу нәтижесінде әрбір есеп айырысу уақытының кезеңіне қор жетіспеушілігін жабу үшін жеткілікті және қажетті, ақшалай қаржының көлемі анықталады.

Қаржыландыруда қажеттілікті анықтағаннан кейін оның стратегиясын әзірлеуге кірісе беруге болады.

Project Expert программасында жобаның қаржыландырылуындағы қажеттілік есебі мен оның стартегиясын әзірлеу «Қаржыландыру» бөлімінің модульдерінің көмегімен жүзеге асырылады.

«Альт-Инвест» программасында осыған ұқсас есеп айырысулар қаржыландыру көздерінің сипатталуы мынадай – «Меншіктік қор», «Кредиттер» кестелер блогында үлгілендіріледі, фрагментері (үзінділері) келтірілген.

Жоба бойынша *түрлі есепберулерді қалыптастыру* кезеңінің мәні шешім қабылдау үшін қолайлы түрдегі жоба туралы барлық ақпараттарды пайдаланушыны қамтамасыз етумен қорытындыланады.

Қарастырылатын екі программада болжамдық есеп берудің барлық қажетті нысандарын автоматты түрде алуға мүмкіндік береді.

Project Expert программасында пайдаланушының қалауы бойынша есепберуді өңдейтін және жиынтықты қамтамасыз ететін арнайы есеп генераторы қарастырылған.Есеп беруге тек стандартты сызбалар мен кестелер ғана құрастырылмай, сонымен бірге пайдаланушы арнайы редактордың көмегімен құрастырғанда енуі мүмкін. Қаржылық көрсеткіштердің есеп айырысуы «Талдау» бөлімінде жүзеге асырылады. Ал есептілікті алу үдерісі «Нәтижелер» бөлімінің модульдерінің көмегімен жүзеге асырылады.

«Альт-Инвест» программасында жобаның қаржылық жағдайының көрсеткіштері мына кестелерде мазмұндалады: «Пайдалар туралы есепберу», «Пайдалар туралы есепберуге қосымшалар», «Ақша қаржыларының қозғалысы туралы есеп», «Баланстық есеп», «Жобаның қаржылық жағдайының көрсеткіштері». Нәтижелерді басуға енгізгенде кестелер «Есеп беру» арнайы парағында мәліметтік есептер түрінде ресімделуі мүмкін.

Жобаның экономикалық тиімділігін бағалау оның алуан түрлі қатынасушылары үшін – кәсіпорындардың, инвесторлардың, кредиторлардың, мемлекеттік және муниципалдық басқарудың және т.б. табыстылықтардың шынайы нормаларын анықтаумен қорытындыланады.

Project Expert программасында есеп айырысу, талдау және экономикалық тиімділіктің көрсеткіштерін үлгілендіру «Жобаны талдау» бөлімінің модульдерінің көмегімен жүзеге асырылады.

«Инвестициялардың тиімділігі» модулі бағаның қосымша көрсеткіштер қатарын жүзеге асыруға мүмкіндік береді.

«Альт-Инвест» программасында инвестициялардың экономикалық тиімділігінің есеп айырысуы нәтижелері «Инвестициялар тиімділігі» кестесінде бейнеленген.

Жобаның нарық жағдайында жүзеге асырылу нәтижелері, көбінесе, жоспарлау сатысында болжау мүмкін емес, мәні өте қиын алуан түрлі факторлардың әсеріне байланысты болады.

Жобаны жүзеге асыру үдерісін тиімді басқару үшін «кері байланысты» қамтамасыз ету қажет. Менеджер жобаның жағдайы туралы өзекті ақпаратты өңдеуі және өз уақтылы алуы және тұрақты мүмкіндігі болуы, оның орындалуы бойынша қажетті түзетулерді жедел енгізуі тиіс.

Project Expert программасында жобаның орындалуы кезінде бақылауды жүзеге асыру үшін және мониторингке арнайы құралдар қарастырылған.

«Альт-Инвест» программасында жобаның орындалуын бақылау міндеті шешуші параметрлерді автоматты түрде қайта есептеу және соңғыларының түсуі бойынша нақтылы жобалық мәліметтерді сәйкесті кестелерде тікелей ауыстыру жолымен жүзеге асырылуы мүмкін.

Қазіргі заманғы ақпараттық технологияларды қолдану кәсіпорындағы қаржылық менеджердің еңбек өнімділігі мен тиімділігін маңызды жоғарылатуға мүмкіндік беретінін атап өтеміз; бұл – бизнес саласында шешімдерді қабылдауды қолдау және міндеттерді шешудің ең қуатты және икемді құралы болып табылады.

Әдебиеттер:

1. Информационные технологии управления: Учебное пособие // Под ред. Ю.М.Черкасова - М.: ИНФРА-М, 2001.

2. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации: Учебник для вузов. 2-е изд./В.Л.Бройдо. - СПб: Питер, 2004. – 703 с.

3. Кулаков Ю.А., Луцкий Г.М. Компьютерные сети. – Киев: Юниор, 1999.

4. Титоренко Г.А. Информационные системы в экономике [Электронный учебник].- Москва, 2008. – 463 с.

Түйіндеме

Кәсіпорынның экономикасындағы қаржылық ресурстарды шешуші рөлі олардың қызметінің өзіндік саласында басқару міндеттерін бөліп көрсетудің қажеттігін айқындайды. Қазіргі уақытта ұйым осыған ұқсас қызметтерді *қаржылық менеджмент* деген атау алған арнайы басқару жүйесі шеңберінде жүзеге асырады. Қаржылық менеджменттің міндеттерінің сыртқы ақпарат сияқты, ішкі ақпаратты да пайдалануды талап ететін міндеттер қатары бар. Кәсіпорындағы қолданылатын ақпаратты технологиялық шешімдерге қарамастан, әдетте, жеке тәртіпте, қолданбалы программалардың сәйкесті пакеттерін пайдалану ұсынылады және ақпаратты өңдеудің жоғары көрсетілген барлық үдерістерін қосады.

Кілт сөздер: қаржылық менеджмент,нәтижелер,жобаны талдау,инвестиция.

Резюме

В статье отличается, что программное обеспечение подобных задач выполнено в виде отдельных моделей или подсистем, которые являются составной частью программного обеспечения комплексной системы автоматизации управления финансово-хозяйственной деятельностью предприятия. Существует целый ряд задач финансового менеджмента, требующих использования как внутренней, так и внешней информации. Вне зависимости от применяемых на предприятии информационных технологий решение таких задач, как правило, осуществляется в автономном режиме, предполагает использование соответствующих пакетов прикладных программ и включает все указанные процедуры обработки информации.

Ключевые слова: финансовый менеджмент, выводы, анализ проекта, инвестиция.

Summary

Software of the such problems is in the form of individual models or subsystems that are part of an integrated software system for automatic control of financial and economic activities of a number of business. There are a number of problems of financial management, requiring the use of both internal and external information. Regardless applied at the enterprise information technology the solution of such tasks typically performed off-line, and use of appropriate software packages and includes all of the processing procedure.

Key words: financial Management, conclusions, analysis of the project, the investment.

ӘОЖ **539.3**

VOIP КАНАЛЫ ҮШІН H.323 СТАНДАРТЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ АРХИТЕКТУРАСЫ

Қ.Қ. ДАУРЕНБЕКОВ, техника ғылымдарының кандидаты,
А.Б. ДЖАНМУЛДАЕВА, Е.А.НАУРЫЗБАЕВ - магистранттар
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

IP-телефония үшін стандарттар сындық факторлар болып табылады. Стандарттаудың ең көп, маңызды облыстарының бірі- IP-телефониядағы хабарламалар ауысу протоколы болып табылады.

Бұрынғы IP-телефонияның мақсаты жабық протоколдар арасындағы бір бірімен байланыс орнату мәселесін шешу болған. Мұнда екі байланысушыда да аналогтық өнімдері болуы міндетті болған.

Intel және Microsoft компаниялары International Telecommunications Union (ITU) тарапынан ұсынылған, H.323 негізінде жасалатын стандарттарды жасауды басқарды. Бұл стандарт мәліметтерді жіберу желісі бойынша аудио және видео мәліметтерді жіберу үшін қажет техникалық талаптарды қарастырады.

H.323 стандартының құрамында:

- видео кодектерге арналған стандарттар;
- дыбыстық кодектерге арналған стандарттар;
- жалпыға қолжетімді қосымшаларға арналған стандарттар;
- шақыртулармен басқаратындарға арналған стандарттар;
- жүйемен басқаратындарға арналған стандарттар.

Видео кодектерге арналған стандарттар телефондық қоңырауларды өңдеу үшін талап етілмейді, бірақ сол стандарттар жүйесінің құрамына кіреді.

Бұрынғы IP-телефонияның мақсаты жабық протоколдар арасындағы бір бірімен байланыс орнату мәселесін шешу болған. Мұнда екі байланысушыда да аналогтық өнімдері болуы міндетті болған.

Intel және Microsoft компаниялары International Telecommunications Union (ITU) тарапынан ұсынылған, H.323 негізінде жасалатын стандарттарды жасауды басқарды. Бұл стандарт мәліметтерді жіберу желісі бойынша аудио және видео мәліметтерді жіберу үшін қажет техникалық талаптарды қарастырады.

H.323 стандартының құрамында:

- видео кодектерге арналған стандарттар;
- даустық кодектерге арналған стандарттар;
- жалпыға қолжетімді қосымшаларға арналған стандарттар;
- шақыртулармен басқаратындарға арналған стандарттар;
- жүйемен басқаратындарға арналған стандарттар.

Видео кодектерге арналған стандарттар телефондық қоңырауларды өңдеу үшін талап етілмейді, бірақ сол стандарттар жүйесінің құрамына кіреді.

Дыбыстық кодерлерге қойылатын техникалық талаптар мыналар:

- өткізушіліктің ең аз жолағы (8 kbit/s немесе одан да аз);
- дыбыстың жоғарғы сапасы;
- үлкен емес кідірістер;
- жоғалған пакеттерге реконструкция жасау мүмкіндігі.

Тура уақыт режимінде пакеттерді жіберу кезінде 30% дейінгі пакеттер жоғалуы немесе кешігуі мүмкін. IP-телефонияның жақсы қосымшасы жоғалған мәліметтерді қайта қалпына келтіре отырып пакеттердің қателерін сыйдыра алуы керек. Кодтау алгоритмінің өзі де мәліметтерді қайта қалпына келтіруге ықпал етеді. Күрделі алгоритмдер қажет құралдардың бағасын ұлғайтады. Кодтау алгоритмінің ең көп танылғандарының бірі G.723.1 болып табылады.

IP-телефониялық жүйенің тағы бір ерекшелігі әр түрлі кодерлерді қолдау мүмкіндігі және қажеттілігіне қарай жаңаларын енгізе алу мүмкіндігінің болуы болып табылады.

Ең басында H.323 локалді есептеуіш желілер үшін жасалған болатын. Сондықтан, жиілік ендік жолағының аралық ені және интернет желісінің кідіріс уақыты H.323 стандартының бірнеше элементтерінің пайдасына азаяды. Үнсіздік бойынша, H.323 стандартындағы дыбыстық кодек G.711 болып табылады. Дегенмен, G.711 тегі талап етілуші 64 kbps тағы жиіліктің ендік жолағы интернет желісін пайдалануға қабылданбаған. Мысалы, көпшілік интернет қолданушылар біле тұра аз ендік каналдарды қолданады. Тіпті бұл жағдайда да стандарттың көпшілігіде пайдалы болып табылады. G.711 басқасы. H.323 стандартының G.722, G.723,G.723.1, MPEG1, G.728, және G.729 дыбыстық кодектерді анықтайды.

Жиіліктің төменгі ендік жолағы бар кодерлер 8 kbps тағы G.729 және 5.3/6.3 kbps тағы G.723 интернет желісінде қолдануға толық сәйкес келеді. Өз кезегінде G.723 IP-телефония үшін бірнеше "стандартты" кодерлерінің бірі болып табылады. Әсіресе, Intel, Microsoft және Netscape компаниялары осы кодерлерді қолдайтындығы туралы айтқан.

G.723 негізгі кемшілігі ол процессордың үлкен қорларын талап ететіндігі. Intel мысалы, Интернет-телефонияны қолдану үшін кем дегенде 100 MHz Pentium-процессорды қолданады.

H.323 ұсыныстарында ескеріледі:

- өткізу жолағын басқару;
- желілердіңөзараәрекеттесуініңмүмкіндігі;
- платформалық тәуелсіздік;
- көпнүктелі конференцияны қолдану;
- көпадрестік беруді қолдану;
- кодекстер үшін стандарттар;
- топтық адрестеуді қолдану.

Аудио және видео ақпараттарды берілуі байланыс каналдарын интенсивті түрде жүктейді, егер бұл жүктеменің артуын бақыламаса, онда маңызды желілік сервистердің жұмысқа қабілеттілігі бұзылуы мүмкін. Сол себепті H.323 ұсыныстары өткізу жолағын басқаруды қарастырады. Барлық H.323 қосымшалары үшін біруақытта қосылатындардың саны сияқты өткізу жолағының жиынтығында шектеуге болады. Бұл шектеулер басқа желілік қосымшалардың жұмысы үшін қажетті ресурстарды сақтауға көмектеседі. H.323 әрбір терминалы конференцияның нақты сессиясындағы өз өткізу жолағымен басқара алады. Желіаралық конференция әртүрлі желідегі видеоконференцияға қатысушыларды біріктіретін құрылғыларды орындай алады (мысалы, IP және ISDN, IP және PSTN).

H.323 платформалы тәуелсіздік программалық қамтамасыз ету немесе жабдыққа қатысты кез келген технологиялық шешімдерге байланысудың жоқтығымен түсіндіріледі. Өзара байланысатын қосымшалар әртүрлі операциялық жүйедегі әртүрлі платформалардың негізінде құрылу мүмкін.

H.323 ұсыныстары конференцияны үш немесе одан да көп қатысушылармен ұйымдастыра алады. Көпнүктелі конференция орталық MCU-ды (көпнүктелі конференцияның құрылғысы) қолданылып немесе қолданылмай орындалуы мүмкін.

Егер желі топтық бағыттаумен басқару хаттамасын қолдаса, онда H.323 көпнүктелік конференцияда көпадрестін берілуін қолдайды (IGMP сияқты). Көпадрестің берілуі кезінде бір бума ақпарат ешқандай көшірмесіз барлық қажетті адрестерге жіберіледі. Көпадресті беріліс өткізу жолағын өте тиімді қолданады, себебі барлық адрестік қолданушылар тізіміндегі сілтемеге бір ағынмен жіберіледі.

Әртүрлі өндірушілердің құрылғыларының үйлесімділігін қамсыздандыру мақсатында Н.323-те аудио және видео ағындардың кодектері үшін стандарттар орнатылады. Сонымен қатар стандарттар өте ыңғайлы. Әртүрлі өндірушілердің жабдықтарының ортақ үйлесімділігін қамтамасыз ету мақсатында аудио және видео ағындардың кодектері үшін Н.323 стандарттары орнатылады. Сонымен қатар стандарттар өте ыңғайлы. Орындалу міндетті талаптар және сонымен бірге қолданылу жағдайында стандартты қатаң керек ететін опциялы мүмкіндіктері бар болады. Осылардан бөлек, егер олар стандарттың міндетті және опционалды талаптарына қайшы келмесе, өндіруші мултимедиялық өнімдер мен қосымша толықтыратын мүмкіндіктерді қосуы мүмкін.

Конференцияның қатысушылары бір-бірімен өзара үйлесімдік сұрақтарын қамын ойламай қатынасқысы келеді. Н323 ұсыныстары соңғы пайдаланушылар жабдығының ортақ мүмкіндіктерінің анықтауларын қолдайды және кодтаудың хаттамалары, шақыру және басқару конференциясының қатысушылары үшін ең жақсысын орнатады. Н323 конференциясы түпкі жабдығы әр түрлі мүмкіндіктерге ие болатын қатысушыларды қоса алады. Мысалы, бір қатысушы терминалдың тек аудио мүмкіндіктерін қолдану мүмкін, сол уақытта қалған конференция қатысушылары видео және деректерді жіберу/қабылдау мүмкіндіктеріне ие болады.

Н.323 бойынша, шлюз мультимедиа - бұл Н.323 конференциясындағы опциональды элемент. Ол әртүрлі көп функцияларды орындауы мүмкін. Оның қарапайым міндетті функциясы жіберу хатамаларының форматын өзгерту болып табылады (мысалы, Н.225.0 және Н.221). Әдетте шлюз мультимедиасы әртүрлі желілердің арасындағы өзара әрекеттесуді қолдау үшін қолданылады.

Н.323 ұсынысында аймақтық бақылауды міндетті емес компанент ретінде қарастарғанына қарамастан, олсыз қызметтер қуатты және түрлі спектрін пайдалану мүмкін емес, IP - телефония және мультимедиа телеконференцияларының қосымшалар үшін Н323 стандартын жасаушылар қарастырған.

IP-телефония үшін кешенді шешім жеке қуыстарда орналасады және ортақ жұмысқа негізделген біртұтас аппараттық- бағдарламалық кешендер болады. Әдетте мұндай шешімдер шлюз, гейткипер, басқару жүйесі және басқа да компаненттерден тұрады және 1Р-телефония желісін қолдану үшін арналған.

Сондай кешендерге жатады:

• аппараттық-бағдарламалық кешені MultiVoice, MultiVoice Gateway шлюзнан тұрады, шлюз бақылаушысы MultiVoice Access Manager, Lucent Technologies серіктестігінің Navis басқару жүйесі мен барлауы;

• Clarent Corp серіктестігінің шлюз құрамдастары Clarent Carrier Gateway, Clarent Gatekeeper және биллинг, маршрутизатор және әкімшілік басқарма Clarent Command Center үшін ПҚ бумасы;

• Cisco Systems серіктестігінің 2600 және 3600 сериялы шлюз/маршрутизаторлар, Cisco Voice Manager жүйелік басқармасы;

• Nortel Networks серіктестігінің Telephony Packet Networks;

• ECI Telecom-Hi-Net серіктестігінің Hi-Gate 1000, gatekeeper Hi-Keeper 1000 шлюзі, Hi-Manager 1000 менеджері, Client Applications ПҚ бумасы және тағы басқа;

• VocalTec серітестігінің VocalTec Gateway шлюзі, VocalTec Gatekeeper аймақтық бақылаушысы, VocalTec Network Manager желілік менеждері.

Осы кешендер IP-телефония қызметінің операторларын қолданыла алтын IP-телефония қызмет түрлерін ұсыну үшін, сол сияқты ТфОП-қа шығу мүмкіндігі бар дыбыстың берілуін ішкікорпоративті желілермен құрастыру үшін ұйымдастыру, сонымен бірге басқа ұқсас желілері бар түйіндестің ескеретін мүмкіндіктері, коммерциялық операторлардың желілерімен IP - телефония, телефон трафигінің қорытындысында меншікті шығындарды төмендету мақсатымен ТфОП-қа бірлескен, сонымен қатар ТфОП-қа кіретін телефодық трафикті алуды қамсыздандыру үшін арналған.

Бірақта өндірушілер VoIP корпоративті желі құру үшін мамандандырылған кешен мен ұқсас аппараттар шығарады. Оларға жақсы танымал Cisco Systems серіктестігінің базалық архитектурасындағы Cisco AVVID кешені жатады, біз бұл жұмысты негіз ретінде қолданып IP – телефония желілерін құрастыруы үшін типті дамыған және қазіргі платформамен танысу мақсатында үйренеміз. Сонымен қатар, мысал ретінде біз берілген тақырыпқа байланысты зерттеулер жүргіземіз.

Әдебиеттер:

1. Прончев Г.Б., Бухтиярова И.Н., Брутов В.В., Фесенко В.В. Социологический ф-т МГУ им. М.В.Ломоносова; Под ред. А.П.Михайлова Компьютерные коммуникации. Простейшие вычислительные сети: Учебное пособие. 1 часть. – 2009. – 60 с.
2. Долгий Э. Особенности беспроводного строительства. // Экспресс-Электроника. - № 5/2004 - http://www.knijki.net/faq_wireless_460.html

Түйіндеме

«VOIP каналы үшін Н.323 стандарты және оның архитектурасы».Бұл ғылыми мақалада VOIP каналында қолданылатынН.323 стандартына сипаттама беріледі. Н.323 стандарты мәліметтерді жіберу желісі бойынша аудио және видео мәліметтерді жіберу үшін қажет техникалық талаптарды қарастырады. Н.323 стандарты конференцияны үш немесе оданда көп қатысушылармен ұйымдастыра алады.

Кілт сөздер: IPтелефония, VOIPканалы, Н.323 стандарты, аудио мәліметтер, видео мәліметтер, конференция.

Резюме

В статье «Стандарт Н.323 для VOIP канала и его архитектура» характеризуется стандарт Н.323 для VOIP канала. Стандарт Н.323 рассматривает технические условия для передачи аудио и видео данных. Стандарт Н.323 может одновременно подключать в конференцию три и более участников.

Ключевые слова: IP телефония, VOIP канал,стандарт Н.323, аудио данные, видео данные, конференция.

Summary

Standard H. 323 for VOIP channel and its architecture. This article is a standard H. 323 for VOIP channel. Standard H. 323 reviews specifications for transmission of audio and video data. Standard H. 323 can simultaneously connect three or more Conference participants.

Key words: IP telephony, VOIP channel, standard H.323, audio information, video information, conference.

УДК 62.50 519.6

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ СИМВОЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ

А.И.ДИВЕЕВ, доктор технических наук,
Вычислительный центр РАН,
Н.Б. КОНЫРБАЕВ, С.И.ИБАДУЛЛА - аспиранты
Российский университет дружбы народов, г.Москва, Россия

Задача поиска структуры функции управления и подбора ее параметров в данной работе решается компьютером автоматически с помощью метода сетевого оператора. Рассмотрим задачу синтеза системы управления. Задана математическая модель объекта управления

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in U \subseteq R^m$, $m \le n$, U - ограниченные множества.

Задано ограниченное множество начальных значений

$$\mathbf{x}(0) \in X_0 \subseteq R^n. \tag{2}$$

Заданы терминальные условия в виде целевого многообразия

$$\varphi_i(\mathbf{x}(t_f)) = 0,\ i = \overline{1, r}, \tag{3}$$

где t_f - время окончания процесса управления.

Задан критерий качества управления

$$J = \int_0^{t_f} f_0(x, u)dt \to \min, \quad (4)$$

где $f_0(x, u)$ - ограниченная снизу функция $\forall \mathbf{x} \in R^n$ $\forall \mathbf{x} \in R^n$, $\forall \mathbf{u} \in U$.

Необходимо найти функцию

$$u = \tilde{h}(x), \quad (5)$$

где $\forall \mathbf{x} \in R^n$, $\tilde{h}(x) \in U$.

Функция (5) должна удовлетворять условиям $\forall \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in X_0$ решение $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f\left(x, \tilde{h}(x)\right), \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \quad (6)$$

обеспечивает достижение цели управления (3) $\varphi_i\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(t_f\right)\right) = 0$, $i = \overline{1, r}$, и удовлетворяет минимуму критерия качества управления (4)

$$J(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = \min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} f_0(x, u)dt, \quad (7)$$

где $\tilde{u}(t) = \tilde{h}(\tilde{x}(t))$, $t \in \left[0, t_f\right]$.

Для решения задачи используем метод сетевого оператора.[1-3] В методе сетевого оператора математическое выражение описывается с помощью ориентированного графа. Структура графа указывает на порядок выполнения операций и на аргументы любой функции при вычислении математического выражения.

Сетевой оператор строят на следующих конструктивных множествах:
- множество переменных

$$X = (x_1, \ldots, x_N), \ x_i \in R^1, \ i = \overline{1, N}; \quad (8)$$

- множество параметров

$$Q = (q_1, \ldots, q_P), \ q_i \in R^1, \ i = \overline{1, P}; \quad (9)$$

- множество унарных операций

$$O_1 = (\rho_1(z) = z, \rho_2(z), \ldots, \rho_W(z)); \quad (10)$$

- множество бинарных операций

$$O_2 = (\chi_0(z', z''), \ldots, \chi_{V-1}(z', z'')). \quad (11)$$

Среди унарных операций обязательно должна присутствовать тождественная операция. Бинарные операции должны быть коммутативны, ассоциативны и иметь единичный элемент

Сетевой оператор - это ориентированный граф, обладающий следующими свойствами:

а) в графе отсутствуют циклы;

б) к любому узлу, который не является источником, имеется хотя бы один путь от узла-источника;

в) от любого узла, который не является стоком, имеется хотя бы один путь до узла-стока;

г) каждому узлу-источнику соответствует элемент из множества переменных или из множества параметров;

д) каждому узлу соответствует бинарная операция из множества бинарных операций;

е) каждой дуге графа соответствует унарная операция из множества унарных операций.

Рассмотрим пример сетевого оператора для математического выражения

$$y = x_1 + \sin(x_1) + q_1 x_2 e^{-q_2 x_2}$$

Задаём конструктивные множества

$$\mathrm{X} = (x_1, x_2),\ \mathrm{Q} = (q_1, q_2),$$
$$\mathrm{O}_1 = \left(\rho_1(z) = z, \rho_2(z) = -z, \rho_3(z) = e^z,\ \rho_4(z) = \sin(z)\right),$$
$$\mathrm{O}_2 = \left(\chi_0(z_1, z_2) = z_1 + z_2, \chi_1(z_1, z_2) = z_1 + z_2\right),$$

Сетевой оператор рассмотренного математического выражения представлен на рис. 1.

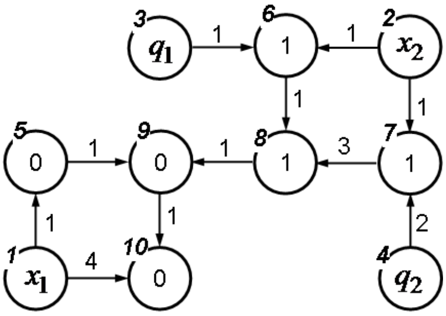


Рис. 1 - Сетевой оператор математического выражения

Для представления сетевого оператора в памяти компьютера используем матрицу сетевого оператора. Заменим ненулевые элементы матрицы смежности номерами соответствующих унарных операций. На диагонали матрицы поставим соответствующие узлам номера бинарных операций. В результате получаем матрицу сетевого оператора

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поиск сетевого оператора в виде целочисленной матрицы можено осуществлять любым эволюционным алгоритмом.

В качестве примера рассмотрим задачу синтеза системы управления мобильным роботом. Математическая модель объекта управления имеет вид

$$\dot{x} = (u_l + u_r)\cos\varphi / 2, \tag{12}$$

$$\dot{y} = (u_l + u_r)\sin\varphi / 2, \tag{13}$$

$$\dot{\varphi} = \pi(u_l - u_r) / 2, \tag{14}$$

где x, y − координаты положения центра масс объекта на плоскости, φ – угол между вектором скорости объекта и осью x, u_l, u_r − компоненты вектора управления $\mathbf{u} = [u_l\ \ u_r]^T$, регулирующие левое и правое колеса робота.

Заданы ограничения на управление

$$-1 \le u_l \le 1,\ -1 \le u_r \le 1. \tag{15}$$

Необходимо синтезировать систему управления в форме (5), чтобы обеспечить движение робота по заданной в виде точек на плоскости $\{x, y\}$ траектории.

Критериями управления считаем точность движения робота по траектории и время прохождения всей траектории.

В результате было получено следующее управление

$$u_l = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{u}_l \geq 1 \\ \tilde{u}_l, & \text{если } -1 < \tilde{u}_l < 1, \\ -1, & \text{если } \tilde{u}_l \leq -1 \end{cases} \quad u_r = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{u}_r \geq 1 \\ \tilde{u}_r, & \text{если } -1 < \tilde{u}_r < 1, \\ -1, & \text{если } \tilde{u}_r \leq -1 \end{cases}$$

где

$$\tilde{u}_l + \tilde{u}_r = \operatorname{sgn}\left(A - A^3 + B + q_3\right) + 1,$$

$$\tilde{u}_l - \tilde{u}_r = \operatorname{sgn}(A)\left(e^{|A|} + 1\right)\operatorname{sgn}(A)\left(\ln|A| + 1\right),$$

$$A = \left(\operatorname{arctg}\frac{y^f - y}{x^f - x} - \varphi\right)q_2,$$

$$B = \operatorname{sgn}\left(\left(x^f - x\right)\dot{x} + \left(y^f - y\right)\dot{y}\right)\Delta(x, y)q_1,$$

$$\Delta(x, y) = \sqrt{\left(x^f - x\right)^2 + \left(y^f - y\right)^2},$$

$$q_1 = 3.87744,\ q_2 = 3.75513,\ q_3 = 0.02355.$$

На рис.2 приведен результаты моделирования полученной системы управления

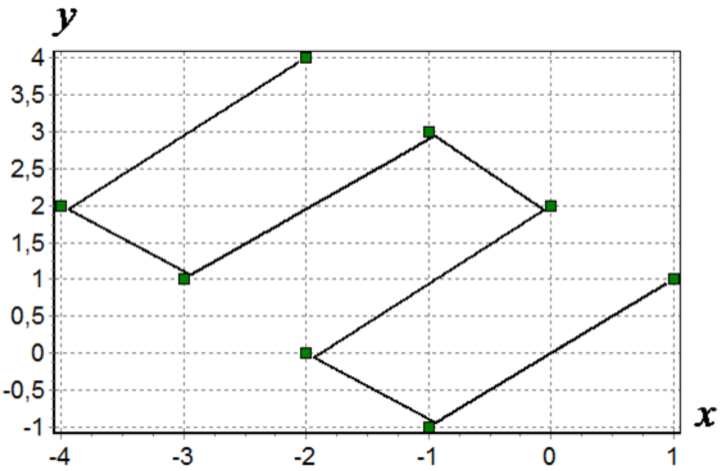


Рис.2 - Траектория движения объекта на плоскости

Литература:

1. Дивеев А.И. Метод сетевого оператора. – М.: ВЦ РАН, 2010. - 178 с.
2. Дивеев А.И., Софронова Е.А. Метод сетевого оператора и его применение в задачах управления. – М.: РУДН, 2012. - 182 с.
3. Дивеев А.И. Численный метод сетевого оператора для синтеза системы управления с неопределенными начальными значениями // Известия РАН Теория и системы управления. – 2012. - № 2. - С. 63-78

Резюме

В данной статье рассмотрена задача синтеза оптимального управления колесным мобильным роботом. Задача поиска структуры функции управления и подбора ее параметров решается компьютером автоматически с помощью метода сетевого оператора. Приведен численный пример решения задачи синтеза на базе разработанного программного комплекса.

Ключевые слова: метод сетевого оператора, синтез управления, мобильный робот, унарные операции.

Түйіндеме

Бұл мақалада дөңгелек мобильді роботтарды оптималды басқару синтездерін есептеу қарастырылған. Мұнда басқару функциясының құрылымын іздеу мәселелер компьютерде желілік оператор әдістері арқылы автоматты түрде басқарылады. Өңделген бағдарламалық кешен базасы негізінде мысал келтірілген.

Кілт сөздер: желілік операторлар әдісі, басқару синтезі, мобилді робот, унарлы операциялар.

Summary

In this article we consider the problem of optimal synthesis of wheeled mobile robot. The task of finding the structure of the management and selection of parameters in this paper the computer automatically using the network operator. A numerical example of solving the problem of synthesis on the basis of developed software.

Key words: Method network operator, control synthesis, the mobile robot, unary operations.

ӘОЖ 512:004.383.1

ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ҚИСЫҚ НҮКТЕ ТОБЫНДАҒЫ ДИСКРЕТТІК ЛОГАРИФМДЕУ ЕСЕПТЕРІН ШЕШУ

З.М.ДИУАНОВА, магистрант,
А.Ж.СЕЙТМҰРАТОВ, физика-математика ғылымдарының докторы
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Аталмыш жұмыста берілген мөлшерлемедегі дискреттік логарифмдеу есептері алгоритімінің құрылымы, эллиптикалық қисық нүктелері тобындағы есептерді шығаруға мүмкіндік беретін алгоритмдер қаралған. Олар логарифмдеудің көп еңбектенуді қажет ететін сатыларын қос-қостап есептеуге(распараллеливания)арналған.

Сандық алаңның ыдырау және електен өткізу базасының әдістері талданған,ары қарай параллельден азат ету үшін олардың есептеулерге қиын бөліктері бөліп көрсетілген.

Параллель електен өткізу алгоритмі түрлі сандардың жатықтығын тексеруді тәуелсіз жүзеге асыруға негізделген. Процессарлық алмасу табылған жатық элементтердің санын анықтау үшін қолданылады.Гаусс паралельді ерекшелік алгоритмі тірек қатар процесінің бірін таңдау және тірек етуге негізделген,оларды қолдану арқылы процестер матрицаның өз бөлігіндегі таңдалған бағандарды жояды.

Зерттелген алгоритмдерді қарастырар алдында ары қарай «битке(к бит)Галуа мөлшерлілік өрісі үстіндегі эллиптикалық қисық нүкте тобындағы дискреттік логарифмдеу есептері»деген ұғымның қалай түсінілетінін анықтау және берілген мөлшерлемедегі дискретті логарифмдеу есептерін іздестіру үдерісін сипаттау қажет.

Циклдік *г* тобы элементтерінің саны қисық түрі мен р санына байланысты. *г* мен *р*-іңбіркелкі сандар екенін көрсетеміз.Қарапайым өріс үшін ¡А/" ***- р\ < р*** Хассе теоремасы ұсынған баға дұрыс болады.Соған сәйкес *г* мен *р*-біркелкі сандар, *р г* үшін жоғарыдан шектеу қояды,сондықтан *р* модулінің биттік өлшемі есептің мөлшерлілік сипаттамасы үшін қолданылуы мүмкін.

Берілген С нүктесі үшін циклдік топтың ретін табу міндеті салыстырмалы түрде күрделі болып келеді және 0(1г) күрделілігін бағалау не Шенкстің экспоненциальды алгоритмі арқылы,немесе Чуфтың полиноминальды алгоритмі арқылы жүзеге асырылады. Дискретті логарифмдеудің қарастырылып отырған барлық әдістері 0-ден(4г)
анықтау үшін Шенкстің біршама қарапайым алгоритмін қолдануға болады,қолда бар есептеу қуаты топтар ретін табуға берілген уақыт жетпесе,дискретті логарифмдеуді жүзеге асыру мүмкін де болмайды.

Шенкс алгоритмі

S Алгоритм. Циклдік топтардың ретін табуға арналған Шенкс алгоритмі

Кіру: О қисығының нүктесі ***У***$=x^2+Ax+2$түріндегі $E(P_p)$ -дегі ***эллиптикалық қисық***

Шығу: <С> циклдік тобының реті

1. [Мәліметтер базасының мөлшерін табу] Табу к = \ifp

2. [Мәліметтер базасын құру] С*,2С,3С,...,кС нүктелерін есептеп шығару және х-координат бойынша алынған мәліметтер базасын сұрыптау бұл жағдайда -С, —2С,... нүктелері белгілі болады

3. [Мәліметтер базасынан іздеу] Р=(2к+1)С>, нүктелерін есептеп шығару,11=(р+1)С онан сон МБ-дан Я, Я±Р, Я±2Р, ..., Я±кР. Нүктелерін іздеуді жүзеге асыру.

Теңдік11+с1кС=еС бірқатар бүтін үшін <1,е екенін білдіреді.

4. [г-ні есептеп шығару]. г=р+1+с1к-е

5. [Жұмысты аяқтау]

Бұл алгоритм уақытша және сыйымды ***0([_л*/р_1>** **күрделілігіне ие.** $E(P_p)$ белгіленген мөлшерліліктегі дискретті логарифмдеу есептерін іздестіру үшін *S* алгоритмін көмекші ретінде қолданатын *F*, алгоритмі табылған.

F алгоритмі.Берілген мөлшерліліктегі эллиптикалық қисықта дискретті логарифмдеу есептерін іздестіру алгоритмі .

Кіру: *п* –битпен *р* модулінің ұзындығы.

Шығу: Эллиптикалық қисықтағы дискретті логарифмдеу есептерінің сипаттамасы..

1. [Берілген ұзындықтағы модульді іздестіру] р = п бит ұзындықтағы кездейсоқ қарапайым сан.

2. [Эллиптикалық қисық коэффициентін таңдау]. ***Е(Р***$_p$***)эллиптикалық қисығы у***^{2} = x^3 + ***Ах*** + **R** түріндегі белгімен берілсін. А,В коэффициенттерін таңдаймыз,осылайша,келесі шарттардың орындалуына қол жеткіземіз:

1)А,В-бүтін сандардың абсалюттік өлшемімен онша үлкен емес ;

2) 4А^3 + 21В^1 * **0(тос1** р)

3) *F*,^1728. у = 1728-***4А + 21В инварианты***

Сәйкес келетін мәндер ретінде,мысалы, А=1, В=1-ді алуға болады.

3. [Q нүктесін құаушыны таңдау] f(х) = х+ Ах + В(п\о<1 р) – квадратты алу болатын кездейсоқ х-ты таңдау . Q нүктесін құраушы ретінде ***у = х***^{3} ***+ Лх +В (***mod***р)*** болатын <х,у> немесе <х,-у(mod р)> нүктесін алуға болады.Р модулі бойынша х саны квадратты алу болу-болмауын Якоби символын тапқанда ғана мүмкін болады.

4. [*г* циклдік тобының ретін табу]. А алгоритмі комегімен <Q>циклдық тобының ретін табу.

5. [*Р* нүктесін таңдау]. Кездейсоқ ретпен көрсеткішін іздестіру. *P=RQ*-ді есептеп шығару.

6. [жұмысты аяқтау]

А,В сандары эллиптикалық қисықтағы есептеулерді жылдамдату үшін абсалюттік өлшеммен үлкен болмауы тиіс.В алгоритмінің 2 адымына қойылатын өзге шарттар қисықтың дұрыс құрылуы үшін қажет.В алгоритмінің жұмысы үшін қажетті қарапайым нәрселер (атап айтқанда модуль бойынша Якоби символы мен квадратты түбірді есептеуге арналған) таңдалғанNTL кітапханасында бар.

Осылайша эллиптикалық қисық нүктелері тобындағы дискретті логарифмдеу есептеудің бастапқы мәліметтері мыналар:

- Р модуль ;
- А,В эллиптикалық қисығы коэффициенттері;
- Q құраушы нүкте;
- Г циклдік тобының реті;
- Дискретті нүктесін табу қажетті Р нүктесі.

Есептің шешімі P=RQ болатындай, I, I е 0..г -1 саны болады.

Эллиптикалық қисықтағы дискретті логарифмдеу әдістері талдауын қарастырайық.Қарастырылып отырған дискретті логарифмдеу әдісін-ортада түйісу әдісі мен кездейсоқ жерде түйісу әдісін салыстырғанда олардың әр түрлі құрылымда екенін байқауға болады.Дегенмен, екі әдістің негізінде де ұқсас операциялар-кездейсоқ нүктелердің іздестірілуі мен бұған дейін базада іздестірілген нүктелер жатыр.

Ортада түйісу әдісі үшін мәліметтер базасын іздестірілуі мен іздеу сатылар бөлінген. Нүктенің берілген өлшемінің кездейсоқ дәрежелерінен алынған нүктелер базасы іздестіріліуін білдіреді,тек сонан кейін ғана осы базадағы *P* нүктесінің кездейсоқ нүктелері іздеуді жүзеге асыруды білдіреді.Сондықтан мәліметтердің айтарлықтай қарапайым құрылымдарын (реттелген массивтер) мен қарапайым алгоритімді қолдануға болады.Дегенмен бұл ретте нүктелердің іздестірілуі мен іздеу-нүктелер массивін сұрыптау арасына аралық сатыны енгізу қажет болады.

Нүктелер іздестірілуінің кездейсоқ жағдайда түйісуі әдісіне іздеу мен мәліметтерді толықтыру сатыларға айқын бөлусіз үздіксіз жүзеге асырылады.Сонымен іздеу мен жаңа элементтерді қосуды тиімді жүзеге асыратын мәліметтер құрылымын қолдану қажет.

Ондай мәліметтер құрылымының мысалы ретінде әркелкі түрлердің тегестірілген құрылымы қызмет ете алады,оларды іздеу операциясы мен толықтырылуы шартты уақытта орындалады.Оған қосымша кездейсоқ орында түйісу әдісінде сығымдалған бейнелер қолданылады.

1-кестеде ұқсас операцияларды табу мақсатында қарастырылып отырған әдістерді салыстырамыз және салыстыру нәтижиелерін береміз.

Кесте 1 - Эллиптикалық қисық нүктелер тобындағы дискретті логарифмдеу әдістерін салыстыру.

Салыстыру критерийлері	**Ортада түйісу әдісі**	**Кездейсоқ орында түйісу әдісі**
Сатыларға бөлу-МБ құру МБ-дан іздеу	Иә	Жоқ
Іздестірілетін нүктелер түрі(а,Ь – кездейсоқ сандар)	аС2 МБ құру үшін,IР МБ-дан іздеу үшін	аС2+IР құру және іздеу үшін
Сығымдалған бейнені қолдану	Жоқ	Иә
Салыстыру критерийлері	**Ортада түйісу әдісі**	**Кездейсоқ орында түйісу әдісі**
Қолданылатын мәліметтер құрылымы	Тәртіптелген массивтер	Теңгестіріліген орындар

Жүргізілген талдау қарастырылған әдістермен дискретті логарифмдеуді ұйымдастыру үшін келесі міндеттерді шешу қажеттілігін анықтады:

1. Нүктелердің жіктелген базасын ұйымдастыру;
2. Жекелеген процестің жады ішінде нүктелер базасының бөлігін сақтауға арналған мәліметтер құрылымын таңдау;
3. Жіктелген мәліметтер базасындағы нүктелерді орналастыру және іздеу кезіндегі процестердің өзара әрекеттесу ретін анықтау.

Осы міндеттерді шешу арқылы жіктелген есептеуіш ортада қолдануға жарамды дикретті логарифмдеу есептерін шешудің алгоритмдерін табуға болады.

Әдебиеттер:

1. Нечаев В.И. Элементы криптографии. Основы теории защиты информации. – М.: Высшая школа, 1999.
2. Don Coppersmith, Andrew M. Odlzyko and Richard Schroeppel, Discrete logarithms in GF(p). Algorithmica 1 (1986), 1-15
3. Pollard J.M. Monte-carlo methods for index computation (mod p). Mathematics of computation 32 (1978)
4. Gordon D. Discrete logarithms in GF(p) using the number field sieve // SLAM Journal on Discrete Mathematics. 1993. Vol. 6. P. 124-138
5. Weber D. An implementation of the general number field sieve to compute discrete logarithms mod p. // Advances in Cryptology - EUROCRYPT '1995. Lecture notes in Computer Science. Springer - Verlag. 1995. Vol. 921. P. 95-105.
6. Weber D. Computing discrete logarithms with the number field sieve // Algorithmic Number Theory: Second International Symposium, ANTS-II. Talence, France, May 1996. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag. 1996. Vol. 1122. P. 391-403.
7. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Дискретная математика: Учебник. - 2-е изд., перераб. - М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. - 256 с. (Высшее образование).
8. Weber D. Computing discrete logarithms with the general number field sieve. In Proc. of Algorithmic Number Theory Symposium II (ANTS II), volume 1122 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1996. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://citeseer.ist.psu.edu/weber96computing.html.

Түйіндеме

Бұл жұмыста алгоритмнің құрылымы дискреттік логарифмнің шешімі қарастырылған. Қаралған алгоритмдер мына теңдеуді шешеді $E(P_p)$.Бұл теңдеулер логарифмдеудің қиын түріне арналған.

Кілт сөздер: криптожүйе,дискреттік логарифмдеу, алгоритмнің параллель түйісуі.

Резюме

В данной работе приведён алгоритм построения задачи дискретного логарифмирования заданной размерности. Расмотренные алгоритмы, позволяют решать задачу в $E(P_p)$. Они предназначены для распараллеливания трудоёмких этапов логарифмирования.

Ключевые слова: Криптосистема, дискретное логарифмирования, алгоритм параллельного просеивания.

Summary

In this investigation, we write an algorithm of constructing problems discrete of taking logarithms given by dimension. Considered algorithms allow to solve the problems in $E(P_p)$. They are designed for parallization laborious steps logarithms.

Key words: crytosistem,discrete logarithm,algorithm of parallei sistting.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ СРЕДАХ

М.Ж. ДОСЖАНОВ, доктор технических наук, профессор,
Б.Ж. ДЖАНМУЛДАЕВ, доктор технических наук, профессор,
Г.Ж.АЙДАРБЕКОВ, магистрант
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, Республика Казахстан

В данной работе приводятся математические методы, применяемые при исследовании динамических процессов в линейных термовязкоупругих средах.

Наряду с известными методами, связанными с применением различных интегральных преобразований, развиваются новые методы, расширяющие класс решаемых задач.

1. Преобразования Фурье, Лапласа, Бесселя.

При исследовании различных физических процессов, описываемых линейными дифференциальными или интегродифференциальными уравнениями, часто пользуются математическими приемами, приводящими к каким-либо наглядным представлениям. К числу таких приемов принадлежат различные интегральные преобразования. Рассмотрим некотырые из них.

Интегральное преобразование Фурье.

Различают следующие виды преобразований Фурье:

$$F_1(w)=\int_o^\infty f(x)\cos(wx)dx \tag{1}$$

(косинус – преобразовввание Фурье),

$$F_2(w)=\int_o^\infty f(x)\sin(wx)dx \tag{2}$$

(синус – преобразовввание Фурье),

$$F\ (w)=\int_o^\infty f(x)e^{-iwx}dx \tag{3}$$

Формулы (1) - (3) справедливы, если несобственный интеграл от функции f(t),т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)dx \quad \text{существуют.} \tag{4}$$

Экспоненциальное преобразование Фурье (3) применяют при исследовании частных характеристик физических величин.

Модуль $|F(w)|$ называют амплитудной характеристикой или амплитудным спектором функции f(t), а arg F(w)- фазовым спектром.

Интегральное преобразование Лапласа.

Если через f(t) функцию – оригинал действителного переменного t,
$0 \le t < \infty$, интегрируемого на любом интервале (O,A), то выражение

$$F(p)=\int_o^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{5}$$

называют интегралом Лапласа, а функцию F(p) преобразованием или трансформацией Лапласа функции f(t)

Здесь величена p=$\sigma+i\tau$ комплексное число, причем σ >0.

Данное преобразование применяется чаще в случае, когда в качестве переменной t берется время, и задаются начальные условия для f(t) при t=0.
Интегральное преобразование Лапласа обладает следующими свойствами:

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-pt}dt = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f^1(0) - .... - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (6)$$

2. $$\int_{o}^{\infty}\left\{\int_{0}^{t} (\xi)\mathrm{g}(t-\xi)d\xi \right\}e^{-pt}dt = F(p)Q(p) \quad (7)$$

Где $$Q(p) = \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{g}(\mathrm{t})e^{-pt}dt \quad (8)$$

3. $$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-1\infty}^{\gamma+1\infty} F(p)e^{pt}dp \quad (9)$$

Где i=$\sqrt{-1}$, γ- лежит правее всех особенностей функции F(p).

4. $$f(0) = 1\underset{t\to 0}{im} \qquad f(t) = 1\underset{t\to 0}{im}[pF(p)] \quad (10)$$

5. $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-1\infty}^{\gamma+1\infty}\{F(p)e^{-ap}\}dp = f(t-a)H(t-a) \quad (11)$$

Где H(t-a) единичная функция Хевисайда, равная

$$H(\xi) = \{ \begin{matrix} 1 npu \xi \succ 0 \\ 0 npu \xi \prec 0 \end{matrix} \} \quad (12)$$

6. $$\int_{0}^{\infty}\{f(t)e^{-pt}\}e^{-bt}dt = F(p+b) \quad (13)$$

Интегральное преобразование Бесселя

Под интегральным преобразованием Бесселя функции f(x) понимают интеграл:

$$g(\xi,v) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{X})L_v(x\xi)(X\xi)^{1/2}dx \quad (14)$$

где $L_v(y)$- функции Бесселя или родственные им функции.

Например, если $L_v(x,\xi) = \tau_v(xy)$ где $\tau_v(y)$- функция Бесселя, то преобразование (14) называется преобразованием Ганкеля.

В задачах преобразования Бесселя часто применяют к радиальной переменной в цилиндрической или сферической системах координат.

Формулы приближенного обращения преобразований Лапласа

Применение интегрального преобразования Лапласа при решении динамических задач приводит к весьма сложной проблеме обращения преобразования Лапласа. Лишь для частиц видов зависимостей функции F(p) от переменной p такое обращение возможно с помощью справочных руководств.

Поэтому весьма полезны приближенные формулы обращения.

Прежде чем переходить к изложению некоторых приближенных формул обращения, приведем точную формулу обращения, принадлежащую D.V.Widder.

Согласно (5)

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{15}$$

Возьмем n-ю производную от правой и левой части формулы (15)

$$F^n(p)=(-1)^n\int_0^\infty t^n f(t)e^{-pt}dt \tag{16}$$

Для преобразования правой части (16) заметим, что выполняются соотношения:

$$\int_0^\infty t^n e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}} \tag{17}$$

$$\frac{p^{n+1}t^n e^{-pt}}{n}\approx\delta\left(t-\frac{n}{p}\right) \tag{18}$$

где δ(ξ)- дельта функция Дирака, причем сходимость в левой части формулы (18) к δ(t-n/p) быстрая.

Умножая правую и левую части формулы (16) на $(p^{n+1})/n!$ с использованием соотношения (18) получим:

$$\frac{p^{n+1}F^{(n)}(p)}{n!}\approx(-1)^n\int_0^\infty f(t)\delta\left(t-\frac{n}{p}\right)dt \tag{19}$$

откуда

$$f(t)=\underset{n\to\infty}{Iim}\left\{\left[\frac{(-1)^n p^{n+1}}{n!}F(p)\right]p=n/t\right\} \tag{20}$$

Формула (20) является точной формулой обращения преобразования Лапласа. Но данная формула неудобна тем, что требует знания производных любого порядка от функции F(p).

Приведем ряд формул приближенного обращения преобразований Лапласа.

1) Если функция F(p) при бывших P разложена в ряд по (1/p), т.е.

$$F(p)=C_0+C_{1/p}+C_{2/p2}+........ \tag{21}$$

2) Пусть функция f(t) представима в виде

$$f(t)\approx f_A(t)=\sum_{j=1}^{n}A_j*e^{-t/t_j} \tag{22}$$

где A_j – неопределенные коэффиценты, а t_j - заданные положительные константы.

Определяя A_j из условия минимума квадратичной ошибки

$$E^2=\int_0^\infty[f(t)-f_A(t)]^2dt \tag{23}$$

получим систему алгебраических уравнений относительно A_j вида:

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{Aj}}{\mathrm{p}+(1/\mathrm{t}_j)}\right]_{p\to1/t_j}=[F(p)]_{p\to1/t_j} \tag{24}$$

3) Предположим, что в окрестности t=0

$$f(t) = t^k fo(t), \qquad \mathrm{fo}(0) \neq 0, k \succ 0 \tag{25}$$

тогда интеграл (15) можно представить как:

$$F(p) = \int fo(t)\left[t^k e^{-pt}\right]dt \tag{26}$$

в силу соотношений (17-18) имеем:

$$t^k e^{-pt} \approx \frac{\Gamma(k+1)}{p^{p+1}}\delta\left(t - \frac{k}{p}\right)dt \tag{27}$$

следовательно, интеграл (26) можно представить в виде

$$F(p) \approx \frac{\Gamma(k+1)}{p^{p+1}}\int_0^\infty fo(t)\delta\left(t - \frac{k}{p}\right)dt \tag{28}$$

откуда вытекает, что

$$fo(t) \approx \frac{K^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\frac{F(k/t)}{t^{k+1}} \tag{29}$$

или

$$fo(t) \approx \frac{K^{k+1}}{\Gamma(k+1)t}F\frac{k}{t} \tag{30}$$

Очевидно, чем больше k, тем точнее дается отображение формулой (30).

Формула (30) более удобна для обращения преобразования Лапласа, чем (20) требует знания лишь самой функции F(p), таким образом можно получить и дальнейшее обобщение формулы (30).

Литература:

1. Филиппов И.Г. Иследование волновых процессов и линейных вязкоупругих средах при воздействии динамических нагрузок // Труд всесоюзной конф. по реологии грунтов. -Ереван, 1995.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973.
3. Филиппов И.Г., Чебан В.Т. Матиматическая терия колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиница, 1998.

Резюме

В этой работе при исследовании динамических процессов в линейных термовязкоупругих средах, наряду с известными методами, связанными с применением различных интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Бесселя. Развиваются новые методы, расширяющие класс решаемых задач.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнение, динамический процесс, преобразования, методы.

Түйіндеме

Бұл жұмыста белгілі Фурье, Лаплас, Бессель атты түрлі интегралдық өзгерістерді пайдалану аясында жаңа әдістемелік жолдары ұсынылған. Шешілетін есептер сыныбын кеңейтетін әдістер жаңаша дамытылған.

Кілт сөздер: интегродифференциалдық теңдеу, динамикалық үдеріс, өзгерістер, әдістер.

Summary

New methods expanding the type of solving tasks which deal with the applying of different integral transformations Furie, Laplas, Besse under the investigation of dynamic processes in linear thermoviscouselastic environments are being developed in this work. The practice shows that the applying of integral thansformations, for example Laplas's during the solving of dynamic tasks lead to difficult problem of treatment.

Key words: integrodifferencaile type, dipamic processes, transformations, method.

ӘОЖ 515.127

ПАРАБОЛАЛАР ТАРМАҚТАРЫНЫҢ ЖИЫНЫ ҮШІН ҚОЙЫЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҚ ГЕОМЕТРИЯНЫҢ ЖАЗЫҚ ЕСЕБІ ШЕШУІНІҢ ШАРТТЫ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Т.Б. ДІЛМАН, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент,
Ж.И. ҚАСЫМОВА, магистрант
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Мұнда

$$x = \xi + (\eta - y)^2, \quad y \le \eta$$

қисықтарының $L(\xi, \eta)$ жиынында белгісіз $u(x, y)$ функциясынан алынған

$$v(\xi, \eta) = \int\limits_{L(\xi,\eta)} u(x, y)dy$$

интегралдар бойынша $u(x, y)$ функциясы ізделінетін интегралдық геометрия есебі [1, 2] шешуінің орнықтылығы зерттелінеді. Осы $u(x, y)$ функциясы

$$\overline{D} = \{(x, y); \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad a \succ 0, \quad b \succ 0\}$$

облысында финитті функция және екі рет үздіксіз дифференциалданады деп қарастырамыз.

Теорема. Корректіліктің

$$M = \{u(x, y): \quad \|u\|_{W_2^1} \le C_0, \quad \forall y \in [0, H] \quad \int\limits_0^a u(x, y)dy = 0\}$$

жиынында шартты орнықтылықтың мына

$$\|u\|_{L_2(\overline{D})} \le \sqrt[3]{\frac{4C_0}{\pi}} \sqrt[3]{\|v\|^2_{L_2(\overline{D})}}$$

бағалауы орынды.

Дәлелдеу. Қисық сызықты (1) интегралды анықталған

$$v(\xi, \eta) = \int\limits_0^\eta u(\xi + (\eta - y)^2, y)dy$$

интегралға келтіреміз.

Теңдеудің екі жағына ξ, η айнымалылары бойынша Фурье түрлендіруін қолданып, интегралдау ретін ауыстырғанда мынаны аламыз:

$$\tilde{v}(\lambda, p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(\xi, \eta) e^{i(\lambda\xi + p\eta)} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda\xi + p\eta)} d\xi d\eta \int\limits_0^\eta u(\xi + (\eta - y)^2, y)dy =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\xi}d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{ip\eta}d\eta\int_{0}^{\eta}u(\xi+(\eta-y)^2,y)dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\xi}d\xi\int_{0}^{+\infty}dy\int_{y}^{\eta}u(\xi+(\eta-y)^2,y)e^{ip\eta}d\eta=$$

$$=\left|\eta-y=t\right|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\xi}d\xi\int_{0}^{+\infty}dy\int_{0}^{+\infty}u(\xi+t^2,y)e^{ipt}e^{ipy}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\xi}d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{ipt}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}u(\xi+t^2,y)e^{ipy}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\xi}d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{ipt}\overline{u}(\xi+t^2,p)dt=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{ipt}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{u}(\xi+t^2,p)e^{i\lambda\xi}d\xi=\left|\xi+t^2=\tau\right|=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{ipt}e^{-i\lambda t^2}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{u}(\tau,p)e^{i\lambda\tau}d\tau=\tilde{u}(\lambda,p)\int_{0}^{+\infty}e^{i(pt-\lambda t^2)}dt.$$

Сонымен, біз

$$\tilde{v}(\lambda,p)=\Phi(\lambda,p)\tilde{u}(\lambda,p)$$

теңдеуін алдық, мұнда

$$\Phi(\lambda,p)=\int_{0}^{+\infty}e^{i(pt-\lambda t^2)}dt.$$

Енді осы интегралды белгілі [3] 3.693.1 және 3.693.2 формулалардың көмегімен $\lambda\neq 0$ болған жағдайда есептейміз:

$$\int_{0}^{+\infty}\cos(-\lambda t^2+pt)dt=\frac{1}{2}(\cos\frac{p^2}{4|\lambda|}+\sin\frac{p^2}{4|\lambda|})\sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda|}},\quad \lambda\neq 0;$$

$$\int_{0}^{+\infty}\sin(-\lambda t^2+pt)dt=\frac{sign}{2}(\sin\frac{p^2}{4|\lambda|}-\cos\frac{p^2}{4|\lambda|})\sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda|}},\quad \lambda\neq 0.$$

Сонда $\lambda\neq 0$ үшін

$$\Phi(\lambda,p)=\int_{0}^{+\infty}[\cos(-\lambda t^2+pt)+i\sin(-\lambda t^2+pt)]dt=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\frac{p^2}{4|\lambda|}+\sin\frac{p^2}{4|\lambda|})\sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda|}}+i\frac{sign}{2}(\sin\frac{p^2}{4|\lambda|}-\cos\frac{p^2}{4|\lambda|})\sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda|}}.$$

Бұдан

$$\left|\Phi(\lambda,p)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda|}}[(\cos\frac{p^2}{4|\lambda|}+\sin\frac{p^2}{4|\lambda|})^2+i\frac{sign}{2}(\sin\frac{p^2}{4|\lambda|}-\cos\frac{p^2}{4|\lambda|})^2]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda|}}\sqrt{2\cos^2\frac{p^2}{4|\lambda|}+2\sin^2\frac{p^2}{4|\lambda|}},\quad \lambda\neq 0,$$

немесе

$$\left|\Phi(\lambda,p)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda|}},\quad \lambda\neq 0.$$

Финитті $u(x,y)\in C^2(\overline{D})$ функциясы үшін

$$\left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right| \le \frac{C}{|\lambda|},\quad |\lambda| \ge 1$$

теңсіздігін қанағаттандыратын тұрақты $C \succ 0$ саны табылады. Сонда $u(x,\ y)$ функциясына қатысты жасалған шарттардан мынаны анықтаймыз:

$$\left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right| \le \frac{C}{|\lambda||p|^{k(p)}},\quad k(p) = \begin{cases} 1, & |p| \ge A \succ 0, \\ 0, & |p| \prec A + \infty, \end{cases}$$

немесе

$$\left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right|^2 \le \frac{C^2}{\lambda^2 p^{2k(p)}}. \qquad (1)$$

Әрі қарай керек болғандықтан келесі меншіксіз

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp$$

интегралының жинақтылығын көрсетейік. Ол үшін интегралдау облысын 3 бөлікке бөліп, бұл интегралды былай жазамыз

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-1} \left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{1} \left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{1}^{+\infty} \left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp. \qquad (2)$$

Теңдіктің оң жағындағы әрбір интегралдың жинақтылығын көрсету жеткілікті болады.

Енді (1) теңсіздіктің көмегімен (2) формуланың оң жағындағы бірінші интегралды бағалаймыз

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-1} \left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp \le C^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-1} \frac{d\lambda dp}{|\lambda|\lambda^2 p^{2k(p)}} = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{p^{2k(p)}} \int_{-\infty}^{-1} \frac{d\lambda}{|\lambda|\lambda^2} \le \tilde{C} = const.$$

Дәл осы сияқты (2) формуланың оң жағындағы үшінші интегралды бағалаймыз

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{1}^{+\infty} \left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp \le \tilde{C}.$$

Қарастырылып отырған (2) формуладағы екінші интегралдың жинақтылығын дәлелдеу үшін келесі лемма қажет болады.

Лемма. Кез келген натурал n саны үшін мына

$$\left|\tilde{u}_{\lambda^n}^{(n)}(0,\ p)\right| \le \frac{Ca^{n+1}}{|p|^{k(p)}}$$

бағалау орынды [2], мұндағы $\tilde{u}_{\lambda^n}^{(n)}(\lambda,\ p)$ дегеніміз $\tilde{u}(\lambda,\ p)$ функциясының λ бойынша n ретті туындысы.

Фурье түрлендіруінің регулярлығы негізінде $\tilde{u}(\lambda,\ p)$ функциясын λ айнымалысы бойынша 0 нүктесінің аймағында жинақталатын Тейлор қатарына

$$\tilde{u}(\lambda,\ p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \tilde{u}_{\lambda^n}^{(n)}(0,\ p),\quad |\lambda| \le A \prec +\infty$$

жіктеуге болады. Қосымша $\int_0^a u(x,\ y)dy = 0$, $\forall y \in [0,\ b]$ немесе $\tilde{u}(0,\ p) = 0$ шартын ескеріп, мынаны аламыз

$$\left|\tilde{u}(\lambda,\ p)\right| \le |\lambda|\left|\tilde{u}'_{\lambda}(0,\ p)\right| + \frac{\lambda^2}{2!}\left|\tilde{u}''_{\lambda^2}(0,\ p)\right| + \ldots + \frac{|\lambda|^n}{n!}\left|\tilde{u}_{\lambda^n}^{(n)}(0,\ p)\right| + \ldots,$$

себебі Тейлор қатары абсолютті жинақталады. Соңғы формулада леммада дәлелденген теңсіздікті пайдаланамыз

$$|\tilde{u}(\lambda,\ p)| \le |\lambda| \frac{Ca^2}{|p|^{k(p)}} + \frac{\lambda^2}{2!}\frac{Ca^3}{|p|^{k(p)}} + \ldots + \frac{|\lambda|^n}{n!}\frac{Ca^{n+1}}{|p|^{k(p)}} + \ldots \le$$

$$\le \frac{|\lambda| Ca^2}{|p|^{k(p)}}[1 + \frac{|\lambda| a}{2!} + \ldots + \frac{|\lambda|^{n-1} a^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots] = \frac{|\lambda| Ca^2}{|p|^{k(p)}} e^{|\lambda| a},$$

немесе

$$|\tilde{u}(\lambda,\ p)|^2 \le \frac{\lambda^2 C^2 a^4}{p^{2k(p)}} e^{2|\lambda| a}.$$

Соңғы теңсіздіктің көмегімен (2) формуланың оң жағындағы екінші интегралды бағалай аламыз

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{1} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp \le C^2 a^4 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{1} \frac{\lambda^2}{p^{2k(p)}|\lambda|} e^{2|\lambda| a} d\lambda dp =$$

$$= C^2 a^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{p^{2k(p)}} \int_{-1}^{1} |\lambda| e^{2|\lambda| a} d\lambda = const.$$

Сонымен, (2) интеграл жинақты болатынын көрсеттік. Демек,

$$\|v\|_{L_2} = \|\tilde{v}\|_{L_2} = \|\tilde{u}\Phi\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^2 |\Phi(\lambda,\ p)|^2 d\lambda dp} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^2 \frac{\pi}{4|\lambda|} d\lambda dp} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^2 \frac{1}{|\lambda|} d\lambda dp}.$$

Енді Парсеваль теңдігі мен Гёльдер теңсіздігі бойынша мынаны

$$\|u\|_{L_2}^2 = \|\tilde{u}\|_{L_2}^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^2 (\frac{1 + p^2 + \lambda^2}{\lambda^2})^{\frac{1}{3}} d\lambda dp =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^{\frac{2}{3}} (1 + p^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{3}} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{3}}} d\lambda dp \le$$

$$\le \{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^2 (1 + p^2 + \lambda^2) d\lambda dp\}^{\frac{1}{3}} \{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\lambda,\ p)|^2 \frac{1}{|\lambda|} \lambda dp\}^{\frac{2}{3}} \le$$

$$\le \{\|u\|_{W_2^1}^2\}^{\frac{1}{3}} \{(\frac{2}{\sqrt{\pi}})^2 \|v\|_{L_2}^2\}^{\frac{2}{3}}$$

аламыз. Олай болса,

$$\|u\|_{L_2(\overline{D})} \le (C_0 \frac{4}{\pi})^{\frac{1}{3}} \|v\|_{L_2(\overline{D})}^{\frac{2}{3}}.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

Әдебиеттер:

1. Лаврентьев М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
2. Елубаев С.Е. Гиперболалық және параболалық теңдеулер үшін кейбір кері есептер. Жауапты ред. Ғ. Б. Баканов. 2-ші басылымы. – Қызылорда: PRINT, 2012. – 236 б.
3. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Түйіндеме

Математикалық физиканың корректілі емес есептері интегралдық геометрия есептеріне келтірілуі мүмкін. Мақалада интегралдық геометрияның жазықтықтағы есебі қарастырылады. Осы есеп шешуінің шартты орнықтылығы көрсетіледі. Корректілік жиынындағы шешудің орнықтылығының бағалауы анықталды.

Кілт сөздер: математика, параболалық теңдеулер, гиперболалық теңдеулер, интегралдық геометрия, корректілі емес есептер.

Резюме

Некорректные задачи математической физики могут быть сведены к задачам интегральной геометрии. В статье рассматривается задача интегральной геометрии на плоскости. Показывается условная корректность решения этой задачи. Определяется оценка устойчивости решения на множестве корректности.

Ключевые слова: математика, параболические уравнения, гиперболические уравнения, интегральная геометрия, некорректные задачи, оценка устойчивости.

Summary

The ill-posed problems of mathematical physics can be reduced to problems of integral geometry. This article deals with the problem of integral geometry on the subspace conditional orrectness of solving this problem is shown solutions on the set correctness is defined.

Key words: mathematics, parabolic equation, hyperbolic equations, integral geometry, ill-posed problems, sustainability assessment.

ӘОЖ 622.245.78

МҰНАЙ ӨНІМІН ӨНДІРУДІҢ ЫҒЫСТЫРУ ПРОЦЕССІНІҢ МОДЕЛІ

А.Ө ЕСІРКЕПОВА, М.Т. АЙМБЕТОВА, А.С. КОНИРБАЕВ - магистранттар
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекттік университеті, Қазақстан Республикасы

Қазақстан – мұнай мен газға бай ел. Мұнай өнімінің қоры бойынша ТМД елдері арасынан Ресейден кейінгі екінші, әлемде оныншы орында. Республикада 164 ашық мұнай кен орындары бар, солардың ішінен өнім өңдеумен 60 кен орыны ғана айналысады. Қазіргі кезде мұнай өндіруді көтеру дүние жүзілік қоғамдағы энергиямен қамтамасыз етудің бас проблемасының бірі екені рас [1].

Ал мұнай өндіру орындарын зерттеу барысында, басқару мен реттеу, сұрақтарын эффективті шешу, проектілеу, талдау және бақылау үшін осы заманғы автоматтандырылған жүйелерді, компьютерлік техникаларды қолдану арқылы іске асырылады. Мұнай өнімін өндірудің ығыстыру процессінің математикалық моделін құру есептерінің бағдарламалық өнімін дайындайтын бірнеше бағдарламалау орталары бар. Ғылыми жағдаятты талдаудың қуатты құралының бірі –модельдеу. Модель дегеніміз нақты объекті мен жүйенің немесе түсінік пен идеяның шын мәнісіндегі қалыбынан ерекше түрде берілген көрініс.

Математика моделін талдау арқылы зерттеуші жүйе дамуын алдын-ала біліп, алынатын нәтижелерді салыстыра алады. Модельдің автоматтандырылған жүйесінің техникалық және жұмыстық жобаларын жетілдіру кезеңдерінде жеке жүйеге байланысты жүйелер бөлшектенеді және модельдеу жобалаудың нақты есептерін шешу үшін қызмет жасайды [2].

Мұнай кенорындарынан өнімін өндірудің ығыстыру процесстері суды қуудан және жұмысшы ұңғымадан мұнайды алудан тұрады. Қуу процессі екі топқа бөлінеді:

1) қосымша әдістерді қолдану процессі;
2) мұнай және газ конденсатты кенорынындағы қысымды ұстап тұру процессі.

Қазіргі уақытта бұл екі процессте мұнай кенорындарын игерудің негізі болып табылады. Екіфазалы ортаның, яғни қуылатын сұйықтың темпетатурасын есепке алатын мұнай мен судың қозғалысының моделіне тоқталатын болсақ. Практикалық мақсат үшін мұнай өндіретін жүйелерді модельдеудің үлкен маңызы бар. Алдымен, екіфазалық сұйықты жоспарлы фильтрациядан өткізуді қарастырамыз. $\Omega \subset R^2$ қуу және іске қосылатын объекті жүйесінде берілген объект облысы болсын делік. Ұңғыманың радиусы Ω облысы өлшемінен салыстырмалы түрде аз болатындықтан, Ω облысының нүктесін және берілген ұңғымаларын модельдейміз. Бұл макроскопиялық көрсетілімдегі процесс үшін қолданылатын бүтіндей орта жорамалын модельдеу жағдайында толығымен мүмкін. Мұнда ең аз репрезентивті көлем барлық тек қалың пласт m (x,y) болатын тік бағыттағы өлшемде болады.

Демек репрезентивті ең аз көлемді анықтауда барлық ұңғымалар жетілдірілген.
$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots, N1}$ – қуу ұңғымаларының координаттары, ал а $\{(x_i, y_i)\}_{i=N1+1,\dots,N1+N2}$ жұмысқа қосылатын ұңғымалар координаттары болсын делік, мұндағы $(x_i,y_i)\in\Omega$ сті $(\forall i=1,\dots,N_1+N_2)$.

Процессті математикалық түрде жазып көрсету үшін кеуекті ортаға сұйықтық көрсеткіштерін енгіземіз. Кеуекті ортаны n(x,y) деп белгілейміз. Қабылданған тұтас орта жобалауына орай нақты кеуектілік анықтамасын келтіреміз:

$$n(x,y) = \lim_{S(x,y)\to S_p(x,y)} \frac{\int_0^{m(x,y)} S_n(x,y,\xi)d\xi}{S(x,y)\cdot m(x,y)},$$

мұндағы $S_p(x,y)$- ең аз репрезентативті аудан, онда (x,y) нүктесі бар, $S(x,y) - S_p(x,y)$ тұратын кез-келген аудан, $S_n(x,y,\ \xi)$ – S(x,y) ішкі құрамындағы $z=\xi$ көлденең координаттарымен бөлінген пласттың бос кеңістік ауданы, ал m(x,y)- пласт қалыңдығы. Осылайша кеуекті ортаның $k_0(x,y)$ өткізгіштілігін анықтау керек, i- сұйықтықтың сүзгіден өткізу v_i –жылдамдығы , i- ші сұйықтықтың p_i-қысымы, ρ_i – қалыңдығы, S_i – қанығуы, θ_i – температурасы, u_i –қоюлық коэффициенті, индекс i=1,2. Индекстің i=1 суға, i=2 мұнайға қатысты болады. Ұңғымалар шығынын q_i –деп белгілейміз, мұндағы $i=1,\dots,N_1+N_2$.

Математикалық модель негізін жасағанда келесі мәлімдемелерді жасаймыз:

- сұйықтық фазалар және түр тұқымы тығыз байланысты болады, кез-келген элементарлық пласт көлемінде мұнай мен температура бірдей болады. Яғни, $\theta_1=\theta_2=\theta$;
- кеуекті ортаны қысылмайтын деп аламыз;
- жылулық тұрақтылар температура мен қысымға байланысты емес.

Араласпайтын сұйықтықтардың изотермиялық емес біректі емес екіфазалы фильтрацияның математикалық моделі келесі теңдіктерден тұрады:

1. Бөлінбейтіндік теңдеуі;
2. Фильтрацияның негізгі заңы немесе Дарси заңы;
3. Жағдай теңдігі;
4. Жылулық баланс теңдеуі;
5. Температурадан қоюлықтың өзгеріс бағыныштылығы;
6. Копиллярлы қысым теңдеуі.

Бұл теңдіктерді фильтрация жағдайы үшін қарастырайық. Бөлінбейтіндік теңдеуі әрбір фаза үшін массалық өлшем заңын сақтап өрнектейді. Пластағы кіші параллипипедті бөліп алайық, олардың жақтары dx, dy m(x,y) болады, мұндағы m(x,y) пласттың қуаттылығы. Параллипипедтің көлемі dV=mdxdy. Бөліп алынған параллипипед үшін массаны сақтау заңы күшінде сұйықтықтың өзгеруі қысқа уақыт ішінде dt параллипипед шекарасы арқылы dt еңкіші уақытында және шығушы су массасының айырымына тең [3].

Параллипипедтің артқы шекарасынан, x осіне перпендикуляр, $\delta M'_x=\rho_1 v_{1x} m dydt$ сұйықтық массасы ағады. Бұл масса бөлігінің x бағытындағы орын ауыстыруы $\frac{\partial(\rho_1 v_{1x} m)}{\partial x}$ жеке туындысын береді, сәйкесінше dx кесіндісінде артқы шектен алдынғыға қарай массалық жылдамдық $\frac{\partial(\rho_1 v_{1x} m)}{\partial x}dx$ өсімге ие болады. Алдыңғы шек параллелепипедінен сұйықтық массасы өтеді, яғни

$$\delta M''_x = \left[m\rho v_{1x} + \frac{\partial(\rho_1 v_{1x} m)}{\partial x}dx \right] dydt$$

Демек параллелепипедтің артқы шегінен кіріп және алдынан шығатын сұйықтық массасы айырымы мынаған тең: $dM_x = \partial M'_x - \delta M''_x = -\frac{\partial(\rho_1 m v_{1x})}{\partial x}dxdydt$

Осыған орай y бағыты үшін ұқсас операция жүргізу арқылы келесіні аламыз:

$$dM_y = -\frac{\partial(\rho_1 m v_{1y})}{\partial y}dxdydt$$

Тік z осі бағытымен параллелепипедке сұйықтық массасы $\delta M'_z = \sum_{i\in I'} \rho_1 q_i dt$ ағады, мұндағы I' - қуушы ұңғымалар нөмірі. Ал одан шығатын масса $\delta M''_z = \sum_{i\in I''} \rho_1 s_{1i} q_i dt,$

I''- параллелепипедке түскен эксплуатациялық ұңғымалар нөмірі.

Осылайша z осі бағытына dt уақыт ішінде параллелепипедке кірген сұйықтық массасы $\boldsymbol{dM_z = \sum_{i\in I'} \rho_1 q_i dt - \sum_{i\in I''} \upsilon_1 s_{1i} q_i dt.}$

Параллелепипедке кіретін және шығатын сұйықтық массасы мынаған тең:

$$dM = dM_x + dM_y + dM_z = -\left[\frac{\partial(\rho_1 m v_{1x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 m v_{1y})}{\partial y} + \sum_{i\in I''} \rho_1 s_{1i} q_i \frac{1}{dxdy} - \sum_{i\in I'} \rho_1 q_i \frac{1}{dxdy} \right] dxdydt$$

Параллелепипед ішінде t уақыт моментінде $\rho_1 n s_1 dV=\rho_1 n s_1 m dxdy$ сұйықтық массасы бар, ал dt уақыт ішінде берілген масса $\frac{\partial(\rho_1 n s_1)}{\partial t} m dxdydt$ өсімін алады, яғни dt уақыты ішінде параллелепипедтегі сұйықтық массасының өзгерісі, яғни $dM = -\frac{\partial(\rho_1 n s_1)}{\partial t} m dxdydt$ болады. Мұнда біз жердің сығылмайтындығын қолдандық. Теңестірілген айырым өрнегінен dM мен су үшін айырылмайтындық теңдеуін келесі түрде аламыз:

$$\frac{\partial(\rho_1 m v_{1x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 m v_{1y})}{\partial y} + \sum_{i\in I'} \frac{\rho_1 s_{1i} q_i}{dxdy} - \sum_{i\in I'} \frac{\rho_1 q_i}{dxdy} + m\frac{\partial(\rho_1 s_1 n)}{dt} = 0.$$

Ұңғыманың i нөмірі (x_i, y_i) нүктесіне байланғандықтан, $dxdy\to 0$ өтуден

$$\frac{\partial(\rho_1 m v_{1x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 m v_{1y})}{\partial y} + m\frac{\partial(\rho_1 s_1 n)}{dt} + \sum_{i=N+1}^{N_1+N_2} \rho_1 s_{1i} q_i \delta(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{Ni} \rho_1 q_i \delta(x_i, y_i). \quad (1)$$

Екінші (i=2) сұйықтық үшін ұқсас түрлендіру жүргізіп, мұнай үшін бөлінбейтіндік теңдігін аламыз:

$$\frac{\partial(\rho_2 m v_{2x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 m v_{2y})}{\partial y} + m\frac{\partial(\rho_2 s_2 n)}{dt} + \sum_{i=N+1}^{N_1+N_2} \rho_2 s_{2i} q_i \delta(x_i, y_i) = 0. \quad (2)$$

(1) және (2) теңдеулеріндегі $\delta(x_i,y_i)$, ($i=1,\ldots, N_1+N_2$) арқылы $\delta(x-x_i, y-y_i)$ Дирак дельта-функциясын белгілейміз.

Негізгі фильтрация заңы фильтрация жылдамдығы мен градиентті қысым арасындағы бағыныштылықты өрнектейді. Көбіне негізгі фильтрация заңы ретіне Дарси заңы алынады. Көпфазалы фильтрацияның сапалық суретін ескере отырып, әр сұйықтық үшін Дарсидің біріктірілген заңын Маскет және Мерес берді:

$$\vec{v}_i = -k_0(x,y)\frac{\bar{k}_{0i}}{u_i}\left(\nabla p_i - \rho_i \vec{g}\right), \quad i = 1,2 \tag{3}$$

мұндағы k_0 – s_i-ге бағынышты сәйкесті фазалық, ал k_{0i}- s_i-дан тек функция болып табылады және ол қысымнан, шығындардан, тағы басқада сұйықтық ағыны параметрлерінен бағынышты емес, бұл зерттеулерде бірнеше рет бекітілген. Анықтама бойынша s_i қанығуы $0<s^0_i \le s_i \le 1 - s^0_i<1$, $i\neq j$ шектерінде өзгереді және $s_i= s^0_i$ мәніне жеткенде i-ші компонент қозғалысын тоқтатады, ол $k_{0i}(s^0_i)=0$, i=1,2 шартының орындалуын қамтамасыз етеді.

Араласпайтын көпфазалы ағымдарды талдау кезінде, сонымен қатар жазықтық бөлігінде іске асырылатын күш тиімділігі ескерілуі қажет. Екі бірікпейтін сұйықтықтар жанасқан кезінде және қатты жазықтық кеуектілік шекара бөлігі сұйықтық арасында $a\langle\frac{\pi}{2}$ бұрышымен қатты қабырғаға келеді. Екі сұйықтық бөлігі шекарасында фазалық қысым ауытқуы болады, ол копиллярлы қысым деп аталады, яғни:

$$\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_c(x,s), \quad s = \frac{s_1 - s_1^0}{1 - s_1^0 - s_2^0}, 0 \le s \le 1. \tag{4}$$

Копиллярлы қысым p_c бөлік жазықтығы қисығынан анықталады, сонымен қатар s_1 қанығу, кеуекті орта көрсеткіштері, сұйықтық Лаплас формуласымен анықталады:

$$\mathrm{p_c}(x,s) = \overline{\mathrm{p}}(x)\cdot J(s), \overline{\mathrm{p_c}}(x) = \sigma\cos\alpha\left(\frac{n}{|k_0|}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

мұндағы σ - фаза аралық таратылу коэффициенті, J(s)- Леверетта функция, (k_0) – k_0 – өткізгіш тензор детерминаты болып табылады. Көбіне $k_{0i}(s)$ салыстырмалы фазалық өткізілетін және J(s) Леверетта функциясы жұтылу экспериментінен анықталады, жағылу фазасы капиллярлы күш әсерінен жұқпайтын сұйықтықты ығыстырады және ол барлық кеуекті материалмен толтырады. Осының нәтижесінде гистерезис мүмкін жағдайы жасалады. Онда s-ті 0-ден 1- дейін өсіруден $k_{01}(s)$ функциясы 0-ден 1-ге дейін өседі, ал $k_{02}(s)$ 1-ден нөлге дейін кемуінен J(s) функциясы монотонды шексіздіктен нөлге дейін өзгереді [1].

Жылулық баланс теңдеуі- жылу көзінің шыққан бөлігінің жылу мөлшері мен жылу желігі және конвекция арасындағы айырымы қарастырылған көлемдегі жылу мөлшеріндегі уақыт өзгерісне тең. Жылу баланс теңдеуін шығару үшін қарапайым dx, dy және m жақтары ұзындықтары, сонымен бірге берілген қарапайым параллелепипедті аламыз. Онда dt уақыт ішінде параллелепипедке x уақытында кіретін жылу мөлшері мынаған тең:

$$\left[-\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + (\rho_1 v_{1x}c_1 + \rho_2 v_{2x}c_2)\theta\right]dydt\cdot m,$$

мұндағы $\lambda=n\lambda_1 s_1+n\lambda_2 s_2+(1-n)\lambda_3$ – бұл жылу желісінің қосынды коэффициенті; λ_1, λ_2, λ_3 – су, мұнай, бу жылуы желісінің коэффициенттері. Соңғы өрнектегі бірінші мүше (Фурье заңы) мұнай желісі есебінен жылу мөлшерін, ал қалған екі бөлігі жылу мөлшерін конвекция есебін көрсетеді.

Басқа жағынан алғанда, параллелепипедтен x бағытында dt уақытынан шығатын жылу мөлшері:

$$\left[-\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + (\rho_1 v_{1x}c_1 + \rho_2 v_{2x}c_2)\theta\right]mdydt + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\lambda m\frac{\partial\theta}{\partial x} + (\rho_1 v_{1x}c_1 + \rho_2 v_{2x}c_2)m\theta\right]dxdydt.$$

Параллелепипедтен шығатын жылу мөлшері соңғы екі өрнектің айырмасына тең болады:

$$\partial N_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\lambda m\frac{\partial\theta}{\partial x} + (\rho_1 v_{1x}c_1 + \rho_2 v_{2x}c_2)m\theta\right]dxdydt.$$

Енді y бағыты үшінде осыған сәйкес келесі өрнекті табамыз:

$$\partial N_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\lambda m\frac{\partial\theta}{\partial y} + (\rho_1 v_{1x}c_1 + \rho_2 v_{2x}c_2)m\theta\right]dxdydt.$$

∂N_x және ∂N_y қоса отырып, dt уақыт ішінде параллелепипедтен шығатын жылу мөлшерінің қосындысы келесі түрде болады:

$$\mathrm{dN} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[-\lambda m\frac{\partial\theta}{\partial x} + (\rho_1 v_{1x}c_1 + \rho_2 v_{2x}c_2)m\theta\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\lambda m\frac{\partial\theta}{\partial y} + +(\rho_1 v_{1x}c_1 + \rho_2 v_{2x}c_2)m\theta\right]\right\}dxdydt.$$

Ұңғымаларды жылудың ішкі көзі ретінде интерпретациялаймыз. Егер қуу ұңғымалары параллелепипедке түскен болса, онда dt уақыт ішінде ыстық суды қуу есебінен пластқа түсетін жылу мөлшері $c_1\rho_1\theta_i q_i dt$ болады, мұндағы i- ұңғымалар нөмірі, θ_i – қуылатын сұйықтық температурасы. Ішкі көздерден dt уақыт ішінде шығатын жылудың жалпы мөлшері төмендегі формуланы береді:

$$\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}(c_1\rho_{1i}s_{1i}+c_2\rho_2 s_{2i})\,q_i\theta_i dt-\sum_{i=1}^{N_i}c_1\rho_1\,q_i\theta_i dt=dN.$$

Осы уақытта жылу мөлшері көлемге қатысты $(ns_1c_1\rho_1+ns_2c_2\rho_2+(1-n)c_3\rho_3)\theta m dxdy$, мұндағы c_3- жылу сыйымдылығының түрлері, ρ_3 -тығыздығы. Осылайша dt уақытта жылудың жоғалуы мынадай болады:

$$-\frac{\partial}{\partial t}[(ns_1c_1\rho_1+ns_2c_2\rho_2+(1-n)c_3\rho_3)\theta]m\,dxdydt.$$

Соңғы өрнекті $dN+dN^{/}$ қосындысына теңестіре және $dxdy\to0$ шегіне өте отырып, жылу балансының теңдеуін аламыз:

$$m\frac{\partial}{\partial t}(\rho c\theta)-div\big((\rho_1c_1\overrightarrow{v_1}+\rho_2c_2\overrightarrow{v_2})m\theta\big)+m= \qquad (6)$$

мұндағы $\rho c=ns_1c_1\rho_1+ns_2c_2\rho_2+(1-n)c_3\rho_3$. Жағдай теңдігі ρ_1, ρ_2 тығыздығына және n кеуектілік қысымна және температурадан бағыныштылықты көрсетеді, яғни:

$$\rho_1=\rho_1(\rho_1,\theta) \qquad (7),$$

$$\rho_2=\rho_2(\rho_2,\theta) \qquad (8),$$

$$n=n(\rho_1,\rho_1,\theta) \qquad (9).$$

Сонымен қатар, температураға қатысты созылмалы өзгеруін ескеру қажет, демек:

$$u_1=\mu_1(\theta),u_2=\mu_2(\theta)(10).$$

Осылайша изотермиялық емес екіфазалы фильтрацияның математикалық моделі (1) – (10) теңдіктерімен жазылады. Жүйені тұйықтау үшін $s_1+s_2=1$ теңдігін қосамыз. Бұл жүйеде $m(x,y)$, $n(x,y,p_1,p_2,\theta)$, $\rho_1(p_1,\theta)$, $\rho_2(p_2,\theta)$, $\mu_1(\theta)$, $\mu_2(\theta)$, $k_{01}(s)$, $k_{02}(s)$, $k_0(x,y)$, $p_c(x)$, $J(s)$, c_1, c_2, c_3, λ_1, λ_2, λ_3, ρ_3, берілген деп алынады, ал (x_i, y_i), $i=1, \dots N_1+N_2$. Ұңғымалар координаттары q_i ұңғыма шығыны. Ары қарай алынған жүйені түрлендіреміз. Сонда түрлендірілген теңдіктер қосындысы төмендегі түрге келтіріледі:

$$\begin{cases}c_1\mathrm{div}(m\rho\theta\overrightarrow{v_1})+c_2\mathrm{div}(m\rho\theta\overrightarrow{v_2})-m[c_1\rho_1\overrightarrow{v_1}+c_2\rho_2\overrightarrow{v_2}]\nabla\theta+\theta\cdot\\ \cdot\left[\sum_{i=1}^{N_1}c_1\rho_1q_i\delta(x_i,\mathrm{y}_i)-\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}(c_1\rho_1s_{1i}+c_2\rho_2s_{2i})\,q_i\delta(x_i,\mathrm{y}_i)-mc_1\frac{\partial(\rho_1s_1n)}{\partial t}-mc_2\frac{\partial(\rho_2s_2n)}{\partial t}\right]\\ m\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(m\frac{\partial}{\partial t}+nc_2\rho_2s_2+(1-n)c_3\rho_3\right)\theta\right)=m(nc_1\rho_1s_1+nc_2\rho_2s_2+(1-n)c_3\rho_3)\frac{\partial\theta}{\partial t}+\\ +\theta\left[mc_1\frac{\partial(\rho_1s_1n)}{\partial t}+mc_2\frac{\partial(\rho_2s_2n)}{\partial t}\right]\end{cases},$$

(11)

Шекаралы шарттармен қатар қанығудың бастапқы таратылуын бере отырып, (3)-ті (1) мен (2) теңдеулерінің орнына қойып, элементарлы түрлендіру арқылы алынады. Ол түрлендіруді келесі түрде көрсетуге болады:

$$\begin{cases}mn\frac{\partial(\rho_1s_1)}{\partial t}-div\left(k_0\frac{k_{01}m\rho_1}{u_1}\nabla\mathrm{p}_1\right)=\sum_{i=1}^{N}\rho_1q_i\delta(x_i,\mathrm{y}_i)-\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}\rho_1s_{1i}q_i\delta(x_i,\mathrm{y}_i),\\ mn\frac{\partial(\rho_2s_2)}{\partial t}-div\left(k_0\frac{k_{02}m\rho_2}{u_2}\nabla\mathrm{p}_2\right)=-\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}\rho_2s_{2i}q_i\delta(x_i,\mathrm{y}_i),\\ m(nc_1\rho_1s_1+nc_2\rho_2s_2+(1-n)c_3\rho_3)\frac{\partial\theta}{\partial t}-div\big((nm\lambda_1s_1+nm\lambda_2s_2+(1-n)\lambda_3)\nabla\theta\big)-\\ -mk_0\left(\frac{\overline{k}_{01}c_1\rho_1}{u_1}\nabla\mathrm{p}_1+\frac{\overline{k}_{02}c_2\rho_2}{u_2}\nabla\mathrm{p}_2\right)\cdot\nabla\theta=\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}(c_1\rho_1s_{1i}+c_2\rho_2s_{2i})q_i(\theta-\theta_i)\delta(x_i,\mathrm{y}_i)-\\ -\sum_{i=1}^{N}c_1\rho_1q_i(\theta-\theta_i)\delta(x_i,\mathrm{y}_i),\quad \mathrm{p}_2-\mathrm{p}_1=\overline{\mathrm{p}_c}J(s),s=\frac{s_1-s_{10}}{1-s_{10}-s_{20}},s_1+s_2=1.\end{cases} \qquad (12)$$

Бұл жүйеде функцияның s_1, s_2, p_1, p_2, θ бес белгіссізге сәйкесті бес теңдіктен тұрады. Изотермиялық жағдайын (θ=const) есепке алатын салмақ күшін қарастырамыз. Осы жағдайға байланысты (12) жүйе мына түрге келтіріледі:

$$\begin{cases} mn\dfrac{\partial(\rho_1 s_1)}{\partial t} - \operatorname{div}\left(k_0 \dfrac{\overline{k_{01}} m\rho_1}{u_1}\nabla p_1 + \rho_1\vec{g}\right) = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_1 q_i \delta(x_i, y_i) - \sum\limits_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} \rho_1 s_{1i} q_i \delta(x_i, y_i), \\ mn\dfrac{\partial(\rho_2 s_2)}{\partial t} - \operatorname{div}\left(k_0 \dfrac{\overline{k_{02}} m\rho_2}{u_2}\nabla p_2 + \rho_2\vec{g}\right) = -\sum\limits_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} \rho_2 s_{2i} q_i \delta(x_i, y_i), \\ p_2 - p_1 = \overline{p_c} J(s), s = \dfrac{s_1 - s_{10}}{1 - s_{10} - s_{20}}, \\ s_1 + s_2 = 1, \\ \rho_1 = \rho_1(p_1), \rho_2 = \rho_2(p_2). \end{cases} \qquad (13)$$

Маскет –Леверетт моделі ретінде (12) жүйесі белгілі, онда Дарси мен Леверетта заңдары жалпыланған. Тең күшті екі фазалы фильтрацияның математикалық моделі деп (12), (13) жүйелері аталады.

Әдебиеттер:

1. Журнал Мұнайшы / ПетроКазахстан компаниясының қызметкерлеріне арналған корпоративтік басылым. – 2012. - 4 б.

2. Шукаев Д.Н. Компьютермен модельдеу негіздері.- Алматы: ЖШС РПБК Дәуір, 2011. - 114 бет.

3. Айдарбаев А.С. Теория и практика разработки нефтяного месторождения Кумколь.- Алматы: Ғылым, 2005. - 202 б.

Түйіндеме

Мұнай өнімін өндірудің ығыстыру процессі суды қуудан және жұмысшы ұңғымадан мұнайды алудан тұрады. Біздің мақсатымыз екіфазалы ортада қуылатын сұйықтың темпетатурасын есепке алатын мұнай мен судың қозғалысының моделіне тоқталап, екі фазалық сұйықты жоспарлы фильтрациядан өткізуді қарастырып, тең күшті екі фазалы фильтрацияның математикалық моделін аламыз.

Кілт сөздер: Процесс, екіфазалы, модель, фильтрация, градиент, макроскопия, индекс, температура, изотермия, эксплуатация.

Резюме

Процесс вытеснения добычи нефти включает нагнетание воды и забор нефти из эксплуатационныых скважин. В статье строятся модели движения в двухфазовой среде с учетом температуры нагнетаемой жидкости, рассмотривается двумерная плановая фильтрация двухфазной жидкости, математическую модель равновесной двухфазной фильтрации.

Ключевые слова: Процесс, двухфазная, модель, фильтрация, градиент, макроскопия, индекс, температура, изотермия, эксплуатация.

Summary

The process of displacement of oil includes water inject and intake from exploitation wells. We will build the models of motion in a two phase environments taking into account the temperature of the injection fluid, we will consider two-dimensional filtering of the planned two phase fluid, we will get the mathematical model of the equilibrium two-phase filtration.

Key words: Process, two-phase, model, filtration, gradient, macroiscopy, index, temperature, isothermal, exploitation.

УДК 004.314

О МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМЫ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО РАССЕЛЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ НАСЕЛЕННЫХ МЕСТ

К. К. ЗАУРБЕКОВА
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана,
Республика Казахстан

Введение

На сегодняшний день существуют много математических моделей и методы систем расселения населения. Система расселения населения и размещение населенных мест, особенности их формирования, функционирования и развития во взаимосвязи с социально-экономическими **и** природными условиями являются одной из основных задач Республики Казахстан.

В свою очередь система расселения населения формирует материально-пространственную среду жилой застройки, города, села, пространственно организует ландшафт обширных систем расселения. В силу этого система расселения населения связана с осуществлением широкого круга задач, отражающих требования развития производства, повышения уровня жизни населения, рационального использования и охраны природных ресурсов.

В отличие от других сфер социального и экономического территориального планирования, расселение населения связано с реализацией строительных программ, и соответственно, является одновременно областью планирования строительного производства. Поэтому отражает одновременно две цели: создание среды для осуществления многообразных социально-экономических процессов и организация строительного производства. Соответственно в своих исследованиях и оценках отражена принимаемые решения в двух аспектах: с позиций обшей социально-экономической эффективности и с позиций эффективности строительного производства.

Для территориального расселения населения и размещения населенных мест разработаны достаточно широкий спектр методов решения как на уровне анализа сформировавшейся или формирующейся системы расселения населения, так и на уровне ее моделирования, и включают себе большой арсенал методов математической статистики, нелинейных динамических моделей транспортного типа, многокритериальные задачи оптимизации и т.п.

Методы исследования

Социально-демографические исследования направлены на выявление структуры населения в ее динамике. Население рассматривается в двух аспектах: применительно к вопросам размещения и организации производства – как трудовые ресурсы и применительно к организации сферы потребления – как потребител благ и услуг.

Первый аспект требует знания численности населения, его половозрастного состава, соотношения трудоспособного и нетрудоспособного населения, профессиональной и квалификационной структуры населения, данных по миграциям (территориальной подвижности) населения.

Территориальная организация производства расселения населения рассматривается с задачами формирования комплексов производств в масштабе города и региона. Целями которого служат: обеспечение экономического эффекта от комбинирования и территориального сближении производства, рационального комплексного использования территориальных и трудовых ресурсов, обеспечение замкнутости производственных циклов, создающей наряду с экономическим эффектом, наиболее благоприятные экологические условия **в** городе и окружающей ею *зоне.*

Знание территориальных закономерностей размещения производства и его пространственной организации дает возможность обоснованного предвидения перспективных расселенческих процессов и принятия конкретных проектных решений по формированию производственных комплексов города, региона.

Обзор существующих методов территориального расселения населения и развития городов

Важным показателем, характеризующим пространственную составляющую урбанизации, является сформированность систем городского расселения как взаимного упорядоченного размещения крупных городов (как главных экономических центров), средних и малых городов, находящихся в зоне их влияния.

В общих схемах размещения населенных пунктов можно выделить 3 основные составные части: *линейная*, в которой размещение населенных пунктов предопределяется транспортными магистралями - автомобильными или железными дорогами, судоходными реками; *алгомерационная*, где скопление населенных пунктов с различными пунктами в системе расселения вокруг крупного города связано с месторождением полезных ископаемых или выгодным географическим положением. *Равномерное размещение* - характерно для населенных пунктов, выполняющих функции центров обеспечения товарами и услугами равномерно размещенного сельского населения.

Иерархия городов. Правило Ципфа. Согласно правилу Ципфа, если территория представляет собой целостный экономический район, население n-го по размеру города составляет 1/n числа жителей самого крупного города.

$N_r = N1/r$, где r - ранг данного города, N_r - численность населения города ранга r, $N1$ - численность населения самого крупного города

По графику, построенному по правилу Ципфа, можно судить о распределении городов и о сформированности системы городского расселения, в которой сосуществуют крупные, средние и малые города, и, при наличии соответствующих статистических данных - о динамике во времени системы городского расселения изучаемой территории.

Такой тип характерен для страны с короткой историей развития экономики современного типа, неразвитой системой городов при доминирующей роли единственного крупного города, работающего в большей степени «вовне», а не на территорию страны.

Если для территории характерна высокая плотность населения и она «насыщена» городами, то реальная кривая будет располагаться выше идеальной.

Правило Ципфа выполняется при ранжировании городов, численность населения которых превышает 1 тыс. чел.

Модель центральных мест В. Кристаллера. Центральное место - синоним города, центр для всех других населенных пунктов данного района, обеспечивающий их "центральными товарами" и "центральными услугами";

Дополняющие районы - территории, обслуживаемые центральными местами;

Конус спроса - радиус зоны сбыта центральных товаров, нижний предел которого определяется пороговым размером рынка, а верхний - расстоянием, вне которого центральное место уже неспособно сбывать свой товар. В размещении городов в модели Кристаллера существует четкая зависимость между их размерами и уровнем развития функций центра розничной торговли.

Размещение городов в модели Кристаллера обеспечивает оптимальное перемещение потребителей товаров и услуг – к самым близким к месту их проживания центральным местам. Таким образом, рыночная, транспортная инфраструктура и административная структура оптимизируются.

Шестиугольная (гексагональная) структура возникает в результате стремления разместить на плоскости максимально возможное количество конусов спроса. Если города размещаются в узлах решетки, это значит, что территория будет обслуживаться минимальным числом центральных мест и данное размещение будет отвечать критериям оптимизации рыночной структуры. Если города размещаются в середине ребер, то оптимальным становится транспортное сообщение между центральными местами.

Теория сельскохозяйственного штандорта Й. Тюнена. Главным содержанием этой теории было выявление закономерностей размещения сельскохозяйственного производства. Исследование Й. Тюнена отличали высокий уровень абстракции, точные формулировки поставленных задач. Он предполагает наличие экономически изолированного от остального мира государства, в пределах которого имеется центральный город, являющийся единственным рынком сбыта сельскохозяйственной продукции и источником обеспечения промышленными товарами. Цена каждого продукта в любой точке пространства отличается от его цены в городе на величину транспортных затрат, которые принимаются прямо пропорциональными весу груза и дальности перевозки.

Й. Тюнен выделял шесть поясов *(колец)* размещения сельскохозяйственной деятельности, основываясь на условиях ведения хозяйства в своем имении в Мекленбурге. Ясно, что при других условиях конкретный состав поясов будет другим, но принцип их чередования сохранится.

Нахождение расстояния, отделяющего зоны размещения тех или иных видов сельскохозяйственной деятельности от центра сбыта, осуществляется по простым формулам.

Работа Й.Тюнена была первым и весьма показательным примером использования абстрактных математических моделей в теории пространственной экономики. Ее важное методологическое значение признано в мировой экономической науке.

Метод гравитационного поля У.Рейли. Другим методом определения точки, минимизирующей затраты на передвижения, может служить метод, основанный на гравитационном законе Рейли У., суть которого заключается в определении потенциалов территорий города по критерию доступности.

Метод определения потенциалов поля расселения учитывает абсолютную численность населения и его территориальное распределение. Результаты расчета потенциала в каждой точке поля расселения наносятся на план города, точки равными или близкими значениями соединяются изолиниями. Территория, обладающая наивысшим потенциалом, наиболее предпочтительна для размещения главного городского фокуса тяготения с точки зрения минимизации затрат на передвижения. При решении задачи в качестве «веса» расчетного района, кроме численности населения, могут вводиться другие параметры – строительные и эксплуатационные затраты, затраты на инженерное оборудование территории, градостроительные и эстетические характеристики площадок. В качестве расстояния может быть принято время, затрачиваемое на передвижение.

Далее можно рассматривать другие модели территориального расселения населения такие как: Рациональный штандорт промышленного предприятия В.Лаунхардта, Теория промышленного штандорта А. Вебера, Теория Хекшера – Олина или теория международного (межрегионального) разделения труда, “Экономический ландшафт” Августа Леша, Модель Кольба или «моделью правильного распределения гнезд».

Заключение

Анализ существующих математических модель и методов, применяемых в системе расселения населения и размещении населенных мест позволяют: исследовать сложившуюся или формируемую (моделируемую) ситуацию Республики Казахстан; получать объективную информацию о характере и принципах функционирования отдельных элементов и подсистем системы расселения населения; прогнозировать характер и направления развития различных подсистем города на основе знания закономерностей их функционирования и взаимодействия; принимать корректные и аргументированные проектные решения на основе получаемой с помощью данных методов информации.

Комплексная оценка методологического и математического аппаратов, примененных в ходе подготовки моделирования территориального расселения населения и развития городов Казахстан показывает. Для моделирования системы территориального расселения населения и размещения населенных мест необходимы: методы и модели демографии в прогнозах изменении численности населения городов (регионов, поселков, сел), возможности использования законов Ципфа-Мандельброта в прогнозных расчетах социально-экономических процессов и др.; расчеты городского населения с использованием метода трудового баланса; методы изучения в существующей системе расселения населения и структуры уровня занятости трудовых ресурсов по сферам приложения труда; выявление ключевых показателей причинных основ миграции методами факторного анализа (методом главных компонент и др. методами); расчеты ресурсного потенциала населенных мест (региона); расчеты вариантов создания инвестиционной привлекательности для обеспечения уровня занятости населения (с целью изменения значения ключевых показателей – причинных основ миграции населения); методы балансовых расчетов для создания благоприятного условия и обеспечения жизнедеятельности жителей населенных мест.

На основе данных методов разработаны программные продукты, позволяющие прогнозировать численность населения в разрезе половозрастных групп по областям.

Литература:

1. Бранч М. Проектирование городской среды. – М.: Стройиздат, 1999. – 405 с.
2. ВаженинА. А. Эволюционные процессы в системах расселения. - Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 1997.

3. Гранберг А. Г. Об идеях Августа Лёша по пространственной организации хозяйства: оценки советских экономистов и географов. Препринт. Институт экономики и организации промышленного производства СО АН СССР. - Новосибирск, 1986.

4. ГранбергА. Г. Основы региональной экономики. - М.: Государственный университет — Высшая школа экономики, 2000 (2001, 2003, 2004).

5. Гутнов А.Э. Город как объект системного исследования. – М.: Наука, 2001. – 384 с.

6. Занадворов В.С., Занадворова А.В. Экономика города: Учебное пособие. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. – 272 с.

7. Зеленов Л.А. Социология города: Учебное пособие. – М.: Владос, 2000. – 192 с.

8. Зимин Б. Н. Размещение производства в рыночной среде. - М.: Альфа-М, 2003.

9. Лаппо Г.М. География городов: Учебное пособие. – М.: Владос, 1997. – 480 с.

10. Лёш А. Географическое размещение хозяйства. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.

11. Мерлен П. Город (количественные методы изучения). – М.: Стройиздат, 2005. – 280 с.

12. Николаевская И.А. Благоустройство территорий: Учебное пособие. – М.: Мастерство, 2002. – 272 с.

13. Пивоваров Ю.Л. Основы геоурбанистики: Урбанизация и городские системы: Учебное пособие. – М.: Владос, 1999. – 232 с.

14. Пчелинцев О. С. Экономическое обоснование размещения производства. Методы, применяемые в капиталистических странах. - М.: Наука, 1966.

15. Родоман Б. Б. Территориальные ареалы и сети. - Смоленск: Ойкумена, 1999.

16. Рубинштейн А. Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. - Новосибирск: Наука, 1983.

Резюме

Работа посвящена анализу систем территориального расселения населения для поселений и районов разного типа в контексте положений центро-периферийной концепции. Рассматриваются некоторые известные модели расселения населения и размещения населенных мест. Исследование может быть положено в основу создания модели территориального расселения населения и размещения населенных мест Республики Казахстан для дальнейшего роста населения и развития населенных мест и городов Казахстана.

Ключевые слова: расселение населения, административно-территориальные единицы, территориальное планирование, численность населения.

Түйіндеме

Жұмыс орталық-шалғай тұғырнама қағидасына сүйеніп халықты әр типтегі ауылдар мен аудандарға арналған территориялық бірқалыпты орналастыру жүйесіне талдау жасауға арналған. Халықты тарата қондыру мен елді мекендерді орналастырудың бірқатар танымал модельдері қарастырылады. Зерттеу Қазақстан Республикасы халқын тарата қондыру мен елді мекендерін орналастырудың негізіне халықтың ары қарай өсуі мен елді мекендердің дамуы үшін қойылған болу керек.

Кілт сөздер: халықты тарата орналастыру, әкімшілік-территориялық бірліктер, территориялық жоспарлау, халық саны.

Summary

The work is dedicatel to the analysis of systems of territorial settlement population for different districts and settlements in the context of the provisions of the Centro-peripheral consept. We consider some the well known models of population distribution and the placement of settlement.

Research can be used as the basis for creating models of territorial settlement population and kazakhstan`s placements of settlement for further grown and development of settlements and kazakhstan`s cities.

Key words: displacement of population, administrative-territorial units, territorial planning and population.

ӘОЖ 004.7:004.738

ВИРТУАЛДЫ БІЛІМ БЕРУ ПОРТАЛЫНЫҢ АЛГОРИТМДІК МОДЕЛІ

Н.Ж.ИБРАГИМОВА, педагогика ғылымдарының кандидаты,
А.Ж.РАХМЕТОВА, магистрант
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қазақстан Республикасы

Қазақстанның инновациялық дамуы ел азаматтарының көптілді меңгеруіне қойылып отырған үлкен міндет. Осыған байланысты Қазақстандағы білім беру орындарында көптілде білім беру бағдарламасы дамып келеді. Көп тілді білім беруді қалыптастыру және дамытудың нормативті-құқықтық базасын, оны ұйымдастыру-әдістемелік және оқу-әдістемелік жағынан қамтамасыздандыру бағытында Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университетінде бірқатар шаралар жүзеге асырылуда.

2012-2013 оқу жылынан бастап Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университетінде көптілді білім беру жұмысы эксперимент жүзінде бастау алды. Университет жанынан көптілді білім беру орталығы құрылып, ол 5В011100-Информатика, 5В070300-Ақпараттық жүйелер, 5В070400-Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету мамандықтарында көптілді оқытуда тығыз байланыста жұмыстарын бастап кетті [1]. Бүгінгі таңда университеттің басқа да мамандықтары бойынша көптілді білім беру бағдарламасына эксперименттік түрде көшіп отыр.

Интернеттің білім саласындағы маңызы да ерекше. Себебі қазіргі замандағы технологиялық жетістіктерге негізделген интернет жүйесі арқылы білім беру жетекші рөл атқарады. Виртуалды интернет жүйесінің білім саласындағы мақсаты: Білім берудің біртұтас ақпараттың жүйесін құру арқылы оқушылар мен студенттердің білім деңгейін көтеру.

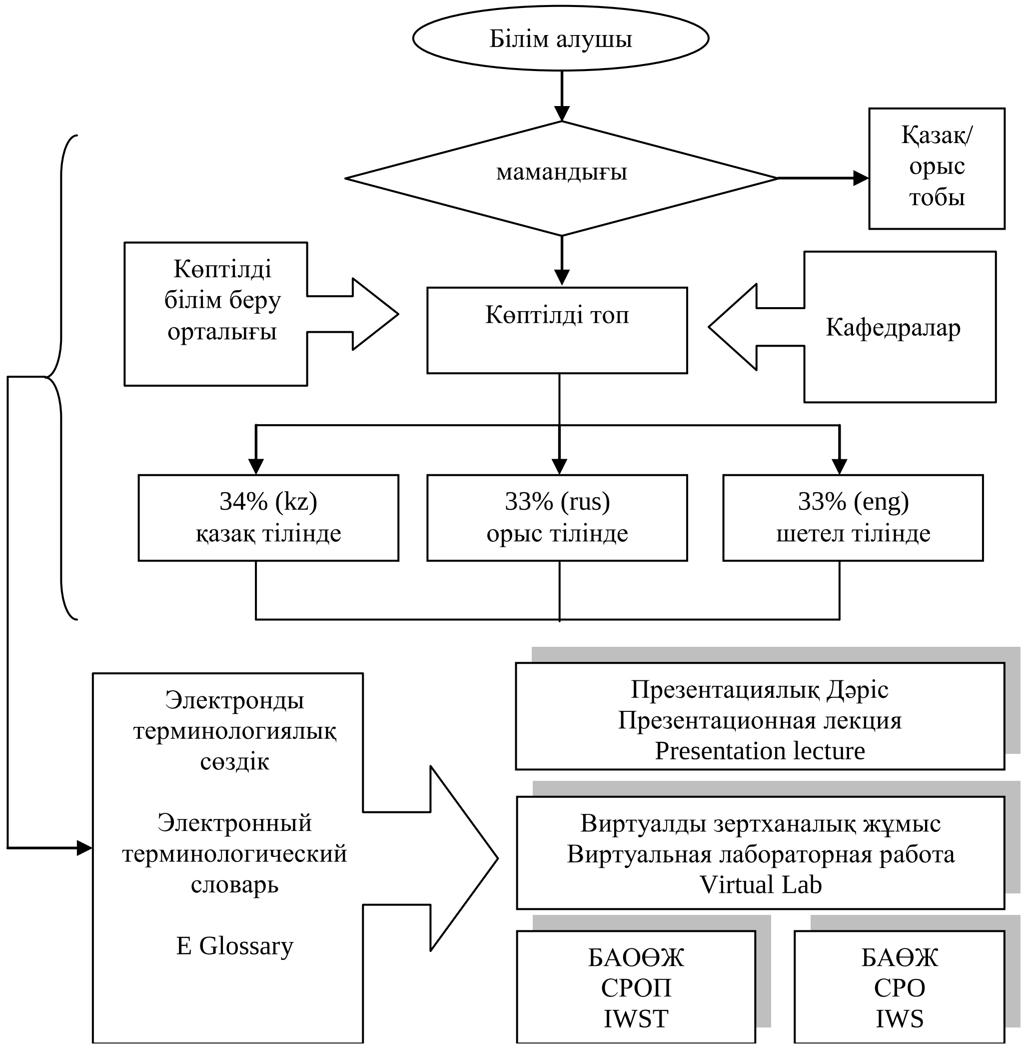
Виртуалды интернет арқылы оқытудың жергілікті жүйесі белгілі бір білім және жекелеген қала (университет) шеңберінде жұмыс атқарады, оның құрамына тек жоғары оқу орындары ғана емес, мектептер, гимназиялар мен колледждер де кіреді. Осындай жүйенің аясында жұмыс жасаудың алғашқы сатысында зиялылық потенциялын, компьютерлік техниканы ұтымды пайдалана отырыш, үздіксіз білім беру принциптерін ойдағыдай іске асыру қажет. Осыған орай, мектептер мен жоғары оқу орындары жергілікті және аймактық желіні пайдаланып, шығармашылық жұмыстарын таратып, оқыту үрдісінде әдістеме бойынша тәжірибе алмасуы қажет. Осыған байланысты виртуалды портал құрудың алгоритмдік моделі құрылды.

Бұл модель бойынша оқуға қабылданған білім алушы алдымен көптілді білім беру тобына бару үшін ағылшын тілінен білімін тексереді. Содан кейін оқу жылдары бойынша оқу пәндері бойынша қазақша, орысша және ағылшынша бөлек оқиды. Сонымен қатар, әрбір білім алушыға ақпараттық жүйелер көмегімен барлық пәндер бойынша электрондық мәліметтер болуы шарт. Себебі, түрлі тілдер бойынша білім алуда мамандық бойынша терминологиялық сөздік, пайдалануға мүмкіндік алатын виртуалды зертханалар мен дәрістердің электрондық нұсқалары толығымен болғаны дұрыс. Төменде көптілді білім беруде ақпараттық жүйелерді пайдалану алгоритмдік моделі көрсетілген.

Сонда әрбір білім алушы, өзіндік жұмыстарын орындау барысында өткізілген мәліметтерді толық пайдалануға мүмкіндік алады. Яғни, барлық тапсырмаларды, лекция жинақтарып, өзіндік жұмыстарының тақырыптарын және олардың орындау технологиясын көрсететін әдістемелік нұсқаулықтарды, әдебиеттер тізімін, практикалық және виртуальды зертханалық жұмыстарды орындай алады. Мамандық бойынша барлық пәндерде кейбір терминдер қайталанатындықтан бөлек түрде «глоссарий» батырмасы арқылы терминдік анықтамалық ақпараттарды ала алады. Алгоритмде көрсетілген «байланыс» бөлігінде сол мамандық пәндері бойынша оқу-әдістемелік кешендерді даярлаған профессор-оқытушылар тізімі мен олардың электрондық мекен-жайлары туралы мәлімет берілген. Ал «өзгерістерде» жыл сайын пәндер бойынша өзгеретін мәліметтер мен толықтыруларды беріп отырады.

Алгоритмдегі «бағдарламаларда» барлық міндетті компоненттер бойынша пәндердің зертханалық жұмыстарын орындауға арналған бағдарламаларды көшіріп алуға мүмкіндік береді.

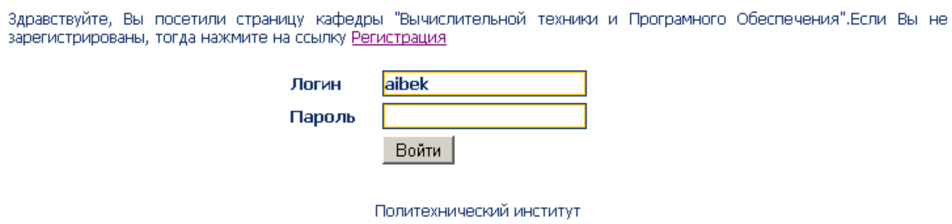
Білім беру порталы арқылы қосымша білім беретін оқытушыларға және осы істе мүдделі басқа да адамдарға бірнеше талаптар қойылады:



Виртуальды білім беру порталының алгоритмдік моделі

- Оқытушы компьютермен жоғары дәрежеде сауатты жұмыс істей білуі қажет.
- Порталды пайдалану мақсаттары мен міндеттері, оның алдағы уақытта ақпараттық технология және коммуникация құралдарының негізінде дамуы туралы білуі қажет.
- Білім беру порталдарының жұмыс істеу принциптерін жетік білетін, білім саласындағы қызметкерлерді, оқушыларды таныстыра білуі қажет.
- Оқытушының ақпараттық құралдармен жұмыс істеуге іс жүзінде дағдылануы қажет.
- Оқытудың телекоммуникациялық құралдарын қолдану ісіне дағдылануын қалыптастыру, атап айтқанда: тұтынушылар арасында ақпараттар алмастыру және ақпараттық жүйелердегі ресурстарды пайдалануға дағдылануын қалыптастыруы қажет.
- Жинақталған түрде оқу бағдарламасын құрайтын белгілі бір тәртіптегі модульдік курстардың әдістемелерін баяндай және курстарды өткізуді ұйымдастыра білуі қажет.
- Оқу үрдісін білім беру порталы шеңберінде жүргізу ісіне жан-жақты даярлау, қашықтықтан оқыту жүйесі бойынша сабақ өткізу үрдісінде үйлестіруші болуы қажет.

Сонымен қатар, білім беру порталын қолдануда алгоритм құрамына міндетті түрде қауіпсіздік шаралары қарастырылады. Мәселен, ашылған беттен Регистрация сілтеуішіне басып жүйеге тіркелуге болады. Әрбір қолданушылар өзінің жеке идентификациялық мәліметтерін енгізе отырып пайдалануға мүмкіндік ала алады.



Идентификация терезесі

Білім беру жүйесін ақпараттандыру бағыты жаңа ақпараттық технологияларды пайдалану аркылы дамыта оқыту, инновациялық жаңа технологиялар арқылы оқыту, дара тұлғаға бағыттап окыту максаттарын жүзеге асыра отырып, оку-тәрбие үрдісінің барлық деңгейлерінің тиімділігі мен сапасын жоғары-латуды көздейді.

Виртуальды білім беру ұғымын кең мағынада алсақ, бұл-тыңдаушылар мен оқытушылардың бір-бірінен кеңістікте алыстатылған оқу формасы. Ал, тармағынадағы қашықтықтан оқу ұғымы тындаушылар мен оқытушылар арасындағы, сонымен қатар тыңдаушылардың өзара белсенді ақпаратпен алмасуын қарастыратын және жоғаргы дәрежедегі қазіргі жаңа ақпаратгық технологияларды (аудио-визуальды құралдар, дербес компьютерлер, телекоммуникация құралдары, т.б.) пайдаланатын белгілі бір тақырыптар, оқу пәндері бойынша ұйымдастырылатын оқу процесі.

Қорыта келгенде, көптілді білім беруде электрондық технологияны пайдалану әрбір білім алушының қосымша өздігінен пәндер бойынша білімін толықтыруға мүмкіндік береді. Жалпы әлемдік кеңістікке енуде көптілді білім беруде қазақ тілінің мемлекеттік тіл мәртебесіне сай қызмет етуін қамтамасыз ету, орыс тілінің әлеуметтік-лингвистикалық белсенділігін сақтау және шет ел тілдерін дамыту үшін де ақпараттық-коммуникациялық технологияларды пайдалану қажеттілігі заман талабы екендігін атап өткен жөн.

Әдебиеттер:

1. Қорқыт Ата атындағы ҚМУ 2012-2017 жылдарға арналған көптілді білім беруді дамыту тұжырымдамасы. - Қызылорда, 2012
2. Беркімбаев К.М. Студенттердің кәсіптік құзыреттілігін ақпараттық-коммуникациялық технологиялар негізінде қалыптастырудың тиімділігін зерттеу нәтижелері // Шоқан тағылымы-13 атты халықаралық ғылыми-практикалық конф.материалдары. - Көкшетау, 2008. – Т. 6. - 272-275 бб.
3. Ходжаниязов Х.Т. Оқыту процесіндегі: Электронды оқулықты пайдалану. Білім әлемі. – 2009. - №4. – 14 б.

Түйіндеме

Бұл мақалада көптілді білім беруде ақпараттық-коммуникациялық технологияларды пайдаланудың негізгі алгоритмі қарастырылған. Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік универсиетінде 2012 жылдан бастап есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету, ақпараттық жүйелер, информатика мамандықтары бойынша көптілді білім беру жүйесі енгізілуде.

_**Кілт сөздер:** виртуалды портал, көптілді білім беру, алгоритм, идентификация, виртуалды зертханалық жұмыстар

Резюме

В данной статье рассмотрен алгоритм использования информационно-коммуникационных технологии в полиязычном обучении. С 2012 года Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата начал работу по полиязычному обучению по трем специальностям, такие как вычислительная техника и программное обеспечение, информационные системы, информатика.

Ключевые слова: виртуальный портал, полиязычное образование, алгоритм, идентификация, виртуальные лабораторные работы

Summary

This article presents about the algorithm for using information and communication technologies in multilingual education. Since 2012, the Kyzylorda State University named Korkyt Ata began to work on multilingual training in three specialties, such as computers and software, information systems, computer science.

Key words: virtual portal, multilingual education, algorithm, authentication, virtual labs.

УДК 004.65:004.661

АКТУАЛЬНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В УПРАВЛЕНИИ РОБОТОВ

С.И. ИБАДУЛЛА, Н.Б. КОНЫРБАЕВ – аспиранты,
Российский университет дружбы народов, Россия,
К.К.ДАУРЕНБЕКОВ, кандидат технических наук
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата,
Республика Казахстан

Устройство управления робота осуществляет автоматическое управление его исполнительными системами - манипуляционными и передвижения, образуя в совокупности с ними как объектами управления систему автоматического управления робота. Кроме того, устройства управления роботов часто используют и для управления различными другими объектами (технологическим оборудованием, транспортными устройствами и т. п.), которые работают совместно с роботом, образуя с ним единый технологический комплекс [1]. Так как мы понимаем, что системы управления роботов и соответствующие устройства управления различаются по способу управления:

• *программные устройства*, в которых управление осуществляется по заранее составленной и остающейся неизменной в процессе реализации управляющей программе;

• *адаптивные устройства*, в которых управление осуществляется в зависимости от информации о текущем состоянии внешней среды и самого робота, получаемой в процессе управления от сенсорных устройств;

• *интеллектуальные устройства*, в которых для адаптации и выполнения других функций робота используются методы искусственного интеллекта.

В 1989 году впервые в мире было дано определение интеллектуальной системе. И это было как объединенная информационным процессом совокупность технических средств и программного обеспечения, работающего во взаимосвязи с человеком (коллективом людей) или автономно, способную на основе использования сведений и знаний при наличии мотивации синтезировать цель, вырабатывать решение о действии и находить рациональные способы, её реализации. Целью этой программы являлось создание научных основ и разработка опытных образцов интеллектуальных систем на базе достижений нейрофизиологии, теории управления, информационных технологий, мехатроники и микропроцессорных вычислительных средств [2]

После таких событий, стали применять интеллектуальную систему во многих устройствах, в особенности в управлении промышленных и военных роботов. Если посмотреть предназначения интеллектуальных роботов (ИР), то многие уже в курсе, что они применяются для перемещения и доставки грузов, технологического и навесного оборудования в сложной и заранее неопределенной среде без участия оператора. Во многих случаев ИР представляет собой автономно наземных мобильных роботов (НМР). Но к ИР относятся также автономные безэкипажные подводные аппараты (БПА) и беспилотные летательные аппараты (БЛА).

В робототехнике системы очувствления и искусственного интеллекта нашли достаточно широкое применение [3]. Следует выделить следующие направления развития интеллектуальных роботов:

1. Промышленные роботы, работающие в производственной сфере и заменяющие человека при выполнении технологических операций. Интеллект указанных роботов заключается в их способности автоматически распознавать качество обработанной поверхности, контролировать режимы обработки и корректировать их в зависимости от поставленной цели, например, минимизировать погрешности, уменьшать энерго-затраты, выбирать технологию обработки в зависимости от типа детали и требований к ее выходным характеристикам. В настоящее время это, пожалуй, основной класс роботов, которому должно быть уделено особое внимание, так как замена человека в сфере производства качественно изменит его жизнедеятельность

2. Безусловно к сугубо интеллектуальным роботам следует отнести робото-тележки, перемещающиеся по космическим планетам в условиях непредсказуемой обстановки и выполняющие операции сбора информации о местности, на основе которой они определяют направление своего движения.

3. Игровые роботы, предназначенные для тренировки спортсменов. Роботы, играющие в гольф, теннис, шахматы, соревнующиеся друг с другом, на первый взгляд указанные роботы не предназначены для замены человека на производстве. Однако, как и в человеческой деятельности, при выполнении игровых задач отрабатывается структура искусственных машин, их силовые возможности, быстродействие и интеллектуальные способности.

4. Специальные роботы, способные работать в военной обстановке, а также в условиях особо опасных для жизнедеятельности человека.

Уже очевидно, что интеллектуальные роботы заменят человека при выполнении сложных технологических операций, связанных с повышенным риском или работой в экстремальной среде.

Сейчас в мире ведутся усердные работы по внедрению интеллектуальных робототехнических систем. И наиболее интерес представляет применение этих систем в военных целях, например, для управления беспилотными летательными аппаратами (БЛА) или безэкипажными транспортными средствами наземного и подводного базирования.

Но, при разработке системы управления для автономных роботов возникает ряд проблем, одна из которых – борьба с неопределенностями [4]

- Внешняя среда функционирования робота заранее может быть частично либо полностью неизвестна.
- Выполняемые роботом задачи также могут быть заранее неизвестны.
- В процессе своего движения робот может быть подвержен случайным воздействиям со стороны внешней среды: проскальзывания ведущих колес, неожиданные препятствия, увод, изменение в силе трения, ветер (для БЛА), течения (для БПА) и т.д. В результате чего, точное местоположение робота и его ориентация могут оказаться неизвестными.
- В измерительном тракте робота может присутствовать систематическая ошибка.

Для того чтобы решить всей совокупности указанных проблем приходится использовать нетрадиционные подходы, основанные на использовании современных интеллектуальных технологий. Один из важнейших составляющих интеллектуального робота является интеллектуальная система управления, санкционирующая автономно принимать решения в сложных и заранее неопределенных обстоятельствах, возникающих в процессе функционирования робота. Оснащение робота интеллектуальной системой управления позволит ему самостоятельно работать в незнакомой среде или на незнакомой местности, а также в условиях динамического изменения внешней среды.

Построение структуры системы интеллектуального управления связано в первую очередь с построением модели системы, в которой должны быть определены как традиционные элементы системы управления, так и модели обработки знаний, реализуемые интеллектуальной системой. В интеллектуальной системе управления новыми элементами по сравнению с традиционной системой управления являются все интеллектуальные преобразования или элементы управления знаниями, которые связаны с реализацией искусственного интеллекта, т.е. с использованием технологий экспертных систем, базы знаний, принятия решений, ассоциативной памяти, нечеткой логики, семиотических сетей, управления структурной динамикой и т.п. Анализируя принятые структуры систем управления с решающими устройствами [5] можно и для обобщенной интеллектуальной системы использовать аналогичную структуру (рис. 1), которая взаимодействует с внешней средой и в процессе ее получения от нее необходимой информации формирует цель действия и анализирует воздействия на систему (физические и информационные). Определяющими элементами системы управления в этом случае являются: интеллектуальный преобразователь и базовая система управления [6].

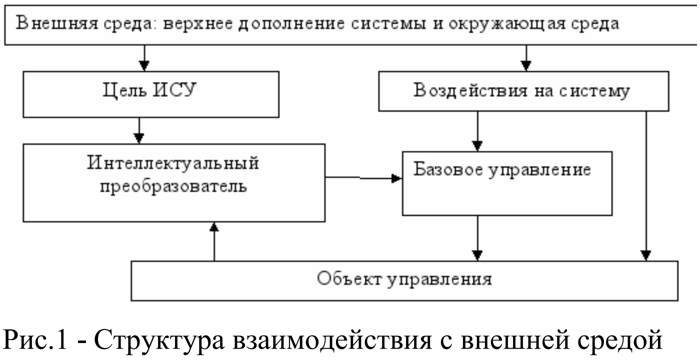


Рис.1 - Структура взаимодействия с внешней средой

В наши дни довольно очень обширное распространение приобрели дистанционно-управляемые роботы, применяемые в разных отраслях профессии. Дистанционно управляемые роботы разделяются на два рода: с супервизорным управлением, с диалоговым (интерактивным) управлением [7].

Командное управление характеризуется тем, что человек-оператор путем нажатия различных кнопок или включения различных тумблеров запускает по очереди приводы манипулятора по различным степеням подвижности, добиваясь, таким образом, поочередным включением каждого привода требуемого конечного положения всего манипуляционного механизма.

Копирующее управление отличается тем, что человек-оператор работает с задающим механизмом, кинематический полностью подобным рабочему манипулятору. При этом каждый шарнир задающего механизма связан по принципу следящей системы с соответствующим шарниром рабочего манипулятора.

Рис.2 - Схема принципа следящей системы с соответствующим шарниром рабочего манипулятора

Копирующую систему одностороннего действия снабжают устройством пассивного отражения усилий от рабочего манипулятора на руку человека-оператора.

В копирующей системе наблюдение может вестись либо непосредственно визуально, либо на расстоянии по телевизионной системе. Важным фактором в копирующих системах является масштабирование перемещений и усилий. При необходимости больших перемещений в рабочей зоне задающее устройство, сохраняя кинематическое подобие манипулятору, может иметь меньшие размеры. Наоборот, для микроманипуляторов задающее устройство делается более крупным в соответствии с возможностями движения человеческой руки.

Однако, использование дистанционного управления приводит к применению интеллектуальных систем управления. При дистанционных управлениях имеются ряд недостатков. Значит:

1) для управления дистанционно-управляемым аппаратом требуется квалифицированный оператор. То есть, чем сложнее система, тем сложнее обучить ее оператора, если речь идет о летательных аппаратах то тем более.

2) реакция скорости человека может быть недостаточно для современного принятия решения.

3) может быть будет подвержен воздействия естественных или умышленных помех для канала связи между пультом управления и робототехнической системой.

4) во многих случаях бывает невозможно организовать канал связи между пультом управления и аппаратом из-за большого расстояния аппарата и т.д.

В то же время, как показывают результаты последних исследований, применение интеллектуальных технологий позволяет придать робототехнической системе дополнительную гибкость и расширить ее функциональные возможности [8].

В данное время в создании подобного рода систем очень заинтересованы силовые министерства и ведомства, разные подведомственные организации МЧС, исследовательские организации и др. Так как изучение иных планет невообразимо без применения интеллектуальных робототехнических систем. Из-за задержек сигналов в канале управления, а также ограниченная энергоемкость исследовательских аппаратов не даст возможности управлять ими с Земли или с орбиты. Исходя от этого, эти аппараты должны действовать самостоятельно и адаптироваться к внешней среде, таким образом, они должны быть оснащены интеллектуальными системами управления.

Несмотря на то, что отдельные образцы интеллектуальных роботов уже создаются, как в нашей стране [9] [10], так и за рубежом [11], все еще существует масса неразрешенных научных проблем, связанных с построением таких систем.Поэтому еще раз убеждаемся, что важной и актуальной задачей является разработка технологии построения автономных роботов с интеллектуальной системой управления.

Литература:

1.Юревич Е.И. Основы робототехники. - 2-е изд., перераб. и доп. -СПБ.:БХВ - Петербург,2005.

2.Пупков К.А., Коньков В.Г. Интеллектуальные системы, Издание первое. - Москва, 2001.

3.http://rudocs.exdat.com/docs/index-342124.html Робототехнические системы с элементами искусственного интеллекта.

4.AIBOMasterStudio.User'smanual, 2001.

5.Андреев Н. И. Корреляционная теория статистически оптимальных систем. - М.: Наука, 1966.

6.Пупков К. А., Коньков В. Г. Интеллектуальные системы. – Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.

7.http://kiborgs.ru/publ/9-1-0-124 Дистанционно управляемые роботы и манипуляторы

8.Лохин В.М., Захаров В.Н. Интеллектуальные системы управления: понятия, определения, принципы построения / Интеллектуальные системы автоматического управления / Под ред. И.М. Макарова, В.М. Лохина – М.:Физматпит, 2001.

9.Кутузов А.Н., Машков К.Ю., Наумов В.Н., Рубцов И.В., Челышев В.А. Многофункциональный мобильный комплекс для обработки перспективных технологий военной робототехники. / Оборонная техника. - 2000. - №1-2.

10. Кутузов А.Н., Лапшов В.С., Носков В.П., Рубцов И.В., Челышев В.А. Опыт разработки и создания автономного интеллектуального робототехнического комплекса на базе серийного танка Т-72. / Оборонная техника, № 1-2, 2000.

11.David Wettergreen, Chris Gaskett, and Alexander Zelinsky. Autonomous Guidance and Control for an Underwater Robotik Vehicle // The Australian National University. Canberra, ACT 0200 Australia (http://syseng.anu.edu.au/rsl).

Резюме

В статье выявляется ряд недостатков применения дистанционного управления. В робототехнике системы очувствления и искусственного интеллекта нашли достаточно широкое применение. Рассмотрены направления развития интеллектуальных роботов.

Ключевые слова: дистанционные управления, интеллектуальные системы управления, мобильные роботы, беспилотные летательные аппараты.

Түйіндеме

Бұл мақалада қашықтықтан басқаруды пайдаланудағы кемшіліктер көрсетілген. Робототехникада сезу жүйелері және жасанды интеллект кең қолданысқа ие болып келеді. Интеллектуалды роботтар дамуының бағыттары қарастырылған.

Кілт сөздер: қашықтықтан басқару, интеллектуалды басқару жүйесі, икемді роботтар, ұшқышсыз ұшу аппараттары.

Summary

A number of shortcomings of remote control is identified in the article. In robotics system sensitization and artificial intelligence are widely used robotics. The directions of the development of intelligent robots are considered in the article.

Key words: remote control, intelligent control systems, mobile robots, unmanned aerial vehicles.

УДК 519.6

КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД УПРАВЛЯЕМОСТИ ПРОСТОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Т.Ш.ИМАНКУЛ, кандидат физико-математических наук, доцент
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы,
Республика Казахстан

Уравнение движения плоского маятника имеет вид

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin\theta = M(\tau).$$

После замены переменных $t = \tau\sqrt{\dfrac{mgl}{I}}$ уравнение движения маятника примет вид

$$\ddot{\sigma} + \alpha\dot{\sigma} + \sin\sigma = u(t), \tag{1}$$

Уравнение (1) путем введения переменных $x_1(t) = \sigma(t)$, $x_2(t) = \dot{\sigma}(t)$ запишется в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - \sin x_1 + u(t). \tag{2}$$

Полагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ состояние системы $x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02}$. Путем выбора управления $u(t)$ можно влиять на движение маятника, при этом управление должно удовлетворять ограничению на значения

$$|u(t)| \le \gamma, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad t \ge 0. \tag{3}$$

Обозначим через $\sigma = x_1$, $z = x_2$. Теперь уравнение движения запишется в виде

$$\dot{\sigma} = z, \quad \dot{z} = -z - \sin\sigma + u, \quad 0 \le t \le 1, \quad I = [0,1], \quad t \in I, \tag{4}$$

где $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $\alpha = 1$.

Пусть ограничения на значения управления имеет вид

$$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^1) \,|\, -16t - 7 + \sin(-8t^2 + 9t - 2) \le u(t) \le \\ \le 1 + \sin t, \quad t \in I = [0,1]\}, \tag{5}$$

где $\alpha(t) = -16t - 7 + \sin(-8t^2 + 9t - 3)$, $\beta(t) = 1 + \sin t$.

Краевое условие для системы (4) имеет вид

$$\sigma(0) + z(0) = 1, \quad \sigma(1) + z(1) = -8. \tag{6}$$

Следовательно, множества

$$S_0 = \{(\sigma_0, z_0) \in R^2 \,|\, \sigma_0 + z_0 = 1\}, \quad S_1 = \{(\sigma_1, z_1) \in R^2 \,|\, \sigma_1 + z_1 = -8\}, \quad S = S_0 \times S_1,$$

где $\sigma_0 = \sigma(0)$, $z_0 = z(0)$, $\sigma_1 = \sigma(1)$, $z_1 = z(1)$.

Фазовые ограничения заданы в виде

$$-t \le \sigma(t) \le t, \quad -7t \le z(t) \le 1, \quad t \in I = [0,1]. \tag{7}$$

Вдоль решения системы (4) должны быть выполнены следующие интегральные ограничения

$$g_1(z) = \int_0^1 z^2(t)dt \le 8, \quad g_2(\sigma) = \int_0^1 \sigma^2(t)dt = 0.15. \tag{8}$$

Необходимо найти $u_*(t)\in U$, $\left(\sigma_0^*, z_0^*\right)\in S_0$, $\left(\sigma_1^*, z_1^*\right)\in S_1$ такие, что вдоль решения системы (4) выполнены фазовые ограничения (7) и интегральные ограничения (8).

Преобразования. Введем функции

$$x_1(t)=\int_0^t z^2(\tau)d\tau, \quad x_2(t)=\int_0^t \sigma^2(\tau)d\tau, \quad 0\le\tau\le t, \quad 0\le t\le 1.$$

Тогда $\dot{x}_1(t)=z^2(t)$, $x_1(0)=0$, $x_1(1)\le 8$, $\dot{x}_2(t)=\sigma^2(t)$, $x_2(0)=0$, $x_2(1)=0.15$. Теперь исходная задача запишется в виде (см. (4) – (8)):

$$\dot{\sigma}=z, \quad \dot{z}=-z-\sin\sigma+u, \quad \dot{x}_1=z^2, \quad \dot{x}_2=\sigma^2, \tag{9}$$

$$\left(\sigma_0, x_0\right)\in S_0, \quad \left(\sigma_1, x_1\right)\in S_1, \quad \left(z(t), \sigma(t)\right)\in G(t), \tag{10}$$

$$x_1(0)=0, \quad x_2(0)=0, \quad x_1(1)=8-d, \quad x_2(1)=0.15, \tag{11}$$

$$d\in Q_1=\left\{d\in R^1 \,\middle|\, d\ge 0\right\}, \quad u(t)\in U. \tag{12}$$

Систему (9) – (12) запишем в векторной форме

$$\dot{\mu}=A_1\mu+B_1\sin P_2\mu+B_2 f_0(P_1\mu, P_2\mu)+C_1u(t), \quad t\in I=[0,1], \tag{13}$$

$$\left(P_1\mu(0), P_2\mu(0)\right)\in S_0, \quad \left(P_1\mu(1), P_2\mu(1)\right)\in S_1, \quad \left(P_1\mu(t), P_2\mu(t)\right)\in G(t), \tag{14}$$

$$P_3\mu(0)=0, \ P_4\mu(0)=0, \ P_3\mu(1)=8-d, \ P_4\mu(1)=0{,}15, \ d\in Q_1, \ u(t)\in U, \tag{15}$$

Принцип погружения. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y}=A_1y+B_1w_1(t)+B_2w_2(t)+C_1w_3(t), \quad t\in I=[0,1], \tag{16}$$

$$\begin{aligned} y(0)&=\mu(0)=\left(z(0), \sigma(0), x_1(0), x_2(0)\right), \\ y(1)&=\mu(1)=\left(z(1), \sigma(1), x_1(1), x_2(1)\right) \end{aligned} \tag{17}$$

$$w_1(\cdot)\in L_2\left(I, R^1\right), \quad w_2(\cdot)\in L_2\left(I, R^2\right), \quad w_3(\cdot)\in L_2\left(I, R^1\right). \tag{18}$$

По исходным данным системы (16) – (18) определим следующие матрицы и векторы: e^{A_1t}, e^{-A_1t}, $e^{-A_1t}\overline{B}$, $\overline{B}=\left(B_1, B_2, C_1\right)$, $e^{-A_1t}\overline{B}\,\overline{B}^*e^{-A_1^*t}$, $W^{-1}(0,1)$, $W(t,1)$, $W(0,t)$, где $W(0,1)=\int_0^1 e^{-A_1t}\overline{B}\,\overline{B}^*e^{-A_1^*t}dt$. Векторы $a=e^{-A_1}\mu_1-\mu_0$,

$\lambda_1(t)=\left(\lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), \lambda_{13}(t), \lambda_{14}(t)\right)^T$, $\lambda_{11}(t)=B_1^*e^{-A_1^*t}W^{-1}(0,1)a,$

$\lambda_{12}(t)=B_{21}^*e^{-A_1^*t}W^{-1}(0,1)a$, $\lambda_{13}(t)=B_{22}^*e^{-A_1^*t}W^{-1}(0,1)a$, $\lambda_{14}(t)=C_1^*e^{-A_1^*t}W^{-1}(0,1)a,$

Матрица

$$N_1(t)=-\overline{B}^*e^{-A_1t}W^{-1}(0,1)e^{-At}=\begin{pmatrix} N_{11}(t) \\ N_{12}(t) \\ N_{13}(t) \\ N_{14}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} N_{11}(t)&=\left([N_{11}(t)]_1, \ [N_{11}(t)]_2, \ 0, \ 0\right), \\ N_{12}(t)&=\left(0, \ 0, \ [N_{12}(t)]_3, \ 0\right), \\ N_{13}(t)&=\left(0, \ 0, \ 0, \ [N_{13}(t)]_4\right), \\ N_{14}(t)&=\left([N_{14}(t)]_1, \ [N_{14}(t)]_2, \ 0, \ 0\right), \end{aligned}$$

Теперь компоненты вектора $w(t)=\left(w_1(t), w_2(t), w_3(t)\right)$, где $w_2(t)=\left(w_{21}(t), w_{22}(t)\right)$, запишутся так:

$$\begin{aligned} &w_1(t)=v_1(t)+\lambda_{11}(t)+N_{11}(t)z(1,v), \qquad w_{21}(t)=v_{21}(t)+\lambda_{12}(t)+N_{12}(t)z(1,v), \\ &w_{22}(t)=v_{22}(t)+\lambda_{13}(t)+N_{13}(t)z(1,v), \quad w_3(t)=v_3(t)+\lambda_{14}(t)+N_{14}(t)z(1,v), \end{aligned} \tag{19}$$

где $z(t,v)=\left(z_1(t,v), z_2(t,v), z_3(t,v), z_4(t,v)\right)$ – решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\dot{z}=A_1z+B_1v_1(t)+B_{21}v_{21}(t)+B_{22}v_{22}(t)+C_1v_3(t), \quad z(0)=0, \quad t\in I=[0,1], \\ &v_1(\cdot)\in L_2\left(I, R^1\right), \quad v_{21}(\cdot)\in L_2\left(I, R^1\right), \quad v_{22}(\cdot)\in L_2\left(I, R^1\right), \quad v_3(\cdot)\in L_2\left(I, R^1\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку $e^{A_1 t}W(t,1)W^{-1}(0,1)\mu_0 = \frac{1}{8e-2e^2-6}\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ k_3(t) \\ k_4(t) \end{pmatrix}$,

то матрица

$$N_2(t) = -e^{A_1 t}W(0,t)W^{-1}(0,1)e^{-A_1} = \frac{1}{8e-2e^2-6}\begin{pmatrix} n_{11}(t) & n_{12}(t) & n_{13}(t) & n_{14}(t) \\ n_{21}(t) & n_{22}(t) & n_{23}(t) & n_{24}(t) \\ n_{31}(t) & n_{32}(t) & n_{33}(t) & n_{34}(t) \\ n_{41}(t) & n_{42}(t) & n_{43}(t) & n_{44}(t) \end{pmatrix},$$

Вектор-функция $y(t) = z(t) + \lambda_2(t, \mu_0, \mu_1) + N_2(t)z(1, v)$, $t \in I$. Тогда компоненты вектор-функции $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$ имеют вид:

$$y_1(t) = z_1(t) + \frac{1}{8e-2e^2-6}\lambda_{21}(t, \mu_0, \mu_1) + \frac{1}{8e-2e^2-6}[n_{11}(t)z_1(1) + n_{12}(t)z_2(1)],$$

$$y_2(t) = z_2(t) + \frac{1}{8e-2e^2-6}\lambda_{22}(t, \mu_0, \mu_1) + \frac{1}{8e-2e^2-6}[n_{21}(t)z_1(1) + n_{22}(t)z_2(1)],$$

$$y_3(t) = z_3(t) + \frac{1}{8e-2e^2-6}\lambda_{23}(t, \mu_0, \mu_1) + \frac{1}{8e-2e^2-6}[n_{33}(t)z_3(1)],$$

$$y_4(t) = z_4(t) + \frac{1}{8e-2e^2-6}\lambda_{24}(t, \mu_0, \mu_1) + \frac{1}{8e-2e^2-6}[n_{44}(t)z_4(1)]. \quad (21)$$

Множество V для данного примера запишется так:

$$V = \{\upsilon(\cdot) = (\upsilon_1(\cdot), \upsilon_2(\cdot)) \in L_2(I, R^2) \mid -7t \le \upsilon_1(t) \le 1, \ \ -t \le \upsilon_2(t) \le t, \ \ t \in I\},$$

Оптимизационная задача для данного примера запишется в виде: минимизировать функционал

$$J(v_1, v_{21}, v_{22}, v_3, u, \upsilon_1, \upsilon_2, z_0, \sigma_0, z_1, \sigma_1, d) = \int_0^1 \Big[|w_1(t) - \sin y_2(t)|^2 + \\ + |w_{21}(t) - y_1^2(t)|^2 + |w_{22}(t) - y_2^2(t)|^2 + |w_3(t) - u(t)|^2 + \\ + |\upsilon_1(t) - y_1(t)|^2 + |\upsilon_2(t) - y_2(t)|^2 \Big] dt \to \inf \quad (22)$$

при условиях

$$\dot z_1 = -z_1 - v_1 + v_3, \quad \dot z_2 = z_1, \quad \dot z_3 = v_{21}(t), \quad \dot z_4 = v_{22}(t), \quad t \in I = [0,1], \quad (23)$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad v_{21}(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad v_{22}(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad v_3(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad (24)$$

$$(z_0, \sigma_0) \in S_0, \quad (z_1, \sigma_1) \in S_1, \quad d \in Q_1, \quad (25)$$

$$u(\cdot) \in U, \quad \upsilon_1(\cdot) \in V_1, \quad \upsilon_2(\cdot) \in V_2, \quad V = V_1 \times V_2, \quad (26)$$

где функции $w_1(t)$, $w_{21}(t)$, $w_{22}(t)$, $w_3(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$, $t \in I$ определяются формулами (19), (20) соответственно, дифференциальное уравнение (23) следует из (20).

Далее решается оптимизационная задача (22 – (26) путем построения минимизирующей последовательности $\{\xi_n\}$ из §3.4 [1].

Решением оптимизационной задачи (22) – (26) являются:

$z_0^* = 1$, $\sigma_0^* = 0$, $z_1^* = -7$, $\sigma_1^* = -1$, $d_* = 0.333...$,

$$u_*(t)=\begin{cases}1+\sin, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ -16t-7+\sin\left(-8t^2+9t-2\right), & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

$$v_1^*(t)=T_0(t)z_0^*-T_1(t)\sigma_0^*-T_2(t)z_1^*-T_3(t)\sigma_1^*-N_{11}(t)z(1,v_*)+$$

$$+\begin{cases}\sin t, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ \sin\left(-8t^2+9t-2\right), & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

$$v_{22}^*(t)=-\frac{8-d_*}{\Delta}-N_{12}(t)z(1,v_*)+\begin{cases}1, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ \left(-16t+9\right)^2, & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

$$v_{21}^*(t)=-\frac{8-d_*}{\Delta}-N_{12}(t)z(1,v_*)+\begin{cases}1, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ \left(-16t-9\right)^2, & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

$$v_3^*(t)=-D_0(t)z_0^*-D_1(t)\sigma_0^*-D_2(t)z_1^*-D_3(t)\sigma_1^*-N_{14}(t)z(1,v_*)+$$

$$+\begin{cases}1+\sin t, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ -16t-7+\sin\left(-8t^2+9t-2\right), & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

$$\upsilon_1^*(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ -16t-9, & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}\qquad \upsilon_2^*(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ -8t^2+9t-2, & \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

Решением исходной задачи (4) – (8) являются функции

$$\sigma_*(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ -8t^2+9t-2, & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}\qquad z_*(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ -16t-9, & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

$$u_*(t)=\begin{cases}1+\sin t, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ -16t-7+\sin\left(-8t^2+9t-2\right), & \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

Литература:

1. Айсагалиев С.А., Иманкул Т.Ш. Теория фазовых систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2005. – 272 с.

Резюме

В работе рассмотрены вопросы управляемости многомерных систем при наличии интегральных и фазовых ограничений. С помощью принципа погружении решена задача об управляемости маятника.Предложен конструктивный метод построения решения системы.

Ключевые слова: управление, математический маятник, принцип погружения, оптимизационная задача.

Түйіндеме

Жұмыста интегралдық және фазалық шектеулер қойылған кездегі көп өлшемді жүйелердің басқарылымдылығының мәселесі қарастырылған. Тоғыту қағидатын қолдану арқылы маятникті басқару есебі шығарылған. Жүйе шешімін құрудың конструктивті әдісі ұсынылған.

Кілт сөздер: басқару, математикалық маятник, тоғыту қағидаты, тиімділік есебі.

Summary

The paper deals with the controllability of multi-dimensional systems in the presence of integral and phase constraints. Using the principle of immersion the problem of handling is solved the method of constructing solutions of the system is suggested.

Key words: managementa, mathematical pendulum, the principle of immersion, an optimization problem.

УДК 621.376

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРАНСФОРМАТОРАХ

Б.К.КАЛИЕВ, кандидат технических наук, доцент,
Э.М.ЕРМАХАНОВА, магистрант
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата,
Республика Казахстан

Рассмотрим методику формирования дискретных моделей (ДМ) нелинейных многообмоточных трансформаторов на примере трехобмоточного трансформатора, который получил широкое применение в энергетике. В трехобмоточном трансформаторе так же, как и в двухобмоточном существует поток взаимоиндукции Ф, сцепленный со всеми тремя обмотками, и потоки рассеяния, картины которых отличаются большой сложностью, чем в двухобмоточном трансформаторе, так как приходится иметь в виду как потоки рассеяния, замыкающиеся каждый только вокруг какой-нибудь одной обмотки, так и охватывающие каждый две обмотки.

Дифференциальные уравнения нелинейного трехобмоточного трансформатора, учитывающие взаимоиндукции по полям рассеивания, имеют вид:

$$\mathbb{U}_1 = i_1 R_1 + (L_{S1} + L_{S12} + L_{S13})\frac{di_1}{dt} + L_{S21}\frac{di_2}{dt} + L_{S31}\frac{di_3}{dt} + n_1\frac{d\Phi}{dt},$$

$$-\mathbb{U}_2 = i_2 R_2 + (L_{S2} + L_{S21} + L_{S23})\frac{di_2}{dt} + L_{S32}\frac{di_3}{dt} + L_{S12}\frac{di_1}{dt} + n_2\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

$$-\mathbb{U}_3 = i_3 R_3 + (L_{S3} + L_{S31} + L_{S32})\frac{di_3}{dt} + L_{S12}\frac{di_1}{dt} + L_{S23}\frac{di_2}{dt} + n_3\frac{d\Phi}{dt},$$

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = F[\Phi], \quad (2)$$

где R_1, R_2, R_3 – активные сопротивления обмоток, $F[\Phi]$ – характеристика намагничивания магнитной цепи трансформатора. Нелинейная характеристика магнитной цепи $F[\Phi]$ трансформатора обусловлено нелинейной зависимости B=f(H) или H=f(B) магнитного материала. Допустим, что аппроксимирующая зависимость задана в виде полиномиальной функции: $H = \frac{1}{\mu}B + \nu B^3$ где μ, ν – параметры, зависящие от материалов сердечника исходя из этой характеристики, с помощью несложных преобразований, получим зависимость магнитодвижущей силой F от потока Ф

$$F[\Phi] = R\Phi + \beta\Phi^3, \tag{3}$$

где $R = \sum \frac{1}{\mu S}$. $\beta = \sum \frac{\vartheta_t}{S^3}$

учитывая соотношение (3), уравнения магнитной цепи трансформатора (2) перепишем в виде:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = R\Phi + \beta\Phi^3, \tag{4}$$

Для формирования ДМ продифференцируем соотношение (4):

$$n_1 \frac{dl_1}{dt} + n_2 \frac{dl_2}{dt} + n_3 \frac{dl_2}{dt} = R_\mu \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \tag{5}$$

Здесь $R_\mu = \frac{\partial F[\Phi]}{\partial \Phi} = R + 3\beta\Phi^2$ - магнитное сопротивление.

В настоящей работе рассматривается решение этой задачи с помощью метода суммирования конечных приращений (СКП). В методе СКП важно понятие о математических и физических дискретных моделях элементов цепи, на основании которых строится расчетная модель исходной схемы. В работе излагаются два способа построения дискретных моделей нелинейных трансформаторов. Первый способ базируется на традиционном применении метода СКП. В данном случае конечная расчетная модель трансформатора получается через схемы замещания и дискретные модели элементов. На интервале времени производится линейная аппроксимация характеристики намагничивания трансформатора, для повышения точности которой вводится источник ЭДС, моделирующий невязки. Это обусловливает возможность использования схемы замещания с зависимыми источниками тока, предложенной в работе [2] для формирования дискретных моделей нелинейных трансформаторов. Изложенный способ также применим для построения дискретных моделей многообмоточных трансформаторов и цепей с множеством индуктивных связей.

Сущность второго подхода заключается в том, что дискретная математическая модель трансформатора получается через дифференциальные уравнения, описывающие режим работы нелинейных трансформаторов и систем с множеством индуктивных связей. При этом не требуется построение схем замещения иформирование дискретных схемных моделей. Производные зависимых переменных в исходном уравнении заменяются дискретными соотношениями, полученными с помощью полинома Лагранжа.

В данном случае дискретные соотношения производных тока и потока имеют вид:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\Delta t} K_{G,d}^{m} i(t_{K+1}) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^{m} i(t_{K-1}), \tag{6}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\Delta t} K_{G,d}^{m} \Phi(t_{K+1}) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^{m} \Phi(t_{K-j}). \tag{7}$$

Производя замену производных токов и потоков соотношениями (6), (7) получим ДМ нелинейного трехобмоточного трансформатора:

$$\begin{vmatrix} R_{S1} & R_{S21} & R_{S31} & R_{\Phi1} \\ R_{S12} & R_{S22} & R_{S32} & R_{\Phi2} \\ R_{S13} & R_{S23} & R_{S33} & R_{\Phi3} \\ R_{\Phi1} & R_{\Phi2} & R_{\Phi3} & R_{\Phi} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_1(t_{K+1}) \\ i_2(t_{K+1}) \\ i_3(t_{K+1}) \\ \Phi(t_{K+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{vmatrix} \tag{8}$$

где

$$E_1 = U_1(t_{K+1}) - \frac{(L_{S1} + L_{S12} + L_{S13})}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_1(t_{K-j}) - \frac{L_{S21}}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_2(t_{K-j}) -$$

$$-\frac{L_{S31}}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_3(t_{K-j}) - \frac{n_1}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m \Phi(t_{K-j});$$

$$E_2 = -U_2(t_{K+1}) - \frac{L_{S12}}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_1(t_{K-j}) - \frac{(L_{S2} + L_{S21} + L_{S22})}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_2(t_{K-j}) -$$

$$-\frac{L_{S33}}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_3(t_{K-j}) - \frac{n_2}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m \Phi(t_{K-j});$$

$$E_3 = -U_3(t_{K+1}) - \frac{L_{S13}}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_1(t_{K-j}) - \frac{L_{S23}}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_2(t_{K-j}) -$$

$$-\frac{(L_{S2} + L_{S31} + L_{32})}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_3(t_{K-j}) - \frac{n_3}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m \Phi(t_{K-j});$$

$$E_4 = -\frac{n_1}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_1(t_{K-j}) - \frac{n_2}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_2(t_{K-j}) - \frac{n_3}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m i_3(t_{K-j}) +$$

$$+\frac{\partial F[\Phi]}{\partial \Phi} \cdot \frac{1}{\Delta t}\sum_{j=0}^{m-2} K_{j,d}^m \Phi(t_{K-j});$$

$$R_\Phi = -\frac{\partial F[\Phi]}{\partial \Phi}\frac{K_{G,d}^m}{\Delta t}$$

Изложенные способы формирования ДМ позволяют использовать метод СКП для расчета различных процессов в трансформаторах, работающих в нелинейном режиме. При этом в зависимости от режима работы количества обмоток фаз, а также схемы соединений обмоток составляется алгоритм расчета, где реализуется соответствующая дискретная модель.

Литература:

1. Бондаренко В.М. О формировании дискретных физических моделей электрических цепей. – Киев: Наука Думка, 1978. - В.6. - С.107-114.
2. Бондаренко В.М. Методы и алгоритмы анализа стати стических и динамических режимов нелинейных цепей. – Киев, 1974. -105с.

Резюме

В данной работе изложена методика формирования дискретных моделей (ДМ) нелинейных трансформаторов по дифференциальному варианту метода СКП.

Ключевые слова: трансформатор, нелинейный, дискретная модель, характеристика намагничивания, активные сопротивления обмоток, магнитный поток.

Түйіндеме

Бұл еңбекте СКП әдісі арқылы сызықсыз трансформаторлардың дискретті математикалық моделін алудың әдісі қарастырылған.

Кілт сөздер: трансформатор, сызықтық емес, дискреттік модель, магниттену сипаттамасы, белсенді орам кедергісі, магнит ағыны.

Summary

In technique of forming of discrete mathematical models (DMM) of nonlinear transformers on differential variant of summation of final increments is stated in this work.

Key words: transformer, nonlinear, discrete model, magnetization characteristic, active resistance of windings, magnetic stream.

УДК 621.376

СТИМУЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИЗМЕНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЕМНИЯ

Т.С.КОШЕРОВ, доктор физико-математических наук, профессор,
К.Т.ТЛЕУМУРАТОВА, магистрант
Казахский национальный технический университет имени К.Сатпаева, г.Алматы, Республика Казахстан

Изучение взаимосвязи между температурным воздействием и изменением свойств всегда актуально как для понимания процессов структурного изменения в материалах, так и с задачей модификации их свойств. При этом особый интерес вызывает изучение структурно–зависимых свойств материалов от температуры и времени температурного воздействия, поскольку именно в таких условиях часто функционируют приборы, изготовленные на основе полупроводниковых структур.

Целью настоящей работы является исследование изменений структурных характеристик кремния и влияние этих изменений на электрофизические свойства кремния. Изучалось состояние наноструктуры Si, фазовые превращения, определение процентного содержания остающихся элементов в образце и их зависимость от температуры и времени прогревания. Объектом исследования явился (с) Si с удельным сопротивлением 3 Ом·см.

Образцы подвергали термической обработке в атмосфере воздуха при температурах от 200ғ до 1000ғС и времени t=10, 30, 60, 120, 240 и 360 мин. Рентгенографические исследования выполнены на рентгеновском дифрактометре X’PertPRO фирмы Phillips. Спектрограммы образцов кремния после термообработки и различном времени прогрева получены на растровом электронном микроскопе.

Результаты и их обсуждение

Проведенные исследования позволили получить зависимость структурного параметра *w* от температуры прогрева образца и при различном времени температурного воздействия (Рис.1 и 2). С увеличением температуры прогрева образца параметр *w*, после небольшого спада при 600ғ С, начинает расти. Поскольку параметр *w* характеризует структурное состояние приповерхностных слоев, его уменьшение свидетельствует об уменьшении дефектности приповерхностного слоя и соответственно связанных с дефектами внутренних напряжений. Однако было установлено, что при дальнейшем повышении температуры прогрева образца структурный параметр *w* увеличивается (Рис.1).

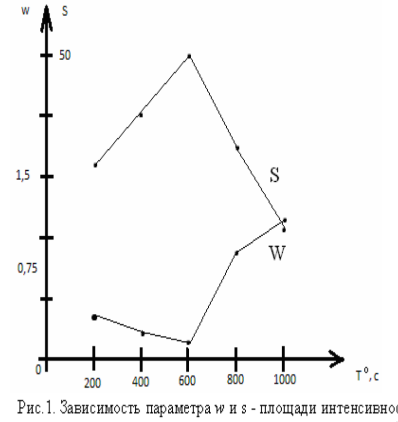


Рис.1. Зависимость параметра *w* и *s* - площади интенсивности линий элементов кристаллов кремния от температуры прогрева (t=60 мин).

Полученные нами экспериментальные результаты показывают, что при прогреве образца до 600 С в ней существуют неустойчивые метастабильные дефекты, которые распадаются и отжигаются. Не исключено, что при этой температуре обработки образца неустойчивые метастабильные дефекты взаимодействуют друг с другом или с поверхностью. Этот процесс аннигиляции сопровождается уменьшением концентрации вакансии междоузельных атомов. В свою очередь уменьшение концентрации указанных дефектов сопровождается снижением связанных с этими дефектами сжатия, и тем самым приводит к уменьшению внутренних напряжений в приповерхностных слоях кремния и соответствующему убыванию структурного параметра *w*. Возможно также, что при данных температурах прогрева образца происходит связывание междоузельных атомов в комплексы, которые могут сопровождаться уменьшением уровня внутренних напряжений. Таким образом, следствием перечисленных междефектных преобразований являются уменьшение параметра *w*. Однако, дальнейшее увеличение температуры прогрева образца приводит к резкому увеличению структурного параметра *w* (Рис.1.). Данный факт обусловлен, на наш взгляд, переходом вещества из одного кристаллического состояния в другое. В условиях нашего эксперимента наблюдаются фазовые превращения в образце: от ромбического к гексагональному, далее к двойной гексагональной, сопровождающихся постепенным переходом от ковалентных к ковалентно-металлическим и, возможно, к плотноупакованным металлическим структурам |2|. Такие структурные превращения в кремний тесно связаны с ее неустойчивыми электрофизическими свойствами |3|.

Замечено, что значение структурного параметра *w* изменяется немонотонно и в зависимости от времени прогрева образца (Рис.2).

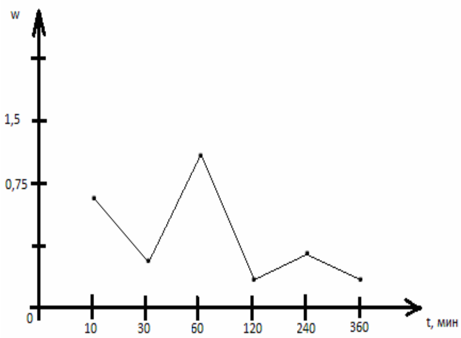


Рис.2. Зависимость параметра *w* кристаллов кремния от времени прогрева (T=1273ºK).

Так, спад внутренних напряжений прогретых при температуре 1000ғС наблюдается при нагреве образца до 30 мин в начале, а затем от 60 до 120 мин и наконец, от 240 до 360 мин. Такие изменения внутренних напряжений, возможно, тесно связаны с перестройкой структуры образца при фазовых превращениях, а также физико-химическими процессами протекающими на поверхности образцов |2|.

Не исключено и то, что в кремний определенный вклад в наблюдаемый эффект вносит не только междефектные преобразования и фазовые превращения, но и эффекты связанные с появлением дислокаций, облусловленные наличием переменных градиентов температур.

Известно, что любое отклонение от постоянного градиента температуры на границе кристализации вызывает неоднородное термическое расширение, ведущее к внутренним сильным напряжениям и, как следствие, к образованию дислокации. Из-за появления дислокаций внутреннее напряжение в кристалле ослабевает.

Рассматривая динамику изменений процентного содержания кремния исходного образца и образовавщихся в процессе температурной обработки образца примесей, в основном, диоксиды кремния в зависимости от температуры и времени прогрева можно заметить прямую зависимость, увеличения процентного содержания диоксида кремния и карбида кремния, приводящую к аналогичному уменьшению процентного сдержанию кремния на поверхности образца (рис.3).

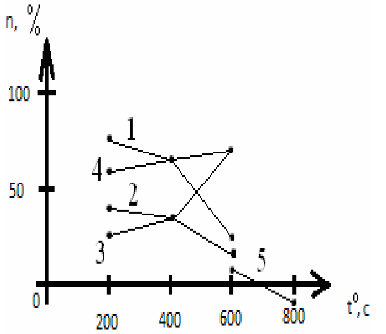


Рис.3. Зависимость количества Si 1- при 10 мин; 2- 60 мин; и образовавщихся SiO_2 3- 10 мин; 4- 60 мин; от температуры прогрева образца, 5- образования SiC.

Причем образование оксидов составляет наибольшее количество при температуре прогрева образца 600ғС и различном времени обработки кремния. Было замечено, что по мере увеличения температуры прогрева до 1000ғС в пределах времени от 10 – 360 мин точки резкого спада процентного содержания кремния и увеличения диоксида кремния и других оксидов не наблюдается.

Следовательно можно предполагать, что структура кремния после термооброботки при 600ғС независимо от времени обработки в пределах от 10 до 360 мин претерпевает изменения, начиная с этой температуры, переходя в более строгую кристаллическую форму, избавляясь при этом от различных дефектов, примесей и межатомных образований.

Спектрограммы образцов кремния полученные на растровом электронном микроскопе после термообработки при 1000ғC и различном времени отработки показали, что происходит уменьшение интенсивностей линий кремния и постепенное увеличение интенсивности линии кислорода, а также линии оставшихся элементов (Рис.4,5).

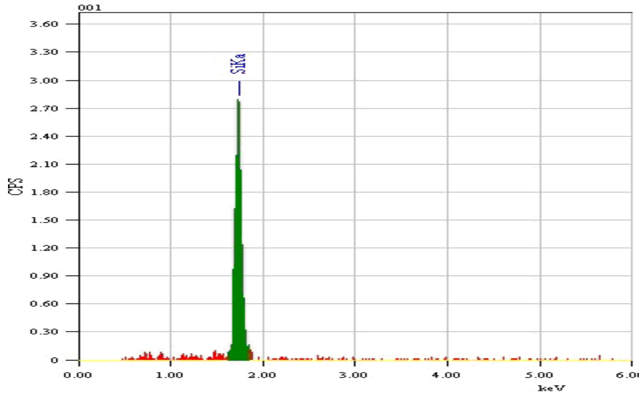


Рис. 4. а) спектрограмма образца (с) Si после термообработке при 1000^{o}C и времени прогрева t=10 минут.

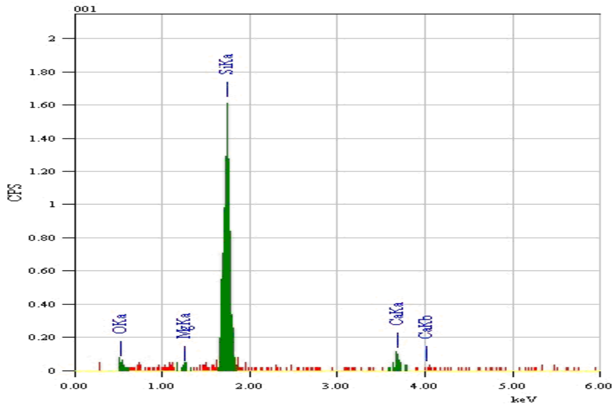


Рис. 4. б) спектрограмма образца (с) Si после термообработке при 1000^{o}C и времени прогрева t=60 минут.

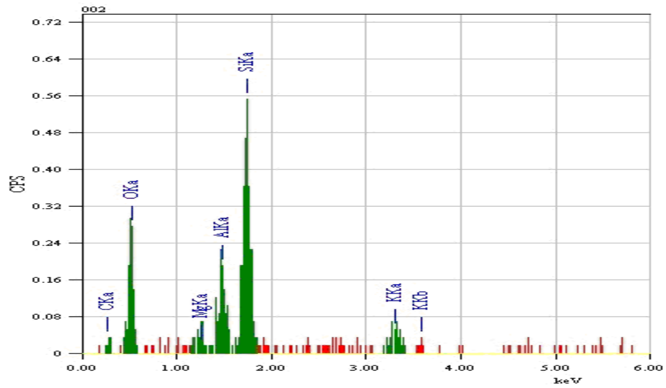


Рис. 4. в) спектрограмма образца (с) Si после термообработке при 1000^{o}C и времени прогрева t=240 минут.

Рис.5. Зависимость интенсивности линий кремния и кислорода в спектрограмме от времени температурного прогрева образца (T=1273^{o}K).

Обработка этих спектров позволило определить процентное содержание остающихся металлообразующих элементов в образце (Mg, Al, K, Ti, C, Hg). Обнаружено, что их процентное содержание по мере увеличения времени температурной обработки увеличивается. Особенно это заметно для элементов кислорода и кальция. (табл.1).

Таблица 1.

№	t, min	cps, Si	cps, O	cps, Ca	другие элементы
1	10	2,75	-	-	-
2	30	2,73	-	-	-
3	60	1,60	0,07	0,10	Mg
4	120	1,05	0,07	-	Ti
5	240	0,55	0,32	-	Mg, Al, K
6	360	0,14	0,32	0,26	C, Hg

Содержание кремния и остающихся металлообразующая элементов в образце по мере увеличения времени прогрева (Т=1273°К).

Сравнение спектрограмм образцов, подверженных термической обработке (Т=1273ғК) при различном времени прогрева показало, что обогащение поверхности металлообразующими элементами происходит по мере увеличения времени прогрева образца (табл.1).

Было обнаружено образование на поверхности образца карбида кремния, появление которого замечено при температурной обработке 600ғС в течение 10 минут. По мере увеличения времени прогрева образца ее процентное содержание изменяется в зависимости от условий обработки образца. Видимо, это связано неравномерным распределением углеродистых соединений в объемах и на поверхности образца.

Таким оброзом, температурным воздействием можно стимулировать изменение ряда физических характеристик кремния таких как полуширину кривой отражения *w*, которая опосредовано характеризует состояние структуры нарушенного приповерхностного слоя, процентного содержания атомов кремния на поверхности и приповерхностном слоях образца и процесса обогащения поверхности металлообразующими элементами. Все эти факторы очевидно оказывают большое влияние на электрофизические свойства кристаллического кремния.

Мы благодарим В.Н.Ермолаева за помощь в экспериментах.

Литература:

1. Глазов В.М., Кольцов В.Б., Регель А.Р., Таран Ю.Н., Тимошина Г.Г., Узлов К.И., Фалькевич Э.С. ФТП. - 1991. - Т.25. - В.4. - С.588-595.
2. Кошеров Т.С., Ермолаев В.Н., Солтан Р.С., Ермолаев Ю.В., Сеитов А.А. // Вестник КазНТУ им.К.Сатпаева. - 2013. - №1. - С.94-99.
3. Макара В.А., Стебенко Л.П., Крит А.Н., Калиниченко Д.В., Курилюк А.Н., Науменко С.Н. ФТТ. - 2012. - Т.54. - В.7. - С.1386-1360.

Резюме

Исследованный процессы изменение физических характеристик кремния при температурном воздействии. Изучались состояния наноструктуры и фазовом превращении. Определены содержания остающихся элементов и их зависимость от температуры и времени нагрева образца.

Ключевые слова: электрофизические свойства кремния, температурное воздействие, наноструктуры Si, спектрограмма образца

Түйіндеме

Зерттеу үдерістерінің температуралық әсері кезінде кремнидің физикалық мінездемесінің өзгерісі. Наноструктура күйлері және фазалық айналулары оқылды. Қалған элементтің мазмұндары және оның тәуелділігінің қызуы мен үлгінің қызбасының уақыты тағайындалды.

Кілт сөздер: кремнийдің электрофизикалық қасиеттері, температура әсері, Si наноструктуралар, Si (c) үлгісінің спектрограммасы.

Summary

Investigated processes changing of physical characteristics of a silicon at temperature influence. Conditions of the nanostructures and phase metamorphoses were studied. Maintenance of remaining elements and their dependence from temperature influence and time of heating of a sample are defined.

Key words: electrical properties of silicon, the thermal effect, Si nanostructures, spectrogram of the sample (c) Si.

УДК 521.151:621.3.095.222.4:621.3.016.35

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИБРАЦИОННЫХ ТОЧЕК ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ИЗЛУЧАЮЩИХ ЦЕНТРОВ

И.У.МАХАМБАЕВА, кандидат физико-математических наук,
Н.М.ТУРЛУГУЛОВА, М.К.АУБАКИРОВА, магистрант
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата,
Республика Казахстан

Как известно, в природе существует огромное количество двойных звезд, расстояния, между компонентами которых составляют несколько десятков тысяч астрономических единиц, а периоды их обращения столь велики, что не удается обнаружить их орбитальное движение [1,3,8]. Следовательно, на достаточно большом промежутке времени процессов образования межзвездных газопылевых облаков подобные звезды двойной системы практически можно считать неподвижными и изолированными из-за их достаточной удаленности от других звездных систем [2,3]. Тогда в качестве динамической модели частиц в силовом двойной звезды можно рассматривать задачу двух неподвижных центров [2]., но уже в качественно новой постановке: учитывать влияние сил светового давления со стороны излучающих тел, которые могут быть не только соизмеримыми с силами гравитации, но и значительно их превосходящими [4,6,7].

В настоящей работе впервые найдены необходимые и достаточные условия существования трехпараметрического семейства либрационных (стационарных) точек системы положений равновесия частиц. Получены необходимые условия устойчивости по Ляпунову и показано, что в отличие от классического варианта задачи существует целые семейства точек либрации, в которых образуются устойчивые облачные скопления частиц межзвездной среды.

Установлено, что на определенном многообразии рассматриваемые точки являются устойчивыми в нелинейном приближении.

Введение некоторого нового физического параметра, определяемого как отношение удельных мощностей излучения центров, который следует рассматривать как обобщенную характеристику гравитационно-репульсивного поля, позволяет сделать более ясную и физически наглядную интерпретацию области устойчивости рассматриваемых точек.

Движение частицы P изучим в барицентрической системе координат с осью Ox, проходящей через звезды S_1 и S_2 и осью Oy, перпендикулярной Ox; ось Oz дополняет систему до правой. При этом для удобства выберем следующие единицы измерения: сумму масс звезд m_1 и m_2 примем за единицу массы, расстояние между центрами S_1 и S_2 - за единицу длины.

Тогда уравнения движения частицы газопылевого облака межзвездной среды в поле двойной звезды можно записать так [2,4]:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (1)$$

где $U=(l-Q_1)\dfrac{m_1}{r_1}+(l-Q_2)\dfrac{m_2}{r_2}$ силовая функция,

$$r_1=\sqrt{(x+\mu)^2+y^2+z^2}, \qquad r_2=\sqrt{(x+\mu-1)^2+y^2+z^2},$$

$$Q_1=\frac{G_1}{fm_1}\times\frac{S}{m_0}, \quad Q_2=\frac{G_2}{fm_2}\times\frac{S}{m_0} \ -$$

коэффициенты, зависящие от интенсивности излучения звезды и парусности частицы, G_i, m_i - мощность излучения и масса i - той звезды ($l=1,2$), S и m_0 - площадь поперечного сечения и масса частицы, движение которой излучается, f гравитационная постоянная, r_1, r_2 - расстояния от центров до точек $S_1(O,O,x_1)$ и $S_2(O,O,x_2)$, в которых расположены звезды.

Переходя к безразмерным массам, имеем

$$m_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}=\mu, \qquad m_1=\frac{m_1}{m_1+m_2}=\frac{1-m_2}{m_1+m_2}=1-\mu$$

Если поместить начало O координатных осей в центр масс системы из двух звезд, то координаты расположения звезд на оси x определим из следующих формул:

$$m_1x_1+m_2x_2=(1-\mu)x_1+\mu x_2=0, \quad x_2-x_1=1$$

как $x_1=-\mu, \quad x_2=1-\mu$

Теперь поставим задачу определения координат положений равновесия частицы, которая приводит к отысканию решения системы следующих алгебраических уравнений относительно x,y,z:

$$(A+B)y=0, (A+B)z=0, Af_1+Bf_2=0, \tag{2}$$

где $$A=\frac{(1-Q)(1-\mu)}{r_1^3}, B=\frac{(1-Q_2)\mu}{r_2^3}, f_1=(x+\mu), f_2=(x+\mu-1).$$

Легко показать, что последняя система (2) допускает решение только тогда, когда y=z=0. Следовательно, рассматриваемая задача сводится к решению трехпараметрического алгебраического уравнения седьмого порядка относительно x, т.е.

$$\frac{(1-Q)(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3}+\frac{(1-Q_2)\mu(x-1+\mu)}{r_2^3}=0, \tag{3}$$

где $$r_1=|x+\mu|, \quad r_2=(x+\mu-1)$$

Для исследования на устойчивость равновесных состояний частиц введем возмущения по формулам

$$\xi=x-x^*, \quad \eta=y-y^*, \quad \zeta=z-z^*,$$

которые подставляя в исходные уравнения движения (1), называемые уравнениями невозмущенного движения частицы, и раскладывая в ряд их правые части, имеем

$$\begin{aligned}
\xi&=\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\right)_*\xi+\left(\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\right)_*\eta+\left(\frac{\partial^2U}{\partial x\partial z}\right)_*\zeta+...,\\
\eta&=\left(\frac{\partial^2U}{\partial y\partial x}\right)_*\xi+\left(\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right)_*\eta+\left(\frac{\partial^2U}{\partial y\partial z}\right)_*\zeta+...,\\
\zeta&=\left(\frac{\partial^2U}{\partial z\partial x}\right)_*\xi+\left(\frac{\partial^2U}{\partial z\partial y}\right)_*\eta+\left(\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\right)_*\zeta+....
\end{aligned} \tag{4}$$

Для изолированной двойной звезды решение вопроса об устойчивости положения равновесия частицы сводится к рассмотрению лишь одного уравнения

$$\ddot{\xi}+c_1\xi=f(\xi), \tag{5}$$

решение которого при $f(\xi)=0$ имеет вид

$$\zeta=\zeta_0\cos\left(\sqrt{c_1}\cdot t\right). \tag{6}$$

Последняя величина будет ограниченной (не возрастающей) вещественной функцией, если аргумент косинуса

$$c_1=-2\frac{(1-Q_1)(1-\mu)}{\left|x+\mu^3\right|}-2\frac{(1-Q_2)\mu}{\left|x+\mu-1\right|^3}\geq 0$$

Следовательно, необходимые условия устойчивости положений равновесия изучаемой частицы можно записать в следующем виде:

$$(1-Q_1)\frac{(1-\mu)}{\left|x+\mu^3\right|}+(1-Q_2)\frac{\mu}{\left|x+\mu-1\right|^3}\leq 0 \tag{7}$$

Для получения более полного ответа на вопрос об устойчивости [5] стационарных состояний частицы выпишем уравнения возмущенного движения с привлечением нелинейных членов:

$$\ddot{\xi}+c_1\xi+c_2\xi^2+c_3\xi^3=0 \tag{8}$$

где

$$c_1=-\frac{2(1-Q_1)(1-\mu)}{r_1^3}-\frac{2(1-Q_2)\mu}{r_2^3},$$

$$c_2=-\frac{6(1-Q_1)(1-\mu)}{r_1^4}+\frac{6(1-Q_2)\mu}{r_2^4},$$

$$c_3=-\frac{24(1-Q_1)(1-\mu)}{r_1^5}-\frac{24(1-Q_2)\mu}{r_2^5},$$

Записав (8) в нормальной форме

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-c_1x_1-c_2x_2^2-c_3x_1^3, \tag{9}$$

и построив функцию Ляпунова, убеждаемся в том, что $\dot{V}$ в силу уравнений (8) при $c_1=1$ равна нулю, что гарантирует устойчивость по Ляпунову [6] рассматриваемых положений равновесия в строго нелинейной постановке [5].

Для введения в рассмотрение параметра k $(k=Q_1/Q_2)$, обращаясь к формуле (7) нетрудно установить, что необходимые условия устойчивости положения равновесия для внутренних и внешних точек имеют вид:

$$\frac{k(1-\mu)r_2^2\mp\mu r_1^2}{(1-\mu)r_2^2\mp\mu r_1^2}[(1-\mu)r_2^3+\mu r_1^3]-[k(1-\mu)r_2^3-\mu r_1^3]\leq 0 \tag{10}$$

Полученные выражения позволяют установить область устойчивости частиц газопылевого облака в поле двойных звезд, которые составляют более половины известных звездных систем. Решение неравенств (10) для произвольных фиксированных значений μ является чрезвычайно сложной задачей, так как требует анализа двухпараметрического алгебраического уравнения 7-го порядка относительно одного из радиусов или x.

Рассмотрим наиболее интересный с точки зрения приложений случай, когда массовые параметры звезд одинаковы, что характерно для двойных звездных систем [3-8]. Совместное рассмотрение неравенств (11) при $\mu=1/2$ позволяет установить область устойчивости по Ляпунову рассматриваемых положений равновесия частиц в плоскости (k, z) (см. рис. 1). Разработана программа, позволяющая строить область устойчивости для произвольных значений параметров системы (10).

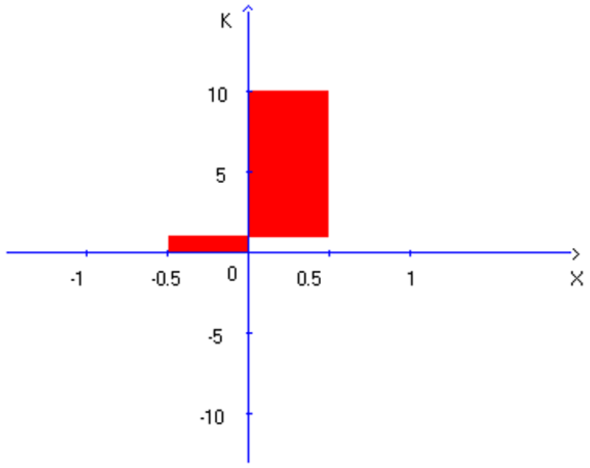


Рис.1 - Область (заштрихована) устойчивости стационарных решений для $\mu = 1/2$.

Практическая значимость результатов работы не исчерпывается лишь динамикой частиц межзвездной материи. Она может быть использована в качестве основной математической модели при изучении движения космических аппаратов с солнечным парусом, а также кометных форм и малых планет в системе Солнце-Юпитер [6, 7].

Литература:

1. Ачекян Т.А. Звезды, галактики, Метогалактика. - М.: Наука, 1981. – 415 с.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. - М.: Наука, 1975. -799 с.
3. Куликовский П.Г. Звездная астрономия. - М.: Наука. – 1985. - 272с.
4. Kunitsin A.L., Tureshbaev A.T. On the colliniar libration points in the photo-grovitational three-body problem.//Celest. Mech., 1985,v.35,p.105-112.
5. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. - М.: Наука, 1980. - 379с.
6. Турешбаев А.Т. //Письма в Астрон.журн. – 1986. -Т.12. - №9. - С.722-725.
7. Турешбаев А.Т., Махамбаева И.У.// Вестник КазНУ. – 2002. - №5. - С.109-114.
8. Шкаловский И.С. Звезды: их рождение, жизнь и смерть. - М.: Наука, 1984. – 384 с.

Резюме

В работе найдены необходимые и достаточные условия существования семейства стационарных точек двух неподвижных центров. Получены необходимые условия устойчивости этих точек, в которых образуются устойчивые облачные скопления частиц межзвездной среды. Установлено, что на некотором многообразии рассматриваемые точки являются устойчивыми в нелинейном приближении. Введение некоторого нового физического параметра позволяет сделать более ясную и физически наглядную интерпретацию области устойчивости рассматриваемых точек.

Ключевые слова: фотогравитационная задача двух неподвижных центров, точки либрации, устойчивость по Ляпунову, движение частицы, двойные звезды, уравнения движения, пространство параметров, область устойчивости в линейном приближении.

Түйіндеме

Бұл ғылыми мақалада екі қозғалмайтын орталықтар нүктелерінің стационарлық жиынының бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Қарастырылып отырылған нүктелердің бейсызықтық жуықтауда орнықты болатындығы анықталды. Кейбір жаңа физикалық параметрлерді енгізу арқылы қарастырылып отырылған нүктелердің орнықтылық аумағының нақты және физикалық көрінісінің интерпритациясын алуға мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: қозғалмайтын фотогравитациялық екі орталық есебі, либрациалық нүктелер, Ляпунов бойынша орнықтылық, бөлшек қозғалысы, қос жұлдыз, қозғалыс теңдеулері, параметрлер кеңістігі, бірінші жуықтау бойынша орнықтылық облысы.

Summary

Necessary and enough conditions of existing of two motionless centers are found in the article. Necessary conditions of stability of there points have been got, in which a steady cloudy conditions of particles of gas-dust of clouds are formed. Considered points in some varities are stable in non-linear approach. Introduction of some new physical parameters allows to make it clear and visual interpretation of stability of consideral points physically.

Key words: a photogravitational problem of two motionless centers, points libration, stability on Lyapunov, the particle movement, the limited circular problem, double stars, the initial equations of movement, space of parameters, stability area in linear approach.

УДК 531.36

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

С.Т.МУХАМБЕТЖАНОВ, доктор физико-математических наук, профессор,
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы,
У.Ш.ОМАРОВА, кандидат технических наук, **Г.О КЕРИМ,** магистрант
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата,
Республика Казахстан

Рассматриваются периодические движения вблизи треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел, отличающиеся от соответствующей классической задачи тем, что основные тела, обращающиеся по круговым орбитам, являются излучающими. Найдены многопараметрические решения задачи вблизи треугольных точек либрации, отвечающих точным решениям соответствующей системы дифференциальных уравнений ограниченной фотогравитационной задачи трех тел. Доказано, что возможные периодические движения являются плоскими, расположенными в плоскости орбитального движения основных тел.

Показано, что траектории движения частиц в окрестности исследуемых треугольных точек будут эллипсами, полуоси которых зависят от параметров фотогравитационного поля.

Как известно, периодические движения вблизи точек либрации классической ограниченной задачи трех тел исследованы многими авторами [1,2]. В работах [5,6] впервые сформулирована и доказана общая теорема о существовании ляпуновских семейств симметричных периодических движений и строго математически обоснован конструктивный метод численного построения и исследования их устойчивости в обратимой системе. Построение траекторий путем численного интегрирования системы уравнений, поиск симметричного периодического решения, а также способ исследования устойчивости орбиты вокруг коллинеарных точек либрации ограниченной фотогравитационной задачи трех тел успешно реализованы в работе [7].

Поставим задачу определения периодических движений вблизи треугольных точек 448ибрации L_4 и L_5 ограниченной фотогравитационной круговой задачи, дифференциальные которой имеют вид

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial W}{\partial x},\\
&\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial W}{\partial y},\\
&\ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z}, \qquad (1)\\
&W = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{q_1(1-\mu)}{r_1} + \frac{q_2\mu}{r_2},\\
&r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2 + z^2, r_2^2 = (x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2,
\end{aligned}$$

Здесь q_1 и q_2 - коэффициенты редукции, зависящие от мощности излучения основных тел и парусности частицы, определяемой отношением «сечение/масса», $1-\mu$ и μ - безразмерные массы основных тел.

Рассмотрим теперь решения системы уравнений (1), близкие к треугольным точкам. Для этого введем обозначения

$$x=x_j+\xi,\ y=y_j+\eta,\ z=z_j+\zeta \quad (j=1,2),$$

где x_j, y_j, z_j – координаты треугольных точек, которые подставляя в (1), получим уравнения возмущенного движения относительно отклонений ξ, η и ζ, решения которых ищем в виде рядов, расположенных по степеням некоторой произвольной постоянной с коэффициентами, представляющими 2π-периодические функции времени. Применяя метод, предложенный А.М. Ляпуновым [1], запишем уравнения, определяющие первые коэффициенты искомых рядов

$$\frac{d^2\xi^{(1)}}{d\tau^2}-\frac{2}{\lambda}\frac{d\eta^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left(a_{xx}\xi^{(1)}+a_{xy}\eta^{(1)}\right),$$

$$\frac{d^2\xi^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{2}{\lambda}\frac{d\xi^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left(a_{xy}\xi^{(1)}+a_{yy}\eta^{(1)}\right), \tag{2}$$

$$\frac{d^2\zeta^{(1)}}{d\tau^2}=\frac{1}{\lambda^2}a_{zz}\zeta^{(1)}$$

Решение (2) ищем в виде

$$\zeta^{(1)}=a''\cos\tau+b''\sin\tau, \qquad \eta^{(1)}=a'\cos\tau+b'\sin\tau,$$

$$\xi^{(1)}=a\cos\tau+b\sin\tau, \tag{3}$$

и для определения в них неизвестных коэффициентов подставим уравнения (3) в систему (2) и имеем

$$\left(1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2}\right)a+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}a'+\frac{2}{\lambda}b'=0, \quad \left(1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2}\right)b-\frac{2}{\lambda}a'+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}b'=0,$$

$$\frac{a_{xy}}{\lambda^2}a-\frac{2}{\lambda}b+\left(1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2}\right)a'=0,\ \frac{2}{\lambda}a+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}b+\left(1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2}\right)b'=0, \tag{4}$$

$$\left(1+\frac{a_{zz}}{\lambda^2}\right)a''=0,\ \left(1+\frac{a_{zz}}{\lambda^2}\right)b''=0.$$

Где

$$a_{xx}=W_{xx}=3\left[q_1(1-\mu)(x+\mu)^2/r_1^2+q_2\mu(x+\mu-1)^2/r_2^2\right],$$

$$a_{yy}=W_{yy}=3y^2\left[q_1(1-\mu)/r_1^2+q_2\mu/r_2^2\right],$$

$$a_{xy}=W_{xy}=3y\left[q_1(1-\mu)(x+\mu)/r_1^2+q_2\mu(x+\mu-1)/r_2^2\right],,$$

$$a_{zz}=W_{zz}=-1.$$

Первые четыре уравнения системы (4) перепишем в виде

$$\begin{aligned}&Aa+0+Ba'+Cb'=0,\\&0+Ab-Ca'+Bb'=0,\\&Ba-Cb+Da'+0=0,\\&Ca+Bb+0+Db'=0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$A=1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2},\quad B=1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2},\quad C=\frac{2}{\lambda},\quad \mathrm{D}=1+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}$$

Определители системы (5) и двух последних уравнений (4) имеют вид:

$$\Delta_1(\lambda)=\begin{vmatrix} A & 0 & B & C \\ 0 & A & -C & B \\ B & -C & D & 0 \\ C & B & 0 & D \end{vmatrix}=\left\{\frac{1}{\lambda^4}\left[(\lambda^2+a_{xx})(\lambda^2+a_{yy})-a_{xy}^2-4\lambda^2\right]\right\}^2, \tag{6}$$

$$\Delta_2(\lambda)=\frac{1}{\lambda^4}(\lambda^2+a_{zz})^2.$$

Характеристическое уравнение исследуемой системы распадается на два уравнения:

$$\begin{cases}\lambda^4+(4-a_{xx}-a_{yy})\lambda^2+a_{xx}a_{yy}-a_{xy}^2=0,\\ \lambda^2-a_{zz}=0\end{cases} \tag{7}$$

Первое из (7) имеет две пары чисто мнимых корней при выполнении условий

$$0\le\mu(1-\mu)\sin^2(\varphi_1+\varphi_2)\le\frac{1}{36}, \tag{8}$$

где φ_1,φ_2 и x,y,r_1,r_2 между собой связаны следующими выражениями [8]:

$$\sin\varphi_1=\mathrm{y}/\mathrm{r}_1,\cos\varphi_1=(\mathrm{x}+\mu)/\mathrm{r}_1,$$
$$\sin\varphi_2=\mathrm{y}/\mathrm{r}_1,\cos\varphi_2=-(\mathrm{x}+\mu-1)/r_2,$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего первому из (7), могут быть записаны как [4]

$$\lambda_{1,2}=\pm i\omega_1,\qquad \lambda_{2,3}=\pm i\omega_2,$$

где $\omega_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(4-a_{xx}-a_{yy})-\sqrt{(4-a_{xx}-a_{yy})^2-4(a_{xx}a_{yy}-a_{xy}^2)}},$

$$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(4-a_{xx}-a_{yy})-\sqrt{(4-a_{xx}-a_{yy})^2+4(a_{xx}a_{yy}-a_{xy}^2)}} \tag{9}$$

С учетом (7) и (9) нетрудно установить, что определители системы (4) относительно коэффициентов равны

$$\Delta_1(\lambda_1)=0,\Delta_1(\lambda_2)=0,\Delta_2(\lambda_1)\ne0,\Delta_2(\lambda_2)\ne0 \tag{10}$$

Теперь легко установить, что система первых четырех уравнений системы (4) имеет решения, в которых все искомые величины не равны одновременно нулю, а два её последних уравнения имеют только тривиальное решение. Поэтому функция $\zeta^{(1)}$ равна нулю тождественно, а так как всякая функция $Z^{(k)}$ имеет множители ζ, то любая $\zeta^{(\kappa)}$ равна тождественно нулю, т.е.

$$\zeta\equiv0, \tag{11}$$

и, следовательно рассматриваемое периодическое решение – плоское.

Таким образом, коэффициенты a'' и b'' равны нулю. Чтобы найти $\xi^{(1)}$ и $\eta^{(1)}$ нужно определить постоянные a, b, a´, b´ из системы уравнений (4).

Элементарный анализ этих уравнений позволяет получить, что

$$a_1' = -\frac{a_{xy}}{\omega_1^2 + a_{yy}}, \quad b_1' = -\frac{2\omega}{\omega_1^2 + a_{yy}}, \quad a_2 = -\frac{a_{xy}}{\omega_2^2 + a_{xx}}, \quad b_2 = \frac{2\omega}{\omega_2^2 + a_{xx}}, \tag{12}$$

Первые два периодических решения системы определяются формулами

$$\begin{cases} \xi_1 = \cos\tau + c^2\xi_1^{(2)} + c^3\xi_1^{(3)} + \ldots \\ \eta_1 = c(a_2'\cos\tau + b_2'\sin\tau) + c^2\eta_1^{(2)} + c^3\eta_1^{(3)} + \ldots \\ \zeta_1 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \xi_2 = c(a_2\cos\tau + b_2\sin\tau) + c^2\xi_2^{(2)} + c^3\xi_2^{(3)} + \ldots \\ \eta_2 = c\cos\tau + c^2\eta_2^{(2)} + c^3\eta_2^{(3)} + \ldots \\ \zeta_2 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Ограничиваясь только членами первого порядка относительно с в уравнениях (13) и (14), получим

$$\cos\tau = \frac{\xi_1}{c}, \quad \cos\tau = \frac{\eta_2}{c}, \quad \sin\tau = \frac{\eta_1 - a_1'\xi_1}{cb_1'}, \quad \sin\tau = \frac{\xi_2 - a_2\eta_2}{cb_2},$$

где

$$a_2 = -a_{xy}/(\omega_2^2 + a_{xx}), \ \mathrm{b}_2 = 2\omega_2(\omega_2^2 + a_{xx}), \ \mathrm{a}_1' =$$
$$= -a_{xy}(\omega_1^2 + a_{yy}), \ \mathrm{a}_1' = -2\omega_1(\omega_1^2 + a_{yy}).$$

а с- произвольный параметр, в качестве которого может быть принято начальное отклонение, например, величины ξ.

Уравнения орбит, соответствующих каждому из решений (10) и (11), приближенно могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{\xi_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{a_1'\xi_1 - \eta_1}{cb_2'}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\xi_2 - a_2\eta_2}{cb_2}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{c}\right)^2 = 1 \tag{15}$$

Как видим, каждое из уравнений (15) представляет уравнение эллипса с центром, расположенным в области семейства устойчивых треугольных точек либрации. Следовательно, найденным периодическим решениям соответствует трехпараметрическое семейство замкнутых эллиптических орбит, окружающих треугольные точки и расположенные в плоскости орбитального движения, которые сохраняют свои формы во вращающейся вместе с основными телами системе координат, а их размеры зависят от интенсивности излучения основных тел и парусности частицы. Функции $\xi_1, \eta_1, \ \xi_2, \ \eta_2$ будут периодическими функциями времени с периодами

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}\left[1 + h_1^{(1)}c^2 + \ldots\right], \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}\left[1 + h_2^{(2)}c^2 + \ldots\right]$$

Рассматриваемая задача является наиболее важной с точки зрения приложений в звездной динамике: на её основе можно эффективно строить промежуточные орбиты космических газопылевых облаков в поле двойных звездных систем. Результаты исследования также могут быть использованы и при изучении движения космических аппаратов в системе «Солнце-Планета»

Литература:

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. - М.: Наука, 1964. - 560 с.

2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. - М.: Наука, 1978. - 312 с.

3. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации. ФЗТТ//Письма в астрологический журнал. – 1983. - Т.9. - №7. – С. 432-435.

4. Kunitsyn A.L., Tureshbaev A.T. On the libration points in the photo-gravitational three-body problem.//Celest. Mesh., 1985. v.35 p.105-112.

5. Тхай В.Н. Неподвижные множества и симметричные периодические движения обратных механических систем // ПММ. - 1996. - Т.60. - В.6. - С.979-991.

6. Тхай В.Н. Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе. // ПММ. - 2000. - Т.64. 1. - С.46-58.

7. Ефимов И.Л., Тхай В.Н. Устойчивость периодических орбит в задаче Хилла. Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. - М.: ВЦ РАН, 1999. - С.45-60.

8. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. Устойчивость треугольных точек либрации. ФЗТТ. // Письма в АЖ. - 1985. - Т.2. - № 2. - С.145-148.

Резюме

Найдены трехпараметрические периодические решения задачи вблизи треугольных точек либрации, отвечающих точным решениям соответствующей системы дифференциальных уравнений ограниченной фотогравитационной задачи трех тел. Доказано, что возможные периодические движения являются плоскими, расположенными в плоскости орбитального движения основных тел. Показано, что траектории движения частиц в окрестности исследуемых треугольных точек будут эллипсами, полуоси которых зависят от параметров фотогравитационного поля.

Ключевые слова: задачи трех тел, треугольные точки либрации, периодические движения, фотогравитационные задачи трех тел.

Түйіндеме

Үш дененің фотогравитациялық есебінің шектеулі дифференциалды теңдеулер жүйесіне сәйкес нақты шешіміне жауапты үшбұрышты либрациялы нүктелерге жақын үшпараметрлі периодты есептердің шешімдері табылған. Жазық орбитальды қозғалыста орналасқан негізгі денелердің мүмкін болатын периодты қозғалысы жазық болатындығы дәлелденді. Зерттеліп отырған үшбұрышты нүктелері айналасындағы нүктелердің қозғалыс траекториясы эллипс болатындығы көрсетілген.

Кілт сөздер: үш дене есептері, либрацияның үшбұрышты нүктелері, периодты қозғалыс, үш дененің фотогравитациялық мәселелері.

Summary

There are considered periodical movements near were found the triangular points of librations of the photogravitational limited problem of three bodies. Multipleparametrical decisions of a problem near the triangular points of librations were proved. It is proved, that possible periodical movements are flat, located in a plane of orbital movement of the basic bodies. It is shown, that trajectories of movement of particles in a vicinity of investigated points will be ellipses, which halfaxis depend from parameters of the photogravitational field.

Key words: Problems of three bodiesa, triangular points of librations, periodical movements, photogravitational limited problem of three bodies.

УДК 334

ДЕРЕКТЕР ҚОРЫН ҰЙЫМДАСТЫРУ ЖӘНЕ САҚТАУ ТҰЖЫРЫМДАМАЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯСЫ

А.К. МУСЛИМОВА, магистр,
Т.Рысқұлов атындағы Қазақ экономикалық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы

Қазіргі таңда деректер қорын әзірлеуде *деректердің реляциялық үлгісі* кең қолданылады. Деректердің реляциялық үлгісі түсінігі (ағылшын тілінде *relation* – қарым-қатынас) Е. Кодтың әзірлемелерімен байланысты. Бұл үлгілер пайдаланушыларға кесте ретінде көрсетуге ыңғайлы деректер құрылымының қарапайымдылығымен, реляциялық алгебраның ресми аппаратын және деректерді өңдеу үшін реляциялық есептеуді пайдалану мүмкіндігімен сипатталады.

Реляциялық үлгі екіөлшемді кесте түрінде деректерді ұйымдастыруға бағдарланған. Реляциялық кесте – екіөлшемді ауқым және келесі қасиеттері бар: кестенің әрбір элементі – деректердің бір элементі, кестедегі барлық бағаналар біртекті, яғни бағанадағы барлық элементтер біртиптес және ұзындығы да бірдей (сандық, символдық және т.б.) болады, әрбір бағананың бірегей аты бар, кестеде бірдей жолдар жоқ, бағандар мен жолдар беталды орналасуы мүмкін.

Реляциялық деректер қорын жобалау үш жеке кезеңнен: тұжырымдылық, логикалық және физикалық жобалау кезеңінен тұрады.

Тұжырымдамалық жобалаудың мақсаты – пән саласын сипаттау негізінде дерек қорды әзірлеу. Сипаттама дерек қорға жүктеу үшін қажет құжаттар мен деректер жиынтығын, сондай-ақ пән саласын сипаттайтын объектілер мен үдерістер туралы мәліметтерді қамтуы тиіс. Дерек қорды әзірлеу пайдаланушылардың сұрауларын орындауды қамтамасыз ету үшін дерек қорда сақталуға жататын деректер құрамын анықтаудан басталады. Содан кейін оларға талдау мен құрылымдау жасалады.

Нақты ұйымдастыру кезінде деректер қоры қолданбалы программаларға деректер ұсынумен емес, керісінше, оларды зерделік сақтаушы құрылғыларға орналастырумен айналысады.

Нақты ұйымдастыруды таңдаған кезде тиімділік шешуші фактор болып табылады, бұл жерде іздестірудің тиімділігін қамтамасыз ету бірінші орында тұр, одан кейінгі орындарда жою операцияларының тиімділігі, содан кейін деректердің ықшамдылығын қамтамасыз ету орналасқан. Сонымен қатар, соңғы кезде деректерді заңсыз алудан қорғау мәселелері өзекті болып отыр.

Дерек қорды жобалау нәтижесінде деректердің ақпараттық-логикалық үлгісі дайындалуы тиіс, яғни реляциялық кестелердің құрамы, олардың құрылымы мен логикалық байланыстары анықталуы керек. Реляциялық кестенің құрылымы жолдардың құрамымен, әрбір жолдың типімен және көлемімен, сондай-ақ кестенің кілтімен анықталады.

Деректер банкі мен деректер қоры бір компьютерде орналасуы *жергілікті* деп, ал компьютерлік желімен байланысқан бірнеше компьютерде орналасуы – *бөлінген* деп аталады.

Бөлінген деректер қорының жүйесі коммуникациялық желімен байланысты тораптар жинақталымынан тұрады. Онда:әрбір тораптың деректер қорының жеке жүйелері бар, тораптар бірігіп жұмыс жасайды, сондықтан пайдаланушы барлық деректер өзінің торабында тұрғандай желінің кез келген торабында деректерді ала алады.

Ақпараттарды талдаумен байланысты негізгі мәселелерге, әдетте бастапқы көздердегі деректердің бытыраңқылығы, талдамалы міндеттерді шешудегі олардың дайындық сапасы мен деңгейі (агрегаттардың, есептелетін көрсеткіштердің жоқтығы) себеп болды. Сондықтан, бүгінгі күні деректерді сақтау орны талдамалы ақпараттық жүйені жүзеге асыруда қолданылатын айтарлықтай сұранысқа ие технология болып отыр. Оның көмегімен бастапқы деректерді жинау, тазалау және қайта жасау міндеті шешіледі.

Деректерді сақтау концепциясының негізінде жатқан негізгі идеялар:кейбір нақты фактілер, қасиеттер, оқиғалар және т.б. сипаттайтын бөлінген нақтыланған деректерді бірыңғай сақтау орнына біріктіру, деректер мен қосымшалар жинақталымдарын оперативті өңдеу үшін пайдаланылатын және талдау міндеттерін шешу үшін қолданылатын деп бөлу.

Деректер қорын ұйымдастырудың жаңа технологиясының – деректерді сақтау орнының технологиясының пайда болуы туындаған қажеттілікке қайтарылған жауап болды. Деректерді сақтау орны – бұл ірі корпорацияның немесе ұйымның стратегиялық шешімдер қабылдауға қолдау көрсету мақсатында қарама-қайшы келмейтін, біріктірілген заттық-бағдарланған тарихи деректерінің жиынтығын қамтитын жүйе.

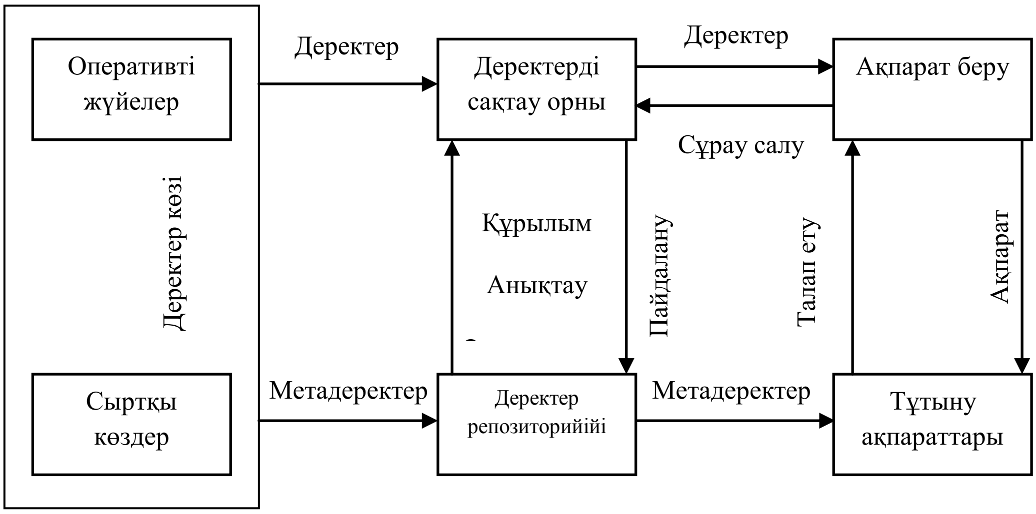
Деректерді сақтау деректерді жинайды, тазалайды, жүктейді, біріктіреді, сақтайды және оларға жылдам қол жеткізуді қамтамасыз етеді. Тиімді пайдаланған кезде деректерді сақтау ұйымның барлық бөлімшелерінің басшылары мен мамандарына сенімді ақпарат берудің негізгі көздерінің бірі болып табылады. Бұл басқарушылық шешімдер қабылдаудың келісілімділігін, деркезділігін және негізділігін, басқарушылық есептерді беруді қамтамасыз етеді.

Деректерді сақтау орны туралы деректерді алу, қайта құру, қосу (ETL – extraction, transformation, loading) және ары қарай өңдеу үшін ақпараттар жиналатын деректер көзінің жиынтығы (байланысты кестелер құрылымы – бұл сақтау орны) ретінде айтуға болады

Деректердің реляциялық қоры деректердің нақты сақтау орны болып табылады. Алайда, корпорациялық ақпараттық жүйелердің деректер қорына қарағанда сақтау орнының құрылымы басқаша.

Басқа көздерден алынған деректер деректерді сақтауға, ал осы деректемелердің сипаттамалары метадеректер репозиторийіне орналастырылады. Соңғы пайдаланушы әр түрлі аспаптар (визуалдау, есептер жасау, статистикалық өңдеу және т.б. құралдары) мен репозиторийдегі деректерді пайдалана отырып, сақтау орнындағы деректерді талдайды. Қандайда бір болжамдар, табылған жасырын заңдылықтар, дайын есептер түріндегі ақпараттар оның қызметінің нәтижесі болып табылады. Себебі, соңғы пайдаланушының деректерді сақтау орнымен жұмыс жасау әдісі әр түрлі болатындықтан, теориялық тұрғыдан алғанда олардың таңдауы оның құрылымы мен қызметіне әсер етпеуі тиіс.

Деректерді сақтау орнының тұжырымдамалық үлгісін схема түрінде көрсетуге болады.



Сызба 1 - Деректерді сақтау орнының тұжырымдамалық үлгісі

Деректерді сақтау орнының ерекшеліктері шешуге: SQL-сұрау салу оперативті деректер қоры үшін күрделі ақпараттарды талдамалы оперативті өңдеу бағдарланған міндеттердің ерекшеліктерімен байланысты.

Деректер қоры негізінде көптеген деректер – көптеген белгілерді қамтитын OLAP-кубтар, деректердің көпөлшемді иерархиялық құрылымдары қалыптасады. Ол белгілер: күні/уақыты, деректер жататын қызмет саласы, басқару субъектісі, ресурс түрлері және т.б.

Бұл белгілер статистикалық бағалауларды есептеу мен белгілерді беталды үйлестіру арқылы деректерді біріктіруге мүмкіндік береді. Ақпаратты талдау нәтижесінде басқару мақсаттары үшін пайдалы жаңа білімді қалыптастырады.

Деректер сақтау орындарына бизнес-үдерістерді автоматтандыруға арналған оперативті жүйелерден (OLAP-жүйелерден) келіп түседі. Сонымен қатар, сақтау орнын сыртқы көздер есебінен, мысалы статистикалық есептер есебінен толықтыруға болады.

«Деректерді сақтау орнын құру не үшін қажет – олар онсызда деректер қорында немесе оперативтік жүйелердің файлдарында бар артық ақпараттарды қамтымайды ма?» – деген сұраққа, оперативтік жүйелердің деректеріне тікелей талдау жасау мүмкін емес немесе өте күрделі деп жауап беруге болады. Бұл әр түрлі себептермен, әсіресе деректердің бытыраңқылығымен, олардың түрлі деректер қорын басқару жүйесінің пішімдері мен корпорациялық желілердің түрлі «бұрыштарында» сақталуымен түсіндіріледі.

OLAP (On-line Analytical Processing) деректерді сақтау орнының қажетті атрибуты болып табылмайды, алайда ол көбіне сақтау орнында жиналып қалған мәліметтерді талдау үшін қолданылады.

Жедел деректер әр түрлі көздерден жиналады, тазартылады, біріктіріледі және реляциялық сақтау орнына қойылады. Және де есептерді құрудың әр түрлі әдістері арқылы оларға талдау жасау қол жетімді болады. Кейін деректер (толық немесе жеке-жеке) OLAP-талдауға дайындалады. Олар арнайы OLAP дерек қорға салынуы немесе реляциялық сақтау орнында қалуы мүмкін. Метадеректер, яғни құрылым туралы ақпарат, деректерді орналастыру және өзгерту оның маңызды элементі болып табылады.Солардың арқасында сақтау орындарының әр түрлі компоненттерінің тиімді өзара әрекет етуі қамтамасыз етіледі.

Осылайша, сақтау орнының міндеті – талдау үшін бір орында және қарапайым, түсінікті құрылыммен «шикізат» жеткізу.

Жеке сақтау орынының пайда болуын анықтайтын тағы бір себеп бар.Жылдам ақпараттарға күрделі талдамалық сұрау салу сервер ресурстарын басып алып және кестелерді жауып тастап,компанияның ағымдағы жұмысына кедергі келтіреді.

Ұйымдарды деректерді сақтау орынлдарын енгізугі итермелейтін негізгі себептер:

Талдамалы сұрауларды орындау және есептеу ресурстарында негізгі ақпараттық жүйеде жасалмаған есептерді генерациялау қажеттігі, сұрауларды орындау есеп-қисаптарды дайындау,деректер мен технологиялардың үлгілерін пайдалану қажеттігі, сұрау салуға есеп - қисаптарды дайындауға жетерлік деректер қорын басқару жүйесі негіздерінің салыстырмалы түрде аз ғана болса да білімдері бар ортаны құру,таза ақпараты бар деректер көзін құру, алынған ақпараттар негізінде есептерді дайындау үдерісін жеңілдету,жүйенің бизнес талап етіп отырған деректерін сақтау,соңғы пайдаланушыларды тіркейтін жүйе дерекқоры жұмысының құрылымы мен логикасынан хабарлар болу қажеттігінен қорғау.

Деректерді сақтау орны-стратегиялық шешімдер қабылдау үшін ірі корпорацияның немесе ұйымның тарихи деректерінің қарама-қайшылықсыз біріктірілген заттық-бағдарланған жиынтығын қамтитын жүйе.

Әдебиеттер:

1.Информационные технологии управления: Учебное пособие // Под ред. Ю.М.Черкасова - М.: ИНФРА-М, 2001.

2.Вычислительные системы, сети и телекоммуникации: Учебник для вузов. 2-е изд./В.Л.Бройдо. - СПб: Питер, 2004. - 703с.

3. Кулаков Ю.А., Луцкий Г.М. Компьютерные сети. – Киев: Юниор, 1999.

4. Титоренко Г.А. Информационные системы в экономике [Электронный учебник].- Москва, 2008. – 463 с.

Түйіндеме

Дерек қорды жобалау нәтижесінде деректердің ақпараттық-логикалық үлгісі дайындалуы тиіс, яғни реляциялық кестелердің құрамы, олардың құрылымы мен логикалық байланыстары анықталуы керек. Деректерді сақтау орны талдамалы ақпараттық жүйені жүзеге асыруда қолданылатын айтарлықтай сұранысқа ие технология болып отыр. Оның көмегімен бастапқы деректерді жинау, тазалау және қайта жасау міндеті шешіледі. Деректерді сақтау деректерді жинайды, тазалайды, жүктейді, біріктіреді, сақтайды және оларға жылдам қол жеткізуді қамтамасыз етеді.

Кілт сөздер: деректерді сақтау, реляциялық деректер, логикалық байланыстар, жобалау.

Резюме

При проектирование базы данных для результатов должен подготовлен информационно-логический образец данных, то есть реляционный состав таблиц, логическая связь и внешний состав должен определен. Место для хранение данных аналогично для информационных систем при этом для применение запрашивается технология систем. При их помощи можно начальные данные собрать, очистить и заново выбрать правильное решение. Хранение данных позволяет собирать данные, чистить, загружать, соединять, сохранять и обеспечивать общий доступ.

Ключевые слова: хранить данные, реляционные данные, логические связи, проектировать.

Summary

While designing database has been prepared for the results of information- logical data model , that is, the relational structure of the tables, the logical connection and external staff should defined. A place to store data similarly for information systems at the same time requested for the use of technology systems. They can be used to collect the initial data, cleanse and re-select the correct decision. Storing data collects data to clean, to download, to link, to save, to share and to provide general access.

Key words: a storing data, relational data, a logical communication design.

УДК 004.087

ЭЛЕКТРОНДЫ ҚҰЖАТ АЙНАЛЫМЫ ЖҮЙЕСІНДЕ ҚҰЖАТ АҒЫНДАРЫН ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСТЕРІ

А.Б.ОСТАЕВА, педагогика ғылымдарының кандидаты,
Г.Ж. ЖҰМАБАЙ, Г.ӘМІРЖАНҚЫЗЫ - магистранттар
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті,
Қазақстан Республикасы

Компьютерлік техниканың даму процесінде компьютердің есептеуіш құрылғы ретіндегі қызметі төмендеп, ол ақпаратты сақтау құрылғысы ретінде, яғни үлкен көлемді ақпаратты сақтау және өңдеу ісінде адамның ең негізгі көмекшісіне айналды. Осыған орай өткен ғасырдың 70-жылдарынан бастап программистердің негізгі жұмысы есептеу мәселелері емес, мәліметтер қоры мен мәліметтер банкін құру және оны басқару жағына ауысты.

Қандай да жұмысты тиімді басқару үшін оның орындалуын бақылаудың ұтымды әдістері жасалады. Олар жаңа білім алуға немесе объективтілік туралы ілімді ары қарай нақтылауға, сонымен қатар басқару тиімділігін арттыруға мүмкіндік береді. Бұл әдістер жұмыстың маңыздылығын, оның өзге жұмыс түрлеріне ықпалын, қорытынды нәтижесін және аралық нәтижелерді саралау, жұмыс ұзақтығын белгілеу үшін қажет.

Қазіргі күні құжаттар басқарудың әмбебап құралы ретінде бөлімшелер мен жеке қызметкерлер арасында өзара байланысты қамтамасыз етеді. Бірақ қызмет көлемі өсе бастағанда мынадай қарама-қайшылық туындауы мүмкін: құжаттармен жұмыс істеу көптеген ресурстарды қажет етіп, бүкіл мекеме жұмысын бәсеңдетуі мүмкін. Осы мәселені оңтайлы, әрі тиімді шешудің бірден-бір жолы электронды құжат айналымы жүйесін қолдану болып табылады.

Электронды құжат айналымы жүйесі – аймақтық алыстатылған ақпараттық массивтер арасында телекоммуникация каналдары арқылы ақпараттарды беру үшін арналған программалық кешен. Мекемеде электронды құжат айналымы жүйесін қолдану құжаттарды басқаруды, бизнес-процестерді автоматтандыруды, ақпараттарды сенімді түрде сақтау және олардың қауіпсіздігін қамтамасыз ету сияқты мәселелерді шешеді. Сондай-ақ ақпараттық және коммуникациялық технологиялар негізінде мекеме ішінде және сыртында қатаң бақыланатын құжаттардың қозғалысын қамтамасыз етеді.

Қазіргі күні құжаттар басқарудың әмбебап құралы ретінде бөлімшелер мен жеке қызметкерлер арасында өзара байланысты қамтамасыз етеді. Бірақ қызмет көлемі өсе бастағанда мынадай қарама-қайшылық туындауы мүмкін: құжаттармен жұмыс істеу көптеген ресурстарды қажет етеді және бүкіл мекеме жұмысын бәсеңдетеді.

Қағаз түріндегі құжат айналымының кемшіліктері:

- Құжаттарды іздеуге көп уақыттың кететіндігі;
- Құжатты өмірлік циклының барлық кезеңдерінде оның қозғалысын бақылап отыру қиындығы;
- Құжаттарды дайындау және оларды байланыстыру уақытының ұзақтығы;
- Егер бір құжатпен бірнеше қолданушы жұмыс жасап отырған болса, онда құжат айналымын ұйымдастырудың қиындығы;
- Есеп берулер мен журналдар алудың мүмкін болмауы немесе қиындығы.

Осылайша, дәстүрлі құжат айналымының нәтижелілігі төмен болып табылады. Бұл кемшіліктердің барлығы электронды құжат айналымы жүйесін ендіру барысында жойылады [1].

Біздің қазіргі қоғамымыз ақпараттық қоғамға айналғандықтан, электронды құжат айналымы жүйесін қолдану және оған келіп түсетін ақпарат ағындарын оңтайландыру маңызды мәселе болып отыр.

Іс жүргізуді автоматтандыру жүйелерінің қолданушылары басқару бөлімі, секретариат, канцелярия (қызметкерлердің 10-15 %) бөлімдерінің қызметкерлері, іс жүргізу процестерін автоматтандыратын жүйе қолданушылары (мекеме қызметкерлерінің 40-50 %), электронды құжат айналымдарын қолданушылар (қызметкерлердің 80 %) болып табылады.

Электронды құжат айналымы жүйесі тиімді жұмыс жасау үшін ол тек электронды құжаттар қозғалысын басқарып қана қоймай, сонымен қатар оларды оңтайландыру мәселелерінің де шешімі болуы керек.

Электронды құжат айналымы жүйесіндегі құжат ағындарын оңтайландырудың математикалық моделін құру үшін зерттеуге алынып отырған мекеменің нақты құрылымы зерттеліп, осы құрылым шеңберінде құжат ағындары оңтайландырылады [2].

Оңтайландырудың негізгі обьектілеріне мыналар жатады:

- құжаттардың барлық көшірмелерін қосқанда жүйенің деректер қорындағы құжаттарға бөлінетін орынның көлемі;
- қолданушы сұранысы бойынша деректер қорынан құжатты алуға кететін уақыт;
- қандай да бір ақпараттық жүйеден құжатты алуға кететін уақыт;
- қолданушының осы алынған құжатты жаңалауға жұмсайтын уақыты;

Оңтайландыру критерийлерін таңдау кезінде жоғарыдағы обьектілерге сәйкес келетін шешімдердің бірнеше әдістері қолданылады.

Сурет 1 - Электронды құжат айналымы жүйесінде электронды құжаттар ағындарын оңтайландырудың әдістер кешені

Бірінші әдіс қолданушының талап ететін құжатты алуға жұмсайтын уақытын минималдау. Бұл сұранысты беру уақыты, іздеу уақыты, сонымен қатар оны жіберу уақытынан тұрады. Бұл әдіс кезінде жүйе орнатылған серверлер (мысалы, процессордың тактілік жиілігі, жедел жады көлемі, есте сақтаушы құрылғыларға ену жылдамдығы мен көлемі және т.б.), коммуникациялық желілердің параметрлерін (мысалы, ақпаратты беру каналдарының шекті өткізгіштігі, желі архитектурасы және т,б,) бағалау қажет. Бұл кезде мақсатты функция F_1 келесі әдіспен анықталады:

$$F_1 = t' + t'' \to \min \qquad (1)$$

Мұндағы: t' - қолданушының құжатты алуының орташа уақыты, t'' - ақпараттық жүйеден құжатты алудың орташа уақыты. Бұл параметрлердің әрқайсысы таратылған деректер қоры архитектурасына және деректер қорының деректерін қолданатын ақпараттық жүйе архитектурасына тәуелді болады.

Екінші әдіс деректер қоры жүйесі мен қолданушы арасында, сонымен қатар қолданушы мен басқа ақпараттық жүйе арасында құжаттарды тасымалдау құнын минималдау болып табылады.

Бұл жағдайда мақсатты функция F_2 болады:

$$F_2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} W_{ij}' + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m_i} W_{ij}'' \to \min \qquad (2)$$

Мұндағы: n_i - i-ші деректер қорындағы құжаттардың саны, m_i - i-ші ақпараттық жүйедегі құжаттардың саны, N - деректер қорының саны, M - электронды құжат айналымы жүйесінде ақпарат алмасатын ақпараттық жүйе саны, W_{ij}' - ақпараттық жүйе мен қолданушы арасында құжат тасымалдау құны, W_{ij}'' - қолданушы мен деректер қоры арасында құжат тасымалдау құны. Бұл жағдайда құндар функция параметрлері ретінде таратылған жүйенің архитектурасымен анықталады.

Үшінші әдіс жүйеде сақталатын құжаттар көлемін минималдау болып табылады. Бұл жағдайда құжаттарды іздеу жылдамдығы жоғары болады. Мұндағы мақсатты функция F_3 төмендегіше анықталады:

$$F_3 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} \to \min \qquad (3)$$

Мұндағы: v_{ij} - ақпараттық жүйенің электронды құжаттарының көлемі, n_i - деректер қорының i-ші құжаттарының саны, N - деректер қорының саны.

Төртінші әдіс құжаттарды жаңалауға кететін шығындарды минималдау әдісі болып табылады. Егер құжаттар көп өзгертілетін болса, онда бұл әдіс көшірмелер санының азаюына әкеледі. Егер деректер қоры аймақтарға бөлінген болса, онда тасымалдау уақыты мен құны сақталатын ақпарат көлемінің төмендеуі мүмкін. Бұл әдістің кемшілігі жүйенің сенімділік көрсеткіштерінің төмендігі болып табылады. Бұл әдісте мақсатты функция F_4 төмендегіше анықталады:

$$F_4 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} U_{ij} \to \min \qquad (4)$$

Мұндағы: U_{ij} - деректер қорындағы құжатты жаңалау құны, n_i - i-ші деректер қорындағы құжаттар саны, N - деректер қорының саны.

Бесінші әдіс электронды құжатты сақтауға кететін шығындарды азайтатын экономикалық әдісті шығаруға болады. Ол төмендегіше анықталады:

$$S_{xp} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} S_i^{xp} x_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n_{ij}'} met_{ijk} v_{ijk}' + \sum_{k=1}^{n_{ij}''} con_{ijk} v_{ijk}'' \right) \qquad (5)$$

Мұндағы: $S_i^{xp} = \dfrac{W_i^{xp}}{V_i^{xp}}$ - деректер қорында белгілі бір уақыт аралығында бір ақпаратты сақтау құны, W_i^{xp} - деректер қоры құны, V_i^{xp} - деректер қоры көлемі, S_i^{xp} - ақпараттық жүйеден бір ақпаратты алу құны.

Қорытынды: Құжат ағындарын оңтайландырудың әдістері электронды құжат айналымы жүйесінде оңтайлы, әрі нәтижелі жұмыс жасауды қамтамасыз етеді. Сондай-ақ, жоғарыда келтірілген әдістерді қолдана отырып, қолданушының талап ететін құжатты алуға жұмсайтын уақытын минималдау, деректер қоры жүйесі мен қолданушы арасында, сонымен қатар қолданушы мен басқа ақпараттық жүйе арасында құжаттарды тасымалдау құнын минималдау, сақталатын құжаттар көлемін минималдау, құжаттарды жаңалауға кететін шығындарды минималдау мәселелерін оңтайлы шешуге болады.

Жалпы түрде электронды құжат айналымы жүйесін мемлекеттік құрылымдарда және жеке мекемелерде ендіру нәтижелілігін 1-кестеден көруге болады.

Кесте1 – Мемлекеттік құрылымдарда және жеке мекемелерде электронды құжат айналымы жүйесін ендірудің нәтижелілігі

Көрсеткіштер	Мемлекеттік құрылымдар	Коммерциялық мекемелер
Жалпы басқару шығындарын азайту	15-20%	30-35%
Кадрлық басқару шығындарын азайту	25-30%	40-45%
Нәтижелілікті жоғарылату	30%	90%
Пайда көлемін жоғарылату	-	50%

Жоғарыдағы кестеден көрініп тұрғандай, кез келген мекемеде электронды құжат айналымы жүйесін мемлекеттік құрылымдар мен коммерциялық мекемелерге ендіру арқылы жалпы және кадрлық басқару шығындарын едәуір азайтуға болады. Бұл жүйені ендіру әсіресе коммерциялық мекемелер үшін өте тиімді болып табылады.

Әдебиеттер:

1. Гудов А.М. Об одной модели оптимизации документопотоков, реализуемой при создании системы электронного документооборота // Вычислительные технологии. - 2006. - 271 с.
2. Завозкин С.Ю. Анализ системы документопотоков с точки зрения эффективности передачи электронных документов // Новые информационные технологии в университетском образовании. - 2006. - 281 с.
3. Землянский А. А. Информационные технологии в экономике:Учебное пособие.1-е изд. Москва: Колос, 2005. - 335с.

Түйіндеме

Мақалада электронды құжат айналымы жүйесінде құжат ағындарын оңтайландырудың 4 әдісі ұсынылған, олар: қолданушының талап ететін құжатты алуға жұмсайтын уақытын минималдау, деректер қоры жүйесі мен қолданушы арасында, сонымен қатар қолданушы мен басқа ақпараттық жүйе арасында құжаттарды тасымалдау құнын минималдау, жүйеде сақталатын құжаттар көлемін минималдау және құжаттарды жаңалауға кететін шығындарды минималдау әдістері. Осы әдістерді қолдана отырып, құжат ағындары оңтайлығының критерийлерін анықтауға болады. Мұндай критерийлерді басшылыққа ала отырып, электронды құжатты сақтауға, тасымалдауға, іздеуге, қауіпсіздігін қаматамасыз етуге кететін шығындарды минималдайтын экономикалық әдісті табуға болады.

Бұл жүйені ендіру әсіресе коммерциялық мекемелер үшін өте тиімді болып табылады.

Кілт сөздер: электронды құжат, құжат айналымы жүйесі, электронды құжат айналымы жүйесі, құжаттарды басқару, бизнес-процестерді автоматтандыру, ақпаратты сенімді сақтау, құжат ағындарын оңтайландыру.

Резюме

В данной статье предложены 4 варианта оптимизации документопотоков в системах электронного документооборота: минимизация времени получения требуемого документа пользователем; минимизация стоимости передачи документов между пользователями и базами данных системы, а также между пользователями и другими информационными системами; минимизация обьемов документов, хранящихся в системе; минимизация затрат на обновление документов. Используя данные методы оптимизации документопотоков, можно определить критерии оптимизации. С помощью этих критериев можно найти экономический метод, заключающийся в минимизации суммы затрат на хранение, передачу и поиск электронного документооборота, а также их безопасность.

Внедрение этой системы является очень выгодным для коммерческих учреждений.

Ключевые слова: электронный документ, система документооборота, система электронного документооборота, управление документами, автоматизация бизнес-процессов, безопасное хранение и защита информации, оптимизации документопотоков.

Summary

This article suggests four ways to optimize information flow in systems of electronic document management, minimization of time to obtain the required document by the user, minimizing the cost of transfer of documents between users and database systems, as well as between users and other information systems; minimize the volume of documents stored in the system, minimizing the cost of updating the documents. Using these methods optimize information flow, we can determine the optimization criteria. Using these criteria, you can find an economic method, which consists in minimizing the sum of the costs of storage, transfer and search of electronic documents, as well as their safety.

Introduction this system will be very favourable to commercial establishments.

Key words: electronic document, document circulation, electronic document circulation, system of electronic document circulation, document management, automation of business processes, lube safety and protection information, optimization of documentation.

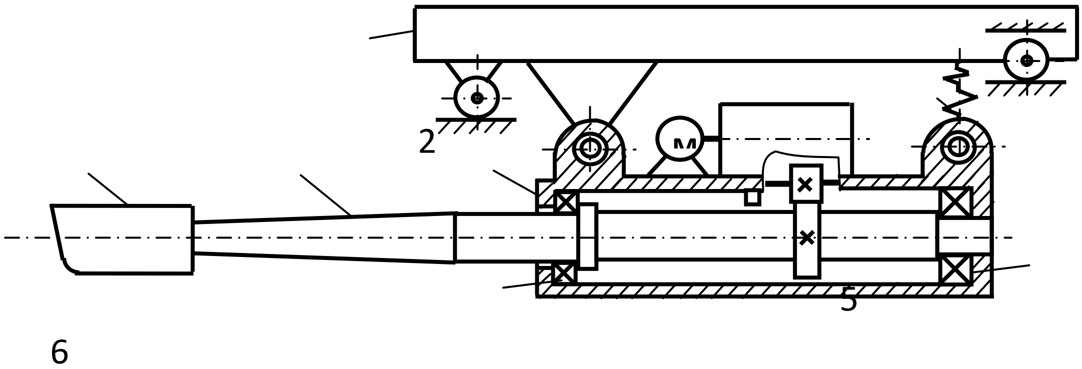
УДК621.01

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСОЛЬНОГО ГРУЗОПОДЪЁМНОГО УСТРОЙСТВА

Т.И. ОМАРОВ, доктор технических наук, профессор,
Б.К.НАУРУШЕВ, магистр, **А.М.САКЕНОВА,** магистр
Казахский национальный технический университет им. К.И.Сатпаева, г.Алматы,
Республика Казахстан

Грузоподъемные устройства с консольным расположением рабочего органа, применяемые в горно-металлургической, строительной и других отраслях промышленности подвергаются в процессе эксплуатации значительным перегрузкам. Основная причина их – изгибные колебания консольной балки с параметрическим возбуждением, вызываемые изменением массы разгружаемого материала. Исследование таких устройств позволит выявить причины перегрузок несущих деталей привода и предложить меры по их усовершенствованию.

Консольное грузоподъемное устройство завалочной машины мартеновского цеха представляет собой двухопорную упругую балку 1 на подвижном основании 2 с закрепленной на свободном конце мульдой с шихтой 1. Для удобства исследования заменяем реальную дискретно-континуальную систему расчетной динамической схемой с двумя дискретными массами, одна из которых содержит переменную составляющую (рисунки1,а и 1,б). Задача приведения распределенной по длине массы балки в точку D решалась на основе метода Рэлея из условия равенства кинетической энергии приведенной и исходной системы [1] .



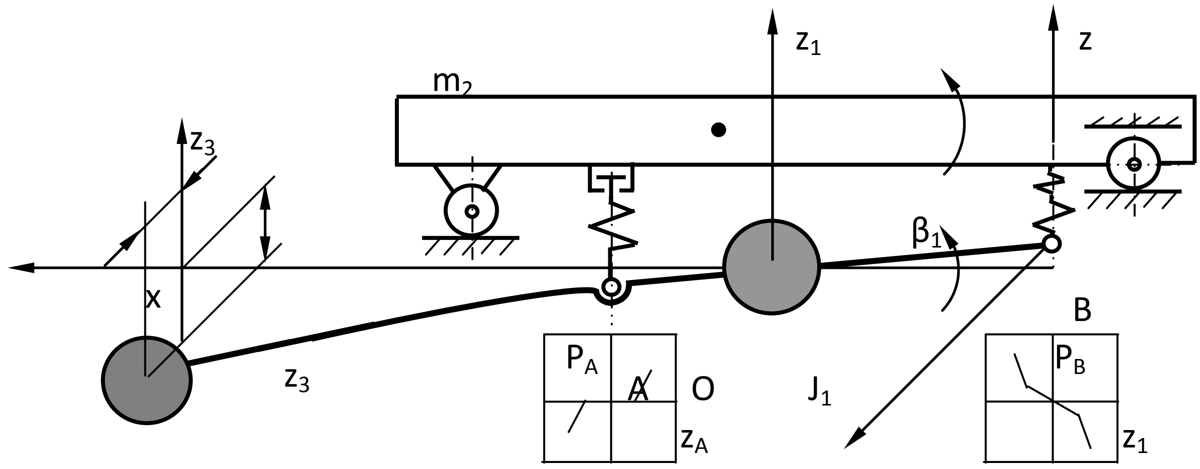


Рисунок 1 - Схема исходной (а) и приведенной (б)

Основание хобота заключено в недеформированную качающуюся раму 4, которая с исходными дискретными массами $m_B, m_д, m_{рд}, m_т$ $m_р$ и моментом инерции поворотной рамы I_P может быть приведена к системе с одной массой m_1, равной

$$m_1 = m_A + m_B + m_д + m_{рд} + m_т + m_р$$

и сосредоточенной в центре 0 масс данной системы, и с моментом инерции J_1, равным моменту инерции исходной системы относительно центра масс

$$J_1 = J_р + m_A\,\ell_{OA}^2 + m_B\,\ell_{OB}^2 + m_д\,\ell_д^2 + m\,\ell_{рд}^2 + m_т\,\ell_т^2.$$

Здесь обозначено: $J_р$ – момент инерции рамы относительно центра O масс системы; массы: $m_д$ – электродвигателя; $m_{рд}$, $m_т$ - редуктора и тормоза; $m_р$ - рамы; $\ell_{OA}, \ell_{OB}, \ell_д$ $\ell_{рд}, \ell_т$ - соответственно расстояния от центра масс системы до центров указанных масс.

Основным видом движения при работе исследуемого консольного грузоподъемного устройства будут изгибные колебания балки хобота 1 (рисунок 1,а). Колебательный процесс оказывает наиболее разрушительное действие на детали и узлы машины. При разгрузке содержимого мульды в свод мартеновской печи происходит резкое изменение массы. Изменение какого-либо параметра (масса, жесткость) в механических системах с упругими звеньями и связями вызывает интенсивный процесс, называемый параметрическими колебаниями. При особо неблагоприятных условиях возникает угроза разрушительного параметрического резонанса. В нашем случае параметрическое возбуждение колебаний происходит из-за изменения массы разгружаемого металлолома. Вид дальнейших колебаний определяет характер изменения массы, который рассматривается далее. Таким образом, математическая модель описывает в основном колебательный процесс с переменными параметрами (масса, жесткость, наличие зазоров).

В точке D конца хобота (исходная система, рисунки 1,а и 1,б) сосредоточена масса m_3, выражение для которой с учетом переменной массы имеет вид

$$m_3 = m_D + a_{10}\left(m_M + m_k \cos kt\right),$$

где m_D - приведенная масса балки хобота; m_M - масса мульды; $m_V = m_k \cos kt$ - переменная масса шихты (m_k - полная масса загруженного лома); a_{10} - коэффициент смещения центра масс мульды. Переменная масса m_V в первом приближении может быть представлена так [2]

$$m_V = \begin{cases} m_k \cos kt, 0 \le t \le T \\ 0, \qquad t \ge T \end{cases},$$

Время разгрузки равно $T = \frac{\psi}{\omega}$, где ω - угловая скорость вращения хобота при выполнении операции разгрузки. Значение k определим из условия, что в момент времени t = T $\cos k\,t = 0,$ т.е. $k = \frac{\pi\omega}{2\psi}$.

Массы m_1 и m_2 связаны невесомым, упругим двухопорным стержнем. Опоры стержня имеют нелинейные характеристики из-за наличия зазора в опоре А и переменной жесткости в опоре В.

Изменение массы шахты при разгрузке вызывает реактивную составляющую усилия, действующую на систему. Отделившуюся массу можно представить в виде

$m^* = a\,mk\,(1 - \cos kt)$ при $0 < t < T$ и $m^* = 0$ при $t > T$,

где Т – время полной разгрузки шихты.

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение консольного грузоподьемного устройства (преимущественно изгибные колебания) имеет вид

$$m_1 \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dR^z_{DA}}{dt} + \frac{H_A}{c_A} \cdot \frac{dP_A}{dt} + \frac{H_B}{c_B} \cdot \frac{dP_B}{dt} + R^z_{DA} + P_A + P_B - m_1 g$$

$$J_1 \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dM^{DA}}{dt} - \frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dR^z_{DA}}{dt} \ell_{OA} -$$
$$\frac{H_A}{c_A} \frac{dP_A}{dt} \ell_{OA} + R^z_{DA} \ell_{OA} - P_A \ell_{OA} + P_B \ell_{OB}$$

$$\left[m_D + a_{10}(m_M + m_V)\right] \frac{d^2 z_3}{dt^2} = -\frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dR^z_{DA}}{dt} - R^z_{DA} -$$
$$\left[m_D + a_{10}(m_M + m_V)\right] g + R_z$$

$$\left[m_D + a_{10}(m_M + m_V)\right] \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dR^x_{DA}}{dt} - R^x_{DA} + R_x \qquad (1)$$

Здесь обозначено: J – момент инерции совершающего плоское движение участка **AB** относительно точки **O** – центра масс системы; C_A, H_A, C_B, H_B – коэффициенты, определяющие жесткости и диссипативные сопротивления упругих связей соответственно в точках А и В. $R^z_{DA}, R^x_{DA}, M_{DA}$ – реактивные составляющие, характеризующие взаимодействие частей исследуемой системы при расчленении в точке А:

$$R^z_{DA} = c_u(z_3 - z_1 + \beta_1 \ell_{OD})\ell_1;$$
$$R^x_{DA} = c_u x;$$
$$M_{DA} = R^z_{DA} \ell_{DA} = c_u(z_3 - z_1 + \beta_1 \ell_{OD})\ell_1,$$

где c_u – изгибная жесткость балки хобота; H_D – коэффициент диссипативного сопротивления материала балки хобота при деформации изгиба; P_A и P_B – восстанавливающие силы в шарнирах А и В; g – ускорение свободного падения.

Система дифференциальных уравнений (1) имеет переменную структуру из-за наличия переменной массы, зазора в шарнире А, кусочно-линейной характеристики упругой связи в шарнире В. Поэтому выражения для сил P_A, P_B и коэффициентов H_B и C_B имеют различный вид. Ниже приводятся выражения для сил P_A, P_B и коэффициентов H_B и C_B.

$P_A = -c_A[z_1 - \beta_1 \ell_{OA} - \delta_A \operatorname{sign} (z_1 - \ell_{OA} \beta_1)]$,

если $\left|z_1 - \beta_1 \ell_{OA}\right| > \delta_A$ и $P_A = 0$,если $\left|z_1 - \beta_1 \ell_{OA}\right| \le \delta_A$.

$P_B = -c_{B_1}(z_1 + \beta_1 \ell_{OB})$, если $\left|z_1 + \beta_1 \ell_{OB}\right| \le \delta_B$

и $P_B = -[c_{B_1}\delta_B + c_{B_2}(\left|z_1 + \beta_1 \ell_{OB}\right| - \delta_B)] \operatorname{sign} (z_1 + \beta_1 + \ell_{OB})$,если $\left|z_1 + \beta_1 \ell_{OB}\right| > \delta_B$.

$H_B = H_{B1}$, если $\left|z_1 + \beta_1 \ell_{OB}\right| \le \delta_B$; H_{B2}, если $\left|z_1 + \beta_1 \ell_{OB}\right| > \delta_B$.

$c_B = c_{B1}$, если $\left|z_1 + \beta_1 \ell_{OB}\right| \le \delta_B$; $c_B = c_{B2}$, если $\left|z_1 + \beta_1 \ell_{OB}\right| > \delta_B$.

где c_{B1} - эквивалентная жесткость пружин 1 (рисунок 1,а) в упругом соединении В шатуна с рамой качания хобота; c_{B2} - эквивалентная жесткость на растяжение пальцев, фиксирующих пружины на шатуне, $2\delta_A$ - величина зазора в точке А, δ_B - величина максимальной деформации пружин 1 (рисунок 1,б).

Реактивные составляющие усилия, появляющиеся в результате изменения массы в проекциях на оси координат

$R_x = A_x\, a_{10}\, m_k \frac{\pi}{4} \sin 2kt$ и $R_z = A_z\, a_{10}\, m_k \frac{\pi}{4} \sin 2kt$,

где $A_z = -g \cos\varphi \left(\cos\varphi + \mu \sin\varphi\right)$, $A_x = -g\cos\varphi\left(\sin\varphi - \mu\cos\varphi\right)$,

μ – коэффициент сцепления частиц шихты между собой.

ии на оси x и y имеют вид:

Система уравнений (1) решена применительно параметров завалочной машины мартеновского цеха. Решение показывает, что изменение массы возбуждает в консольной балке интенсивные изгибные колебания, вызывающие знакопеременные нагрузки на опоры А и В и подвижное основание. Шарнир А, где периодически раскрывается зазор испытывает ударные нагрузки. График изменения нагрузок, полученные в результате решения системы уравнений (1), показаны на рисунке 2. Максимальные по модулю значения нагрузок совпадают во времени, что дает значительную перегрузку системы.

Результаты решения системы дифференциальных уравнений движения (1) показывают, что динамические реакции в опорных точках при эксплуатации консольных грузоподъемных устройств значительно превосходят статические. Наиболее рациональным путем уменьшение нагрузок в элементах подобных устройств является изменение их структуры. На одно из таких решений получено авторское свидетельство [3].

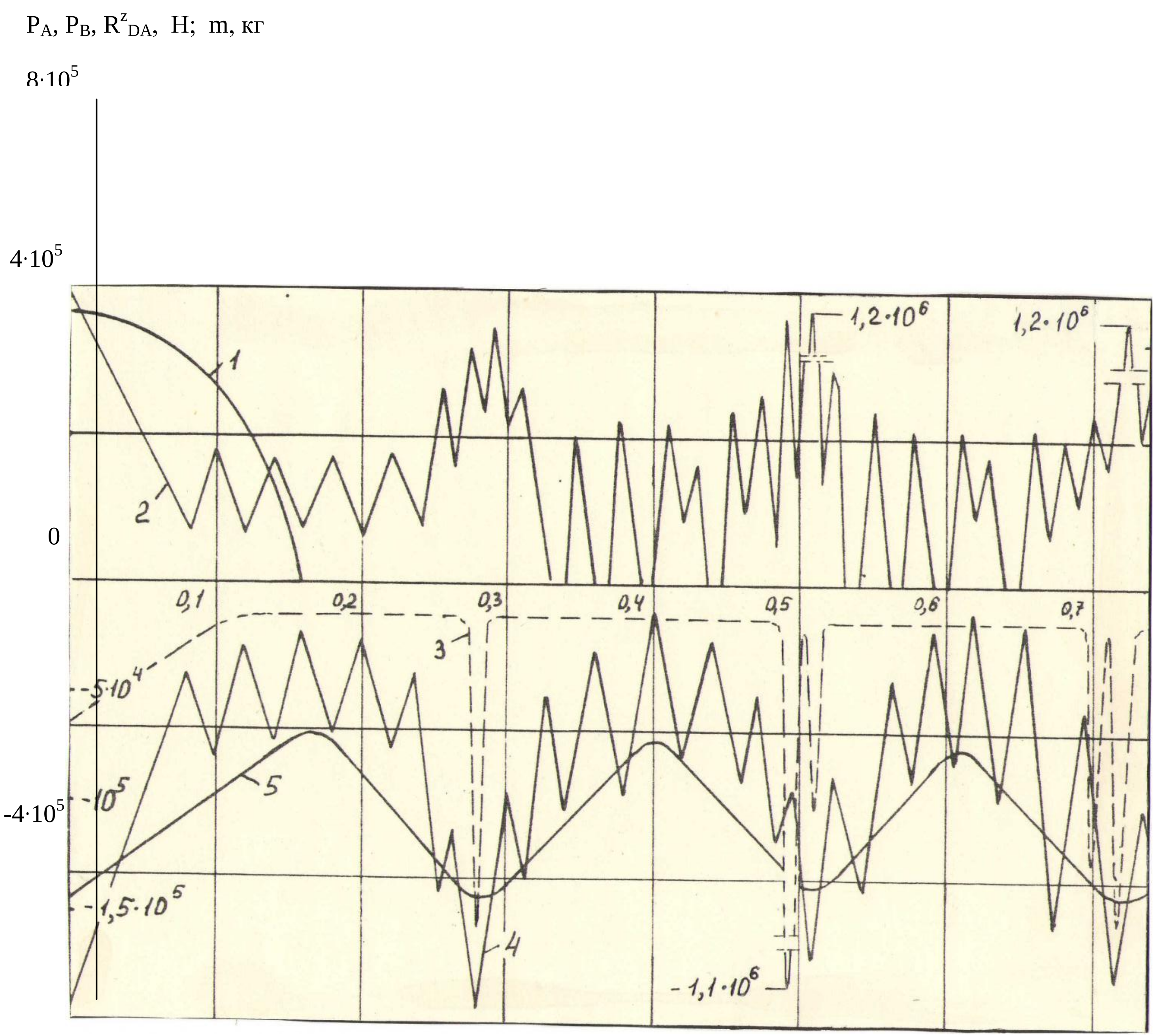


Рисунок 2 - График изменения массы m_v, координаты z_3 и усилий P_A, P_B, R^z_{DA} при k = 10

Литература:

1. Рэлей. Теория звука. – М.: Гостехтеоиздат. - 1940. - Т.1. - 500 с.
2. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. – М.: Наука, 1967. - 279 с.
3. А.с. 1164198 (СССР). Тележка подъемно-транспортного средства / С.Н.Кожевников, Е.Я. Антонюк, Т.И. Омаров. – Опубл. в Б. И. – 1985. - №36.

Резюме

В работе рассматриваются колебания, возникающие при работе грузоподъемных устройств с консольным расположением рабочего органа и причины их вызывающие. Показано влияние переменной массы, нелинейных характеристик упругих связей и зазоров на возникновение динамических нагрузок в устройстве. Составлены дифференциальные уравнения движения системы, учитывающие все указанные выше реальные факторы. Дан анализ решения системы дифференциальных уравнений движения, который наглядно показывает наличие повышенных динамических нагрузок, появляющихся в процессе работы консольных грузоподъемных устройств. Даются рекомендации для уменьшения нагрузок в несущих элементах подобных устройств.

Ключевые слова: колебания, переменная масса, дифференциальные уравнения, моделирование, грузоподъёмное устройство, упругая связь.

Түйіндеме

Осы жұмыста консольды жүккөтергіш жабдықтын тербелістер қарастырылады. Айнымалы массанын, серпімді байланыстарын сызықсыз сипаттамалардын және санылаулардын пайда болатын динамикалық жүктемеғе ықпалы көрсетілген. Жүйе қозғалыстың сызықсыз дифференциалдық теңдеулер жүйесі құрылған. Осы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімін анализы беріледі. Теңдеулер шешімінен нәтіжесі: консольды жүккөтергіш жабдықтын жұмыс істеу кезінде онын жетеғінде жоғары жүктеме пайда болады. Жұмыстын қорытысында сол сияқты консольды жүккөтергіш жабдықтардын жетеғінде жоғары жүктемелердін төмендеу жолдары беріледі.

Кілт сөздер: тербелістер, айнымалы масса, дифференциалдьқ теңдеулер, модельдеу, жүккөтергіш жабдық, серпімді байланыс

Summary

In work touches upon the fluctuations arising at work of load-lifting devices with the console arrangement of working body and the reasons causing them. The influence of variable weight, nonlinear characteristics of variable weight, nonlinear characteristics of elastic communications and backlashes on occurrence of dynamic loadings in the device is shown in the work. The differential equations of systems movement considering all real factors above are worked out in the work. Made the analysis of decision of the differential equations of movement which proves the presence of raised dynamic loadings appearing in the process of console load-lifting devices work.

Recommendations for reduction of loadings in the elements of similar devices are given in the article.

Key words: fluctuations, variable mass, differential equation, elastic connection, modeling, carrying device.

УДК 004:004.424.3

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕКТИФИКАЦИОННОЙ КОЛОННЫ

Ю.А.ПОЛОУМОВ, аспирант
Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина,
г. Москва, Россия

В настоящее время отрасль нефтехимии и производство этилена развивается достаточно бурно. Развитие происходит как экстенсивным путем за счет строительства новых заводов и реконструкции старых, так и интенсивным путем за счет введения новых установок, улучшения существующих технологий. Исторически первые нефтехимические установки были построены на нефтеперерабатывающих заводах (НПЗ), т.к. сырьем для производства является продукт с НПЗ, а продукт с нефтехимического производства может использоваться для производства бензинов. Например, в г. Салават существует один большой завод, включающий и нефтепереработку, и нефтехимический блок. А в городе Кстово есть один НПЗ и один нефтехимический завод, разделенные автомобильной дорогой. Также в г. Ангарск НПЗ интегрирован с производством этилена.

Производство этилена – основа для дальнейшей переработки на нефтехимическом производстве. Одним из самых сложных и энергозатратных процессов на производстве этилена являются крекинг сырья и дальнейшее разделение потоков на фракции (процесс ректификации).

В данный момент в промышленности наблюдается тенденция снижения операционных расходов, то есть расходов на превращение сырья в готовую продукцию. Существует несколько основных способов оптимизации прямых затрат на производство.

Рассмотрим их на примере нефтехимического производства:

а) Снижение затрат на сырьё и основные материалы – поиск других поставщиков сырья или использование другого типа сырья, интенсификация процессов за счет использования более современных технологий и/или катализаторов с целью повышения выхода целевых продуктов;

б) Снижение затрат на заработную плату рабочих–внедрение автоматизированных систем управления технологическими процессами, в результате чего снижается количество операторов для функционирования установки;

в) Снижение затрат на энергию и топливо – оптимизация режимов эксплуатации установок, рекуперация тепла.

Вспомогательные ресурсы на химическом производстве расходуются на технологическом оборудовании – турбинах, насосах, колоннах, теплообменниках и т.д.

Предлагается рассмотреть расчет и оптимизацию работы дистилляционных колонн на примере колонны первичного фракционирования.

Рассмотрим механизм, используемый для разделения смесей в дистилляционных колоннах, который основан на разности температур кипения разных компонентов.

На рисунке 1 представлена схема простой перегонки

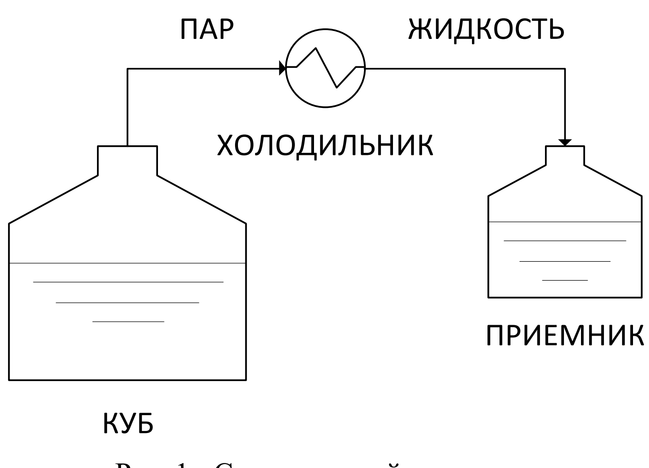


Рис. 1 - Схема простой перегонки

Простой перегонный куб для разгонки двухкомпонентной смеси представляет собой подогреваемую емкость. Когда температура смеси достигает температуры кипения легколетучего компонента, то начинают образовываться пары, которые отводятся и охлаждаются. В результате в емкости (называемой перегонным кубом) остается высококипящий компонент (кубовый остаток), а в приемнике – низкокипящий компонент (дистиллят). Конечно же, такой способ не позволяет полностью разделить компоненты, некоторое количество высококипящего компонента переносится в приемник, часть низкокипящего может остаться в кубе. Поэтому может применяться вторая стадия перегонки, в результате получается более чистый продукт. Схема двухступенчатой перегонки изображена на рисунке 2.

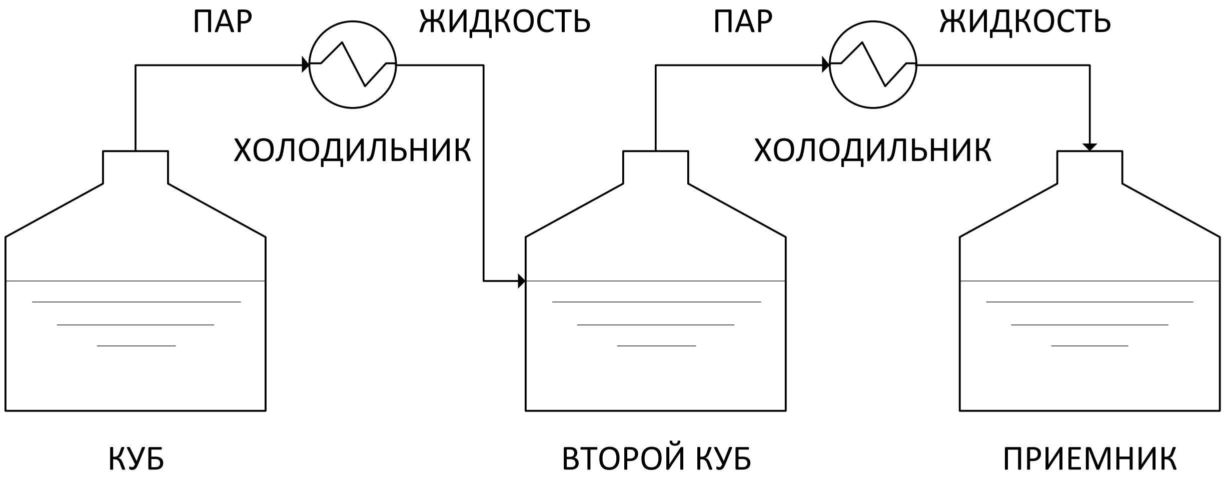


Рис. 2 - Схема двухступенчатой перегонки

Периодическая перегонка, описанная выше, не годится для переработки больших потоков сырья, так как является нетехнологичной, при периодических процессах необходимы дополнительные трудовые затраты. В результате появилась необходимость разработки непрерывной технологии разделения больших потоков с возможностью разделения на несколько компонентов. Такой технологией является ректификация.

В ректификационных колоннах устанавливаются специальные тарелки, в которых проделаны отверстия. На каждой такой тарелке происходит процессе непрерывного теплообмена между паром и жидкостью. Для нормальной работы в колонну подается поток сырья в виде паро-жидкостной смеси. Смесь, попадая на тарелку, разделяется на пар и жидкость. Пар поднимается наверх, а жидкость, проходя через отверстия в тарелке, опускается вниз.

Для расчета колонны предлагается использовать модель, содержащую систему уравнений, описывающую массо- и теплопередачу, а также уравнения для расчета габаритов колонны. Основными исходными данными для проектирования или реконструкции колонны являются:

количество сырья, подаваемое в колонну m_F - в т/ч;

содержание компонентов в сырье $x_{F,i}$ - в %масс.;

планируемые концентрации компонентов на выходе из колонны $x_{W,i}$ и $x_{D,i}$– ориентировочные значения в %масс.;

физико-химические свойства веществ – ТеплоемкостьC$_{p,i}$, параметры для расчета парциального давления A, B и C, параметры модели NRTL (модель будет описана ниже) для каждой фракции и/или компонента.

Материальный баланс для простой ректификационной колонны может быть записан следующим образом.

Общий материальный баланс:

$$m_F = m_W + m_D \quad (1)$$

где m_F – массовый поток сырья (F – feed),

m_D– массовый поток дистиллята (D – distillate), т.е. продукта, отбираемого с верха колонны,

m_W – массовый поток кубового остатка (W – distillate), т.е. продукта, отбираемого с низа колонны.

Покомпонентный материальный баланс может быть записан следующим образом:

$$x_{F,i} * m_F = x_{W,i} * m_W + x_{D,i} * m_D \quad (2)$$

где $x_{F,i}$,$x_{D,i}$,$x_{W,i}$ – содержание i-го компонента соответственно в сырье, дистилляте и кубовом остатке.

Тепловой баланс ректификационной колонны:

$$Q_F + Q_к = Q_W + Q_D + Q_х \tag{3}$$

где Q_F,Q_D,Q_W – количество теплоты соответственно в потоке сырья, дистиллята и кубового остатка,

$Q_к$– количество теплоты, вносимое кипятильником (ребойлером),

Q_x– количество теплоты, снимаемое холодильником (конденсатором).

Для того, чтобы определить перепад давления в колонне, необходимо рассчитать основные габариты колонны. Для этого может быть применена методика, описанная в [2]. Одним из способов является методика потарелочного расчета, т.е. расчет концентрации и расходов «от тарелки к тарелке». При этом расчет ведется с низа колонны до тех пор, пока содержание компонентов в дистилляте не достигнет требуемых значений. Такой расчет требует выполнения большого количества вычислений на каждой тарелке или ступени разделения, поэтому он выполняется с помощью вычислительной техники.

В результате такого расчета всей колонны будут быть определены основные характеристики колонны, такие как:

1) диаметр и высота колонны;
2) количество тарелок или высота слоя насадки;
3) требуемые вспомогательные потоки (для холодильника и кипятильника);
4) профиль температуры и давления по колонне;
5) объем рецикла флегмы (потока, возвращаемого в колонну);
6) концентрации веществ в дистилляте и кубовом остатке.

В потарелочном методе расчета тарелка рассматривается отдельно от остальной колонны. Входящими потоками являются поток питания (только для тарелки питания), поток пара с нижней тарелки (или с кипятильника в случае 1-й тарелки), поток жидкости с верхней тарелки (или с холодильника в случае последней тарелки). Выходными потоками являются поток пара к верхней тарелке, поток жидкости к нижней тарелке, а также боковой отбор (при его присутствии).

Содержание легколетучих компонентов зависит от температуры и давления. Т.к. в реальности смеси жидкости неидеальны, то вводится коэффициент активности компонентов смеси для учета неидеальности. Активность компонента – это его кажущаяся (эффективная) концентрация, которая отличается от реальной из-за других компонентов в растворе.

Одним из важнейших факторов для обеспечения адекватности разрабатываемой модели колонны – это применение правильной модели равновесия жидкость-пар.

Расчет парциального давления в смеси может быть произведен с помощью формулы [2]:

$$P_i = x_i \cdot \gamma_i \cdot P_i^0 \tag{4}$$

Где P_i^0- парциальное давление i-го чистого компонента,

P_i-парциальное давление i-го компонента в смеси,

x_i- содержание i-го компонента в жидкости,

γ_i- коэффициент активности i-го компонента для учета неидеальности жидкости.

Так как в сырье, подаваемом в колонну, содержится большое количество компонентов, то экспериментально определить коэффициент активности для каждого компонента нереально, требуется провести оценку.

Одна из моделей для определения коэффициента активности – модель *NRTL (Non-RandomTwoLiquidmodel)*:

$$\ln(\gamma_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j \tau_{ji} G_{ji}}{\sum_{k=1}^{n} x_k G_{ki}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j G_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} x_k G_{kj}} \left(\tau_{ij} - \frac{\sum_{m=1}^{n} x_m \tau_{mj} G_{mj}}{\sum_{k=1}^{n} x_k G_{kj}} \right) \tag{5}$$

$$G_{ij} = e^{-\alpha_{ij}\tau_{ij}} \tag{6}$$

$$\tau_{ij} = \frac{C_{ij}}{RT} \tag{7}$$

где

i, j, m, k – счетчики для обозначения компонентов,

n – общее количество компонентов,

x_i– содержание i-го компонента в смеси,

γ_i – коэффициент активности i-го компонента,

C_{ij}и α_{ij} – коэффициенты для учета двухкомпонентного взаимодействия.

Достоинство этой модели в том, что она позволяет рассчитать равновесие многокомпонентных смесей, используя справочные или экспериментальные данные по двухкомпонентному равновесию между всеми компонентами смеси. К примеру, для расчета смеси, состоящей из компонентов A, B и C необходимо провести исследование парожидкостного равновесия в смесях A+B, A+C и B+C. Для большинства компонентов имеются справочные данные.

Алгоритм расчета с использованием модели *NRTL* представлен на рисунке 3.

Алгоритм расчета колонны с использованием метода потарелочного расчета представлен на рисунке 4.

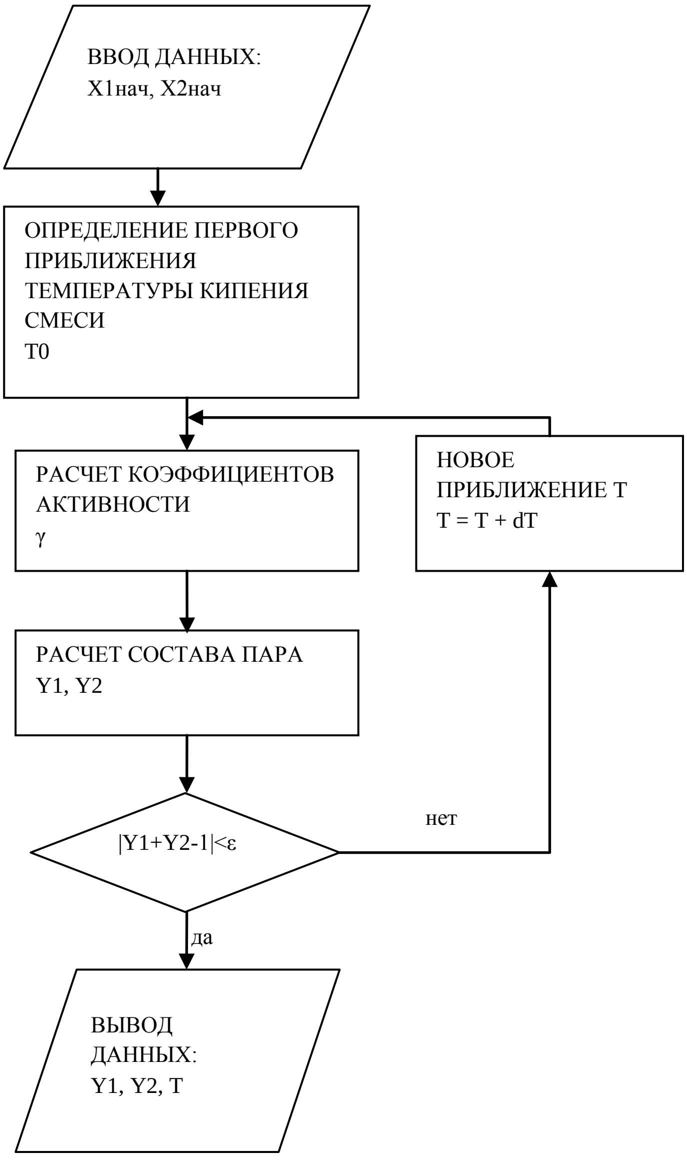


Рис. 3 - Алгоритм расчета коэффициента активности с использованием модели *NRTL*.

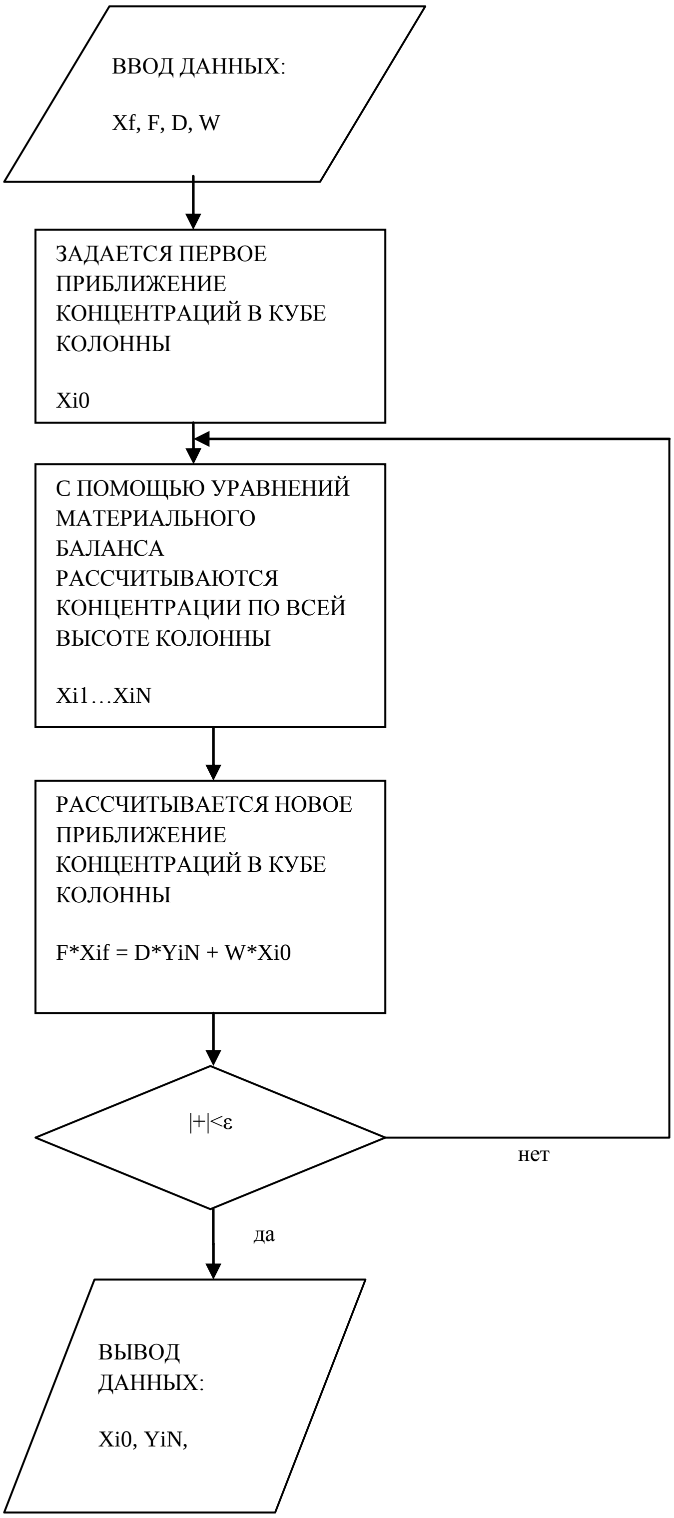


Рис. 4 - Алгоритм расчета колонны с использованием метода потарелочного расчета.

В результате расчетов определяются основные габариты колонны, количество и состав продуктов, затраты вспомогательных потоков, перепад давления в колонне. Данные результаты могут быть использованы для определения экономии средств при замене внутренних контактных устройств на насадку, то есть за счет понижения перепада давления в колонне.

Литература:

1. Дытнерский Ю.И. Процессы и аппараты химической технологии. Учебник для вузов. Изд. 3-е. в 2-х кн: часть 2. Массообменные процессы и аппараты. - М.: Химия, 2002. - 400 с.
2. Дытнерский Ю.И. Основные процессы и аппараты химической технологии: Пособие по проектированию. - М.:Химия, 1991. — 496 с.
3. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. - М., 2005. - 753 с.
4. Кафаров В.В. Основы массопередачи. - М.: Высшая школа, 1979. - 439 с.
5. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. - М.: Химия, 1985. - 448 с.
6. Кафаров В.В. Математическое моделирование основных процессов химических производств - М.: Высш. школа, 1991. - 400 с.
7. Коган В.Б. Равновесие между жидкостью и паром: справочное пособие : в 2 т. – М.: Издательство «Наука», 1966.
8. Леффлер У. Переработка нефти. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2005. – 224с.
9. Мухина Т. Н. Пиролиз углеводородного сырья. - М.: Химия, 1987. — 240 с.
10. Рид Р. Свойства газов и жидкостей. - Л.,1982.
11. Скобло А.И. Процессы и аппараты нефтегазопереработки и нефтехимии. - М.: ООО Недра-Бизнесцентр, 2000. - 677 с.
12. Hansen H.K., Rasmussen P., FredenslundAa., Schiller M. Gmehling J, Vapour-liquid equilibria by UNIFAC group contribution. Revision and extension 5. // *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.* 1991. - Т.30. - С.2352-2354.

Резюме

В данной статье рассмотрены основные способы сокращения энергозатрат при ректификации, описаны теоретические основы промышленного разделения смесей. Предложено использование математической модели ректификационной колонны для определения ее характеристик. Представлен алгоритм расчета.

Ключевые слова: ректификация, математический модель, алгоритм модели NRTL, расчет работы дистилляционных колонн.

Түйіндеме

Бұл мақалада ректификациялау кезінде энергия үнемдеудің негізгі әдістері, қосындылардың шаруашылыққа бөлінісінің теориялық негіздері қарастырылған. Ректификациялық тізбектің мазмұнын анықтауға арналған математикалық моделін пайдаланылуы ұсынылған. Есептеудің негізгі алгоритмі көрсетілген.

Кілт сөздер: ректификация, математикалық модель, NRTL моделінің алгоритмі, дистилляциялық тізбек жұмысын есептеу.

Summary

This article touches upon the main ways of reducing energy consumption for distillation, theoretical foundations of industrial distillation. Use of a mathematic model of distillation column is proposed to estimate column characteristics. Computation algorithm is presented.

Key words: rectification, the mathematical model, the algorithm models NRTL, the calculation of the distillation columns.

UDK 004:004.424.3

APPROXIMATE SOLUTION OF HEAT EQUATION WITH THE SECOND TYPE BOUNDARY CONDITIONS OBTAINED IN EXPLICIT ANALYTICAL FORM BY IEF METHOD IN THE DOMAIN WITH MOVING BOUNDARY

M.M. SARSENGELDIN, S.N. KHARIN

Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakstan
Institute of mathematics and mathematical modeling,
National Academy of Science, Almaty, Kazakhstan
Kazakh-British University, Almaty, Kazakhstan

Problem of searching solutions of Heat problems with known and unknown moving boundaries is very important in material science, electric contacts, plazmatrons. There is extensive and exhaustive list of literature dedicated to theory of Parabolic equations most of which represent qualitative results rather than quantitatve[1-4]. On the other hand, existing methods for the solution of heat problems are based on reducing the problem to system of integral equations, which are inaplicable for degenerating domains due to the singularity occuring at the initial time [2]. Therefore it is topical to investigate and develop new methods wich have analytical approach and at the same time could be used conveniently in modeling diverse physical phenomena. It worths to note that this method enables to solve problems with 0.1 % precision in applications where 10% deviation is acceptable [5].

Heat equations are solved by the help of Integral Error Functions (IEF method) and its properties, which were introduced by Hartree in 1935 and reasonably sometimes called Hartree functions. Method can be used to solve first, second and third boundary value problems for Heat Equations with fixed and moving finite, semi-infinite and infinite boundaries [6],[8]. Even though it is not the most powerful side of IEF method for the domains with fixed boundaries and it is hard to say that the introduced method is more advantageous than classical Fourier, Laplace transforms and Heat Potentials except the difficulties that were mentioned in [8], that it is sometimes hard to find inverse transformation and almost every time impossible to evaluate and find quantitative values of bulky integrals , however it is possible to see that in the domains with moving boundaries especially in the domains with degenerating boundary conditions at the initial time, IEF method is much more preferable than classical methods, as from theoretical same from practical points of view [9].

The integral error functions determined by recurrent formulas

$$i^n erfcx = \int_x^\infty i^{n-1} erfcv dv, \quad n=1,2,\ldots \qquad i^0 erfcx \equiv erfcx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-v^2) dv \tag{1}$$

Where $$erfx = 1 - erfcx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-v^2) dv$$

One can obtain from (2)

$$i^n erfcx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!} \int_x^\infty (v-x)^n \exp(-v^2) dv \tag{3}$$

Expressions (1) satisfy the differential equation

$$\frac{d^2}{dx^2} i^n erfcx + 2x \frac{d}{dx} i^n erfcx - 2n i^n erfcx = 0 \tag{4}$$

and recurrent formulas

$$2n i^n erfcx = i^{n-2} erfcx - 2x i^{n-1} erfcx \tag{5}$$

Integral Error Functions are very useful for investigation of heat transfer, diffusion and other phenomena which can be described by the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

in a region $D(t > 0, 0 < x < \alpha(t))$ with free boundary $x = \alpha(t)$, since the functions

$$u_n(\pm x,t) = t^{\frac{n}{2}} i^n erfc \frac{\pm x}{2a\sqrt{t}}$$

suffice the equation (46) as well as their linear combination or even series

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(x,t) + B_n u_n(-x,t)]$$

For any constants A_n, B_n.We can choose these constants to satisfy the boundary conditions at $x = 0$ and $x = \alpha(t)$, if given boundary functions can be expanded into Taylor series with powers t or $\sqrt{t}$.

PROBLEM STATEMENT:

It is necessary to solve Heat equation with moving boundary

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \alpha(t), \quad t > 0 \tag{7}$$

Subject to

I.C: $$u(x,0) = 0, \tag{8}$$

B.C: $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi(t), \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\alpha(t)} = \phi(t), \tag{10}$$

$$u(0,0) = 0, \tag{11}$$

METHOD OF SOLUTION:

Solution can be represented in the following form:

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \cdot t^n \left[i^{2n} erfc \frac{x}{2a\sqrt{t}} + i^{2n} erfc(\frac{-x}{2a\sqrt{t}}) \right] + B_n \cdot t^{\frac{2n+1}{2}} \left[i^{2n+1} erfc \frac{x}{2a\sqrt{t}} - i^{2n+1} erfc(\frac{-x}{2a\sqrt{t}}) \right] \right\} \tag{12}$$

or using property 2 of IEF, solution can be represented in the polynomial form

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{k} \{ A_{2n} \sum_{m=0}^{n} x^{2n-2m} t^m \beta_{2n,m} + A_{2n+1} \sum_{m=0}^{n} x^{2n-2m+1} t^m \beta_{2n+1,m} \} \tag{13}$$

In this case it is more convenient to use expression (13) for solution of (7)- (11).

where

$$\alpha(t) = \alpha_1 t^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 t + \alpha_3 t^{\frac{3}{2}} + \ldots + \alpha_n t^{\frac{n}{2}} + \ldots \tag{14}$$

$$\text{for } \tau = \sqrt{t} \tag{15}$$

we have

$$\alpha(\tau^2) = \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_3 \tau^3 + \ldots + \alpha_n \tau^n + \ldots \tag{16}$$

From (9) for x=0, we have

$$\varphi(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n i^{2n} erfc0 \tag{17}$$

And coefficients B_n of expression (4) can be found from

$$B_n = -\frac{\varphi^n(0)}{2 \cdot n! \cdot i^{2n} erfc0} \tag{18}$$

From (10) for x= $\alpha(t)$, we have

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} A_n\cdot t^{n-1/2}\left[-i^{2n-1}erfc\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}+i^{2n-1}erfc\left(-\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]- \\ -B_n\cdot t^{n}\left[i^{2n}erfc\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}+i^{2n}erfc\left(-\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \end{array}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\alpha(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} A_n\cdot t^{n-1/2}\left[-i^{2n-1}erfc\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}+i^{2n-1}erfc\left(-\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]- \\ -B_n\cdot t^{n}\left[i^{2n}erfc\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}+i^{2n}erfc\left(-\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \end{array}\right\}$$

Let

$$\frac{\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}=\frac{\alpha_1}{2a}+\frac{\alpha_2}{2a}t^{\frac{1}{2}}+\frac{\alpha_3}{2a}t+\frac{\alpha_3}{2a}t^{\frac{3}{2}}+\frac{\alpha_4}{2a}t^2+...+\frac{\alpha_n}{2a}t^{\frac{n}{2}}+... \tag{20}$$

for $\tau=\sqrt{t}$

$$\beta(\tau)=\frac{\alpha_1}{2a}+\frac{\alpha_2}{2a}\tau+\frac{\alpha_3}{2a}\tau^2+\frac{\alpha_3}{2a}\tau^3+\frac{\alpha_4}{2a}\tau^4+...+\frac{\alpha_n}{2a}\tau^n+..., \tag{21}$$

Let’s say

$$\beta_0=\frac{\alpha_1}{2a},$$

$$\beta_1=\frac{\alpha_2}{2a},$$

$$\beta_3=\frac{\alpha_2}{2a},$$

……………..

$$\beta_n=\frac{\alpha_{n-1}}{2a}$$

then

$$\beta(\tau)=\beta_0+\beta_1\tau+\beta_2\tau^2+\beta_3\tau^3+\beta_4\tau^4+...+\beta_n\tau^n+..., \tag{22}$$

thus

$$\varphi(\tau^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n\cdot\tau^{2n-1}\left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc(-\beta(\tau))\right]-B_n\cdot\tau^{2n}\left[i^{2n}erfc\beta(\tau)+i^{2n}erfc(-\beta(\tau))\right]\right\} \tag{23}$$

Taking 2n times derivatives of expression (23) and making $\tau=0,$ it’s possible to determine B_n coefficients.

Corollaries: [46, p. 34-35]

1. $$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{U_1}{1!}\cdot F'(y)+\frac{U_2}{2!}\cdot F''(y)+\frac{U_3}{3!}\cdot F'''(y)+...+\frac{U_n}{n!}\cdot F^{(n)}(y)$$

$$U_k=\frac{d^n}{dx^n}y^k-\frac{k}{1!}\cdot y\cdot\frac{d^n}{dx^n}y^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}\cdot y^2\cdot\frac{d^n}{dx^n}y^{k-2}-...+(-1)^{k-1}k\cdot y^{k-1}\cdot\frac{d^n}{dx^n}y$$

2. $$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\sum\frac{n!}{i!\,j!\,h!...k!}\cdot\frac{d^mF}{dy^m}\left(\frac{y'}{1!}\right)^i\cdot\left(\frac{y''}{2!}\right)^j\cdot\left(\frac{y'''}{3!}\right)^h...\left(\frac{y^{(l)}}{l!}\right)^k$$

3. $$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}$$

Firstly let’s expand (23)

$$\varphi(\tau^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n\cdot\tau^{2n-1}\left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_n\cdot\tau^{2n}\left[i^{2n}erfc\beta(\tau)+i^{2n}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\right\}=$$

$$=A_0\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\left[-i^{-1}erfc\beta(\tau)+i^{-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_0\cdot\left[i^{0}erfc\beta(\tau)+i^{0}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+A_1\cdot\tau\cdot\left[-ierfc\beta(\tau)+ierfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_1\cdot\tau^2\cdot\left[i^{2}erfc\beta(\tau)+i^{2}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+A_2\cdot\tau^3\left[-i^{3}erfc\beta(\tau)+i^{3}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_2\cdot\tau^4\left[i^{4}erfc\beta(\tau)+i^{4}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+A_3\cdot\tau^5\left[-i^{5}erfc\beta(\tau)+i^{5}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_3\cdot\tau^6\left[i^{6}erfc\beta(\tau)+i^{6}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+\ldots$$

.

.

.

$$+A_n\cdot\tau^{2n-1}\left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_n\cdot\tau^{2n}\left[i^{2n}erfc\beta(\tau)+i^{2n}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+\ldots$$

$\vdots$

$+$

Multiplying both sides by τ following expression obtained

$$\tau\cdot\varphi(\tau^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n\cdot\tau^{2n}\left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_n\cdot\tau^{2n+1}\left[i^{2n}erfc\beta(\tau)+i^{2n}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\right\}=$$

$$=A_0\cdot\left[-i^{-1}erfc\beta(\tau)+i^{-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_0\cdot\tau\left[i^{0}erfc\beta(\tau)+i^{0}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+A_1\cdot\tau^2\cdot\left[-ierfc\beta(\tau)+ierfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_1\cdot\tau^3\cdot\left[i^{2}erfc\beta(\tau)+i^{2}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+A_2\cdot\tau^4\left[-i^{3}erfc\beta(\tau)+i^{3}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_2\cdot\tau^5\left[i^{4}erfc\beta(\tau)+i^{4}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+A_3\cdot\tau^6\left[-i^{5}erfc\beta(\tau)+i^{5}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_3\cdot\tau^7\left[i^{6}erfc\beta(\tau)+i^{6}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+\ldots$$

.

.

.

$$+A_n\cdot\tau^{2n}\left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_n\cdot\tau^{2n+1}\left[i^{2n}erfc\beta(\tau)+i^{2n}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+\ldots$$

$\vdots$

$+$

Recall that B_n coefficients are already determined from (18). Using formulas in corollaries now it is possible to determine A_n coefficients. To determine A_n coefficients it is necessary to take 2n+1 times derivatives of (23) and make $\tau=0$.

It is required to determine B_0 from following expression

$$\left[\tau\cdot\varphi(\tau^2)\right]_{\tau=0}^{(1)}=\left\{A_0\cdot\left[-i^{-1}erfc\beta(\tau)+i^{-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_0\cdot\tau\cdot\left[i^{0}erfc\beta(\tau)+i^{0}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\right\}_{\tau=0}^{(1)}$$

A_1 from

$$\left[\tau\cdot\psi(\tau^2)\right]_{\tau=0}^{(3)}=\{A_0\cdot\left[-i^{-1}erfc\beta(\tau)+i^{-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_0\tau\left[i^{0}erfc\beta(\tau)+i^{0}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$

$$+A_1\cdot\tau^2\cdot\left[-ierfc\beta(\tau)+ierfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_1\cdot\tau^3\cdot\left[i^{2}erfc\beta(\tau)+i^{2}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\}_{\tau=0}^{(3)}$$

A_2 from

$$\left[\tau\cdot\psi(\tau^2)\right]^{(5)}_{\tau=0}=\{A_0\cdot\left[-i^{-1}erfc\beta(\tau)+i^{-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_0\cdot\tau\cdot\left[i^0 erfc\beta(\tau)+i^0 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+A_1\cdot\tau^2\cdot\left[-ierfc\beta(\tau)+ierfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_1\cdot\tau^3\cdot\left[i^2 erfc\beta(\tau)+i^2 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+A_2\cdot\tau^4\left[-i^3 erfc\beta(\tau)+i^3 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_2\cdot\tau^5\left[i^4 erfc\beta(\tau)+i^4 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\}^{(5)}_{(\tau=0)}$$

A_3 from

$$\left[\tau\cdot\psi(\tau^2)\right]^{(7)}_{\tau=0}=\{A_0\cdot\left[-i^{-1}erfc\beta(\tau)+i^{-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_0\tau\left[i^0 erfc\beta(\tau)+i^0 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+A_1\cdot\tau^2\left[-ierfc\beta(\tau)+ierfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_1\cdot\tau^3\cdot\left[i^2 erfc\beta(\tau)+i^2 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+A_2\cdot\tau^4\left[-i^3 erfc\beta(\tau)+i^3 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_2\cdot\tau^5\left[i^4 erfc\beta(\tau)+i^4 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+A_3\cdot\tau^6\left[-i^5 erfc\beta(\tau)+i^6 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_3\cdot\tau^7\left[i^6 erfc\beta(\tau)+i^7 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\}^{(7)}_{\tau=0}$$

and so on. Finally A_n from the following expression

$$\left[\tau\cdot\psi(\tau^2)\right]^{(2n+1)}_{\tau=0}=\{A_0\cdot\left[-i^{-1}erfc\beta(\tau)+i^{-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_0\tau\cdot\left[i^0 erfc\beta(\tau)+i^0 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+A_1\cdot\tau^2\cdot\left[-ierfc\beta(\tau)+ierfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_1\cdot\tau^3\cdot\left[i^2 erfc\beta(\tau)+i^2 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+A_2\cdot\tau^4\left[-i^3 erfc\beta(\tau)+i^3 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_2\cdot\tau^5\left[i^4 erfc\beta(\tau)+i^4 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+A_3\cdot\tau^6\left[-i^5 erfc\beta(\tau)+i^5 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_3\cdot\tau^7\left[i^6 erfc\beta(\tau)+i^6 erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]+$$
$$+\ldots$$
.
.
.
$$+A_n\cdot\tau^{2n}\left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_n\cdot\tau^{2n+1}\left[i^{2n}erfc\beta(\tau)+i^{2n}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\}^{(2n+1)}_{\tau=0}$$

or

$$\left[\tau\cdot\psi(\tau^2)\right]^{(2n+1)}_{\tau=0}=\sum_{k=0}^{n}\left\{A_k\cdot\tau^{2k}\left[-i^{2k-1}erfc\beta(\tau)+i^{2k-1}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]-B_k\cdot\tau^{2k+1}\left[i^{2k}erfc\beta(\tau)+i^{2k}erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\right\}^{(2k+1)}_{\tau=0}$$

(24)

For expression $\left[\tau^m\cdot i^m erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]^{(n)}$ we have

$$\left[\tau^m\cdot i^m erfc\beta(\tau)\right]^{(n)}=\left(\tau^m\right)^{(n)}\cdot i^m erfc\beta(\tau)+\binom{n}{1}\cdot\left(\tau^m\right)^{(n-1)}\cdot\left(i^m erfc\beta(\tau)\right)^{(1)}+$$
$$+\binom{n}{2}\cdot\left(\tau^m\right)^{(n-2)}\cdot\left(i^m erfc\beta(\tau)\right)^{(2)}+\ldots+\tau^m\cdot\left(i^m erfc\beta(\tau)\right)^{(n)}. \quad (25)$$

For $\tau=0$,

1. if $m>n$ then $\left[\tau^m\cdot i^m erfc\beta(\tau)\right]^{(n)}_{\tau=0}=0$
2. if $m\le n$ then $\left[\tau^m\cdot i^m erfc\beta(\tau)\right]^{(n)}_{\tau=0}=m!\cdot\binom{n}{n-m}\cdot\left[i^m erfc\beta(\tau)\right]^{(n-m)}_{\tau=0}$

(26)

In the same manner for expression $\left[\tau^m\cdot i^m erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]^{(n)}$

1. if $m>n$ then $\left[\tau^m\cdot i^m erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]^{(n)}_{\tau=0}=0$ (27)
2. if $m\le n$ then $\left[\tau^m\cdot i^m erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]^{(n)}_{\tau=0}=m!\cdot\binom{n}{n-m}\cdot\left[i^m erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]^{(n-m)}_{\tau=0}$ (28)

Thus

$$\left\{\tau^m\cdot\left[i^m erfc\beta(\tau)\pm i^m erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]\right\}^{(n)}_{\tau=0}=m!\cdot\binom{n}{n-m}\cdot\left[i^m erfc\beta(\tau)\pm i^m erfc\left(-\beta(\tau)\right)\right]^{(n-m)}_{\tau=0}$$

(29)

Applying (185) for (180)

$$\sum_{k=0}^{n}\{ A_k \cdot \tau^{2k}\left[-i^{2k-1}erfc\beta(\tau)+i^{2k-1}erfc(-\beta(\tau))\right]- - B_k \cdot \tau^{2k+1}\left[i^{2k}erfc\beta(\tau)+i^{2k}erfc(-\beta(\tau))\right]\}_{\tau=0}^{(2n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\{ A_k \cdot (2k)! \cdot \binom{2n+1}{2n+1-2k} \cdot \left[-i^{2k-1}erfc\beta(\tau)+i^{2k-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n+1-2k)} - - B_k \cdot (2k+1)! \cdot \binom{2n+1}{2n-2k} \cdot \left[i^{2k}erfc\beta(\tau)+i^{2k}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n-2k)} \} \quad (30)$$

then

$$\left[\tau \cdot \psi(\tau^2)\right]_{\tau=0}^{(2n)} = \sum_{k=0}^{n}\{ A_k \cdot (2k)! \cdot \binom{2n+1}{2n+1-2k} \cdot \left[-i^{2k-1}erfc\beta(\tau)+i^{2k-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n+1-2k)} - - B_k \cdot (2k+1)! \cdot \binom{2n+1}{2n-2k} \cdot \left[i^{2k}erfc\beta(\tau)+i^{2k}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n-2k)} \} \quad (31)$$

Implies

$$\sum_{k=0}^{n}\{ A_k \cdot (2k)! \cdot \binom{2n+1}{2n+1-2k} \cdot \left[-i^{2k-1}erfc\beta(\tau)+i^{2k-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n+1-2k)} - - B_k \cdot (2k+1)! \cdot \binom{2n+1}{2n-2k} \cdot \left[i^{2k}erfc\beta(\tau)+i^{2k}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n-2k)} \} =$$

$$= A_n \cdot (2n)! \cdot \binom{2n+1}{1} \cdot \left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(1)} + + \sum_{k=0}^{n-1}\left\{ A_k \cdot (2k)! \cdot \binom{2n+1}{2n+1-2k} \cdot \left[i^{2k-1}erfc\beta(\tau)+i^{2k-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n+1-2k)} \right\} - - \sum_{k=0}^{n}\left\{ B_k \cdot (2k+1)! \cdot \binom{2n+1}{2n-2k} \cdot \left[i^{2k}erfc\beta(\tau)+i^{2k}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n-2k)} \right\} \quad (32)$$

Where $B_n = -\frac{\varphi^n(0)}{2\,n!\,i^{2n}erfc0}$. Yields

$$A_n = \frac{\left[\tau \cdot \psi(\tau^2)\right]_{\tau=0}^{(2n+1)}}{(2n)! \cdot \binom{2n+1}{1} \cdot \left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(1)}} - \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left\{ A_k \cdot (2k)! \cdot \binom{2n+1}{2n+1-2k} \cdot \left[i^{2k-1}erfc\beta(\tau)+i^{2k-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n+1-2k)} \right\}}{(2n)! \cdot \binom{2n+1}{1} \cdot \left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(1)}} + \frac{\sum_{k=0}^{n}\left\{ B_k \cdot (2k+1)! \cdot \binom{2n+1}{2n-2k} \cdot \left[i^{2k}erfc\beta(\tau)+i^{2k}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(2n-2k)} \right\}}{(2n)! \cdot \binom{2n+1}{1} \cdot \left[-i^{2n-1}erfc\beta(\tau)+i^{2n-1}erfc(-\beta(\tau))\right]_{\tau=0}^{(1)}}$$

Coefficients An and Bn are determined from (18) and (32)

Conclusions:

1. A new method of solving Heat equation with second type boundary conditions represented
2. Approximate solution in the explicit analytical form obtained

References:

[1] Cannon J.R. *The One-Dimensional Heat Equation*, Encyclopedia Math. Appl. 23, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.

[2] Friedman A. *Free boundary problems for parabolic equations* I. *Melting of solids*, J. Math. Mech., 8 (1959), pp. 499–517.

[3] Schwartz L. *Mathematics for the Physical Sciences*, Addison–Wesley, Reading, MA, 1966.

[4] Tarzia D.A. *A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems*, MAT - Ser. A, 2 (2000), pp. 1–297.

[5] Sarsengeldin M.M. Solution Of Heat Equation In A Domain With Moving Boundary Obtained By Hartree Functions, ICECCO-8, Kazakhstan, Almaty, 2011, p. 182-188.

[6] Sarsengeldin M.M., Approximate solution of one, third type boundary-value problem for the heat equation by IEF method, Доклады НАН РК, 2012, 3-е издание, Kazakhstan, Almaty, november

[7] Sarsengeldin M.M., Approximate solution of one stefan test problem
by the integral error functions method (IEF method), Вестник НАН РК, 2012, 3-еиздание, сер. физ-мат, Kazakhstan, Almaty, november.

[8] Kharin S.N., Sarsengeldin M.M. Analytical solution of heat equation with moving boundary not tangent to coordinate axis, Вестник НАН РК, 2011, 3-е издание, сер. физ-мат, Kazakhstan, Almaty, may

[9] Kharin S.N., Sarsengeldin M. Influence of Contact Materials on Phenomena in a Short Electrical Arc, Trans Tech Publications, Switzerland,“Key Engineering Materials”, Vols. 510-511, 2012, april

[10] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I.M. *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 2000.

Summary

This paper is devoted to introduce method that enables to solve heat equation in domains with moving boundaries, particularly heat equation with second type boundary conditions. Elaborated method allows us obtain approximate solution in explicit analytical form where the deviation of solution can be measured by the help of Maximum principle.So called IEF method is based on finding coefficients of elaborated Integral Error Functions.

Key words: Heat equation, moving boundary, Integral Error Functions, IEF method.

Түйіндеме

Мақалада екінші ретті жылу өткізгіштік тендеулерінің ықтималдық интегралдар функциясы және оның қаситеттері арқылы шешімі жайында айтылған.

Кілт сөздер: жылу өткізгіштік тендеулер, қозғалмалы шекара, ықтималдық интегралдар функциясы, ЫИФ әдісі

Резюме

Статья посвящена приближенному решению второй краевой задачи уравнения теплопроводности в областях с подвижными границами методом интегральной функции ошибок и ее свойств.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, подвижная граница, интегральная функция ошибок, ИФО метод.

ӘОЖ 539.3

СЫРЫҚ ЖӘНЕ ЦИЛИНДРЛІК ҚАБЫҚША НҮКТЕЛЕРІНДЕ КҮШТЕУДІҢ ДЕФОРМАЦИЯҒА ТӘУЕЛДІЛІГІ

А.Ж.СЕЙТМҰРАТОВ, физика-математика ғылымдарының докторы,
Д.Ж.ЖАНЫСОВА,
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті,
Н.К.МЕДЕУБАЕВ, Б.М.НҰРЛАНОВА
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті,
Қазақстан Республикасы

Стержендер және қабықшалар үшін есепті құру барысында материалдың күйі байламалы-серпімділіктің сызықтық теориясында сипатталатын үш өлшемді тегіс деформацияланатын дене ретінде қарастырылады.

(r,θ,z)цилиндрлік координат жүйесінде $r_0 = F(z)$ айнымалы радиустың дөңгелек стержендері мен сыртқы және ішкі радиустары $r_1 = F_1(z)$, $r_2 = F_2(z)$ тең болатын айнымалы цилиндрлік қабықша қарастырылады.

Күштенудің деформацияға тәуелділігін стерженнің және үш өлшемді деформацияланатын дене секілді цилиндрлік қабықшаның нүктелерін анықтау формулаларын қолданамыз [1].

Цилиндрлік координатжүйесінде ε_{ij} деформациясының u_r, u_θ, u_z ауыспалылығына тәуелділігі механикадағы деформацияланатын қатты дененің белгілі формуласы бойынша анықталады.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \tag{1}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta};$$
$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r};$$

Күштенудегі қозғалыстың теңдеуі мынаған тең

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{2}$$
$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\partial^2 u_\theta}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Ф және $\vec{\psi}$ потенциалдарының бойламалы және көлденең толқындарының енгізілуінде изотропты материалдың жағдайы мынадай болады:

$$\vec{U} = grad\,\Phi + rot\vec{\psi}; \qquad \vec{\psi} = \vec{e_z}\psi_1 + rot(\vec{e}_z\psi_2) \tag{3}$$

қозғалыстың теңдеуі интегро-дифференциалданған теңдеуге тура келеді

$$N(\Delta\Phi) = \rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \qquad M(\Delta\vec{\psi}) = \rho\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2}$$

$$N=L+2M \tag{4}$$

ал ауыспалылық және потенциалдар бойынша деформация келесі формула түрінде көрсетіледі

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}\left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \tag{5}$$

$$u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\psi^2$$

және

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1\right];$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\psi_2; \tag{6}$$

$$\varepsilon_{rz} = 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]\psi_2;$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\Phi + \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\psi_1 + \frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\psi_2;$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\psi_2;$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \Delta \Phi$$

Бастапқы шарттар нолге тең, яғни.

$$u_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \qquad (t=0;\ j=r,\theta,z) \tag{7}$$

сондайақ потенциалдар үшін де

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad \psi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = 0 \qquad (t=0;\ j=1,2)$$

Қарастырылған есептің шамасына қарай үш шеткері шарттар негзінде әр түрлі типті үш өлшемді дененің бетінде шектеулі шарттар қарастырылады, сондықтан төменде көрсетілгендей етіп бірнешеуін түрлендірейік.

Егер стерженнің немесе қабықшаның ішкі және сыртқы беттері ішкі және сыртқы ортамен бірлеспейтін болса, жалпы жағдайда r_0 немесе r_1, r_2 радиустары z осьтік координатына тәуелді болады. Онда күштену үшін шеткері шарттар мынадай түрге ие болады.

$$\frac{1}{\Delta_0^2}\sigma_{rr} + \frac{\left(r_{jz}^{'}\right)}{\Delta_0^2}\sigma_{zz} + \frac{2(-1)^j r_{jz}^{'}}{\Delta_0^2}\sigma_{rr} = f_{nn}$$

$$\frac{1}{\Delta_0}\sigma_{r\Theta} + \frac{(-1)^j r_{jz}^{'}}{\Delta_0}\sigma_{\Theta z} = f_{ns_1} \tag{8}$$

$$\frac{(-1)^{1+j} r_{jz}^{'}}{\Delta_0^2}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{zz}\right) + \frac{1-\left(r_{jz}^{'}\right)^2}{\Delta_0^2}\sigma^{rz} = f_{ns_2}$$

$$\Delta_0^2 = 1 + \left(r_j^{'}\right)^2; \qquad (j = 1,2), \qquad r_i = F_i(z)$$

$r_1 = 0$ стержені үшін ,ал $r_2 = r_0$

Ал, егер, стержень немесе цилиндрлік қабықша деформацияланатын ортамен бірлесетін болса, және олардың радиустары тұрақты болатын болса, онда шеткері шарттар мынадай түрге ие болады:

идеалды байланыс негізінде

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(i)} + f_r^{(i)}(\theta, z, t); \quad \sigma_{jr} = 0; \quad \sigma_{jr}^{(i)} + f_{jr}^{(i)}(\theta, z, t) = 0$$
$$u_r = u_r^{(i)} + f_0^{(i)}(\theta, z, t) \ \ (r = r_i); \ i = 1,2; \ \ j = \theta, z \tag{9}$$

қатты байланыс жағдайында

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(i)} + f_r^{(i)}(\theta, z, t); \quad \sigma_{jr} = \sigma_{jr}^{(i)} + f_{jr}^{(i)}(\theta, z, t);$$
$$u_r = u_r^{(i)} + f_0^{(i)}; \quad u_\theta = u_\theta^{(j)} + f_1^{(j)}; \tag{10}$$
$$u_z = u_z^{(j)} + f_2^{(j)}; \quad r = r_j$$

Кулон бойынша құрғақ үйкеліс болған жағдайда

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(i)} + f_r^{(i)}(\theta, z, t); \quad \sigma_{jr} = \eta_i \sigma_{rr}$$
$$u_r = u_r^{(j)} + f_0^{(j)} \qquad \sigma_{ir}^{(j)} + f_{ir}^{j} = -\eta_i\left(\sigma_{rr}^{j}\right) + f_r^{(j)}; \tag{11}$$

мұндағы $\left|\eta_j\right|$ – үйкеліс коэффициенттері.

Әдебиеттер:

1. Филиппов А.И. Распространение волн в упругом стержне, окруженном средой типа Винклера. //Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. - 1983. - С. 74-78.
2. Сейтмуратов А.Ж. Прохождение сдвиговых волн через анизотропно-неоднородный и трансверсально-изотропный цилиндрический слой. / Деп. в Каз.гостИНТИ № 189-В 96. – Алматы, 1996. – 17 с.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний, стержней, пластин, оболочек. Механика деформируемого твердого тела. Итоги науки. – М.: ВИНИТИ, 1973. – Т.5. – 272 с.

Түйіндеме

Берілген мақалада стерженлер және қабықшалар үшін есепті құру барысында материалдың күйі байламалы-серпімділіктің сызықтық теориясында сипатталатын үш өлшемді тегіс деформацияланатын дене ретінде қарастырылған.

Кілт сөздер: өзек, деформацияланатын дене, цилиндрлік қабықша

Резюме

В данной статье рассмотрено поведение материалов, которые описываются в рамках линейной теории вязкоупругости, и общая краевая задача для стержней и оболочки.

Ключевые слова: стержень, деформирующие тело, цилиндрическая оболочка.

Summary

The article touches upon the condition of the materials which are described within the framework of linear theory vyascouprugotion and the general marginal problem for pegs and shell.

Key words: pegs, shell.

УДК 521.135

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

А.Т. ТУРЕШБАЕВ, кандидат физико-математических наук,
У.Ж.АЙТИМОВА, кандидат физико-математических наук,
Р.С.МЫРЗАЕВ, магистр
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата,
Республика Казахстан

Как известно, при изучении движения небесных тел наряду с гравитационной силой часто приходится учитывать и целый ряд других сил (магнитных электрических и т.д.). Одна из них, а именно репульсивная сила светового давления, являющаяся неизменной спутницей гравитации, в ряде случаев может быть не только соизмеримой с гравитационной силой, но и значительно превосходить ее. Так, например, обстоит дело в случае изучения динамики микрометеоритных частиц и частиц космической пылевой материи межзвездной среды, а также спутников-баллонов и космических кораблей-парусников. Следовательно, в реальных условиях на гравитационное поле всегда накладывается некоторое поле репульсивных сил, образуя так называемые фотогравитационное силовое поле. Поэтому учет влияния на частицу светового давления со стороны излучающих тел (звезд, Сонца) как один из основных (а не как возмущающих) факторов позволяет адекватно моделировать реальную картину динамики и эволюции микрометеоритных частиц и частиц газопылевых облаков в фотогравитационном поле двойных звездных систем.

Для небесной механики наибольшее значение имеют работы В.В. Радзиевского [1-3], в которых впервые были сформулированы и решены некоторые важные задачи динамики частицы в фотогравитационных полях. Впервые точки либрации в фотогравитационной задаче трех тел с одной излучающей массой были найдены В.В. Радзиевским, и их дальнейшее изучение проводилось в работах Colombo, G., Lautman, D. A. and Shapiro, I. I. [4], Bhatnagar, K. B. and Chavla, J. M. [5], Manju, K. and Choudry, R. K.[6], Mignard, F.[7]. Устойчивость коллинеарных и треугольных точек либрации в линейном приближении впервые была исследована Ю.А. Черниковым [8]. Нелинейное исследование устойчивости точек либрации фотогравитационной ограниченной круговой задачи с одной излучающей массой проведено А.А. Пережогиным [9].

Schuerman D.W. [10] первым провел исследование точек либрации для круговой фотогравитационной задачи с двумя излучающими телами, получил условия устойчивости в первом приближении для треугольных точек либрации и выдвинул ошибочное утверждение относительно неустойчивости коллинеарных точек либрации. Куницыным А.Л. и Турешбаевым А.Т. [11, 12] впервые были доказаны существование области устойчивости внутренних коллинеарных точек.

Практически одновременно Куницыным А.Л. и Турешбаевым А.Т. и английсскими учеными Simmons J.F.L., McDonald A.J.C, Brown J.C. [13] была исследована устойчивость треугольных точек либрации для круговой задачи. Куницыным А.Л. и Турешбаевым А.Т., за счет введения новых переменных, полученным необходимым условиям устойчивости треугольных точек либрации дана простая, физически ясная и геометрически наглядная интерпретация, позволяющая легко определить область устойчивости для произвольных значений массового параметра [14]. Отметим также работу Л.Г.Лукьянова [15], в которой весьма подробно исследованы семейства треугольных точек без рассмотрения вопроса их устойчивости. В работе Пережогина А.А. и

Турешбаева А.Т. [16] впервые проводится нелинейный анализ устойчивости треугольных точек либрации круговой ограниченной фотогравитационной задачи трех тел с двумя излучающими массами для некоторых фиксированных значений праметров системы. Несколько позже Kumar, V. и Choudhry, R. K. [17] рассматривают устойчивость треугольных точек с учетом резонансов 3-го и 4-го порядков для некоторых частных значений коэффициентов редукции масс основных тел. Устойчивость треугольных точек эллиптической задачи трех тел в линейном приближении исследована в работе [18].

В настоящей работе впервые проводится полное нелинейное исследование устойчивости треугольных точек фотогравитационной ограниченной круговой задачи трех тел с двумя излучающими массами в конфигурационном пространстве и в пространстве параметров системы.

2. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения задачи и разложение функции Гамильтона

Исследование движения микрометеоритных частиц или частиц газопылевых облаков в гравитационно-репульсивном поле бинарных звездных систем может быть с успехом проведено на основе некоторого модифицированного варианта ограниченной задачи трех тел, заключающегося в дополнительном учете сил светового давления, действующих на частицу со стороны звезд. Такая механическая система (называемая фотогравитационной задачей трех тел [1,2]) с высокой степенью точности может считаться изолированной, так как возмущающее действие других звездных систем ничтожно мало вследствие их чрезвычайно большой удаленности. С другой стороны, считается, что такие бинарные системы составляют более половины всех известных звездных систем [3].

Поскольку как гравитационная, так и репульсивная сила имеют одинаковую функциональную структуру, то их можно заменить одной силой, отличающейся от гравитационной некоторым постоянным коэффициентом Q, представляющим отношение разности этих сил к гравитационной силе и называемым коэффициентом редукции массы источника, создающего гравитационно-репульсивное поле. Все физически допустимые значения коэффициента редукции подчинены неравенству $-\infty < Q \le 1$ (при $Q=1$ световое давление отсутствует, при $0 < Q < 1$ оно ослабляет гравитацию, а при $Q < 0$ превосходит ее). Для него также можно получить следующее выражение [1,3,12]

$$Q = [1 - C\sigma/(fM)], \qquad \sigma = \varepsilon s/m.$$

Здесь C – мощность излучения тела массой M, f – всемирная гравитационная постоянная, m и s - масса и площадь характерного сечения частицы, ε - коэффициент отражения. Таким образом, действующая на частицу сила зависит не только от характеристик силового поля, но и от параметров самой частицы в виде ее «парусности» σ, что принципиально меняет характер положений относительного равновесия частиц во вращающейся вместе со звездами системе координат. Движение частицы $P(x, y, z)$ пренебреженно малой массы будем изучать в поле двух гравитирующих и одновременно излучающих тел S_1 и S_2, считаемых материальными точками, и, обращающихся друг относительно друга по кеплеровой орбите. Начало О прямоугольной системы координат $Oxyz$ поместим в центр масс основных тел; ось Ох направим вдоль прямой, соединяющей основные тела, а ось Oz – перпендикулярно плоскости их орбитального движения в сторону, откуда вращение видно происходящих против хода часовой стрелки. При этом для удобства выберем следующие единицы измерения: сумму масс основных тел S_1 и S_2 примем за единицу массы, расстояние между ними – за единицу длины, отношение T/2π - за единицу времени (где T- период обращения основных тел). Тогда движение частицы задается каноническими уравнениями

$$\frac{d\bar{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, \qquad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}_i}, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

где $\bar{q}_i$ суть декартовые координаты частицы $P(x, y, z)$, $\bar{p}_i$ - соответствующие канонические импульсы, а $H(x, y, z, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ - аналитическая функция Гамильтона относительно координат и импульсов, которая в нашем случае имеет вид

$$H=\frac{1}{2}(\bar{p}_1^2+\bar{p}_2^2+\bar{p}_3^2)+(\bar{p}_1 y-\bar{p}_2 x)-Q_1(1-\mu)/R_1-Q_2\mu/R_2,$$
$$R_\alpha=\sqrt{(x-x_\alpha)^2+y^2+z^2}, \qquad (\alpha=1,2) \tag{2}$$

Здесь Q_1 и Q_2 - коэффициенты редукции масс основных тел, которые для треугольных точек могут принимать только положительные значения [14].

Как и в классической, дифференциальные уравнения (1) задачи не имеют общего решения. Однако известны частные решения, отвечающие положениям относительного равновесия. Если классическая задача допускает пять точных частных решений, то в фотогравитационной задаче существуют трехпараметрические семейства девяти частных решений, три из них (коллинеарные точки либрации) расположены на оси Ох, два (треугольные точки либрации) - в орбитальной плоскости, а четыре (компланарные точки либрации)– вне плоскости орбитального движения основных тел.

Исследуем устойчивость треугольных точек либрации в предположении, что орбита основных тел круговая, а тело P бесконечно малой массы в начальный момент времени испытывает только те возмущения, не выводящие его из плоскости вращения основных тел S_1 и S_2.

В уравнения (1) вводим возмущения по формулам

$$x=x_*^*+q_1,\quad y=y_*^*+q_2,\quad \bar{p}_1=\bar{p}_1^*+p_1,\ \bar{p}_2=\bar{p}_2^*+p_2,$$
$$q_3=p_3=z_0^*=\bar{p}_3^*=0, \tag{3}$$

где

$$x^*=0{,}5(Q_1^{2/3}-Q_2^{2/3}-1)-\mu,\qquad y^*=\pm 0{,}5\sqrt{2(Q_1^{2/3}+Q_2^{2/3})-(Q_1^{2/3}-Q_2^{2/3})-1},$$
$$\bar{p}_1^*=\mp 0{,}5\sqrt{2(Q_1^{2/3}+Q_2^{2/3})-(Q_1^{2/3}-Q_2^{2/3})-1},$$
$$\bar{p}_2^*=0{,}5(Q_2^{2/3}-Q_2^{2/3}+1)-\mu, \tag{4}$$

и раскладывая гамильтониан в ряд по степеням возмущений q_i и p_i в окрестности рассматриваемой точки, принимаемой за начало координат, получим

$$H=H_2+H_3+H_4+\ldots \tag{5}$$

здесь H_m- однородные полиномы степени m $(m=2,3,4,\ldots)$ относительно обобщенных координат q_i и импульсов p_i, так что

$$H_m=\sum_{\nu+l=m} h_{\nu_1\nu_2 l_1 l_2}\cdot q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \tag{6}$$

Тогда в выражении (5) формы H_2, H_3 и H_4 с учетом (3) и (4) примут следующий вид:

$$H_2=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+p_1q_2-p_2q_1+h_{200}q_1^2+h_{020}q_2^2+h_{110}q_1q_2, \tag{7}$$

$$H_3=h_{300}q_1^3+h_{030}q_2^3+h_{210}q_1^2q_2+h_{120}q_1q_2^2. \tag{8}$$

$$H_4=h_{400}q_1^4+h_{040}q_2^4+h_{310}q_1^3q_2+h_{130}q_1q_2^3+h_{220}q_1^2q_2^2. \tag{9}$$

где, $h_{20} = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{Q_{11}^2}{Q_1^{2/3}} + \frac{3}{4}\mu\frac{Q_{22}^2}{Q_2^{2/3}} - 1\right]$, $h_{11} = -\frac{3}{4}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)\frac{Q_{11}}{Q_1^{2/3}} - \mu\frac{Q_{22}}{Q_{12}^{2/3}}\right]$,

$$h_{02} = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{Q_{12}}{Q_1^{2/3}} + \frac{3}{4}\mu\frac{Q_{12}}{Q_2^{2/3}} - 1\right],$$

$$h_{30} = \frac{1}{16}\left[(1-\mu)(5Q_{11}^2 - 12Q_1^{2/3})\frac{Q_{11}}{Q_1^{4/3}} + \mu(5Q_{22}^2 - 12Q_2^{2/3})\frac{Q_{22}}{Q_2^{4/3}}\right]$$

$$h_{21} = -\frac{1}{2}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)(Q_1^{2/3} - \frac{5}{4}Q_{11}^2)/Q_1^{4/3} + \mu(Q_2^{2/3} - \frac{5}{4}Q_{22}^2)/Q_2^{4/3}\right],$$

$$h_{12} = -\frac{5}{8}\left[(1-\mu)(0{,}8Q_1^{2/3} - Q_{12})\frac{Q_{11}}{Q_1^{4/3}} - \mu(0{,}8Q_2^{2/3} - Q_{12})\frac{Q_{22}}{Q_2^{4/3}}\right], \qquad (10)$$

$$h_{03} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)(2{,}4Q_1^{2/3} - Q_{12})/Q_1^{4/3} + \mu(2{,}4Q_1^{2/3} - Q_{12})/Q_2^{4/3}\right],$$

$$h_{40} = -\frac{1}{8}\Big[(1-\mu)(3Q_1^{4/3} - 7{,}5Q_1^{4/3}Q_{11}^2 + 35Q_{11}^4/16)/Q_1^2 +$$
$$+ \mu(3Q_2^{4/3} - 7{,}5Q_2^{2/3}Q_{22}^2 + 35Q_{22}^4/16)/Q_2^2\Big],$$

$$h_{31} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)Q_{11}(1{,}75Q_{11}^2 - 3Q_1^{2/3})/Q_1^2 + \mu Q_{22}(1{,}75Q_{22}^2 - 3Q_2^{2/3})/Q_2^2\right],$$

$$h_{22} = -\frac{5}{16}\Big[(1-\mu)(0{,}8Q_1^{4/3} - Q_1^{2/3}Q_{12} - Q_{11}^2(Q_1^{2/3} - 1{,}75Q_{12}))/Q_1^2 +$$
$$+ \mu(0{,}8Q_2^{2/3} - Q_2^{2/3}Q_{12} - Q_{22}^2(Q_2^{2/3} - 1{,}75Q_{12}))/Q_2^2\Big],$$

$$h_{13} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)Q_{11}(1{,}75Q_{12} - 3Q_1^{2/3})/Q_1^2 - \mu Q_{22}(1{,}75Q_{12} - 3Q_2^{2/3})/Q_2^2\right],$$

$$h_{04} = -\frac{5}{32}\Big[(1-\mu)(2{,}4Q_1^{4/3} - 6Q_1^{2/3}Q_{12} + 1{,}75Q_{12}^2)/Q_1^2 +$$
$$+ \mu(2{,}4Q_2^{4/3} - 6Q_2^{2/3}Q_{12} + 1{,}75Q_{12}^2)/Q_2^2\Big],$$

$$Q_{12} = 2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3})^2 - 1, \qquad Q_{11} = 1 + Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3},$$
$$Q_{22} = 1 - Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}.$$

3. Нелинейное исследование устойчивости треугольных точек в плоской задаче

Рассмотрим случай, когда H_2 не является знакоопределенной функцией, а характеристическое уравнение системы не имеет корней с ненулевой вещественной частью (в противном случае тривиальное решение системы неустойчиво по Ляпунову).

Как видно из (7) H_2 не является знакоопределенной функцией, и следовательно, из устойчивости линейной системы не следует устойчивость полной системы.

Полагая, что в системе отсутствуют резонансы 3-го и 4-го порядков, после применения преобразования Биркгофа и ограничиваясь разложением до четвертого порядка включительно, функцию Гамильтона можно записать в виде

$$H^* = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2, \qquad 2r_i = q_i^2 + p_i^2 \quad (i = 1,2) \tag{11}$$

Согласно теореме Арнольда-Мозера [19] при одновременном выполнении условий

$$k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 \neq 0, \tag{12}$$

$$C(\omega_1, \omega_2) = c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0, \tag{13}$$

где k_1, k_2 - целые числа, удовлетворяющие условию $0 < |k_1| + |k_2| \le 4$ ($k = |k_1| + |k_2|$ - порядок резонанса), а c_{ij} - коэффициенты нормальной формы, определяемые системой формул через коэффициенты исходного гамильтониана [5], для всех значений массового параметра μ из области устойчивости линейной системы всюду сохраняется устойчивость по Ляпунову исходной системы (1). Исключение составляют множества точек, отвечающие резонансам 3-го ($\omega_1 = 2\omega_2$) и 4-го ($\omega_1 = 3\omega_2$) порядков, которые определяются выражениями

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{\dfrac{225 Q_{12}}{4Q_1^{2/3} \cdot Q_2^{2/3}} - 16}}{\dfrac{\sqrt{Q_{12}}}{2\sqrt[3]{Q_1} \cdot \sqrt[3]{Q_2}}}\right] \quad (14), \qquad \mu_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{\dfrac{25 Q_{12}}{4Q_1^{2/3} \cdot Q_2^{2/3}} - 1}}{\dfrac{5}{2}\dfrac{\sqrt{Q_{12}}}{\sqrt[3]{Q_1} \cdot \sqrt[3]{Q_2}}}\right]. \tag{15}$$

При резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$ нормализованный гамильтониан примет вид

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + A(\omega_1, \omega_2) r_2 \sqrt{r_1} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2), \tag{16}$$

$$\text{где} \qquad A(\omega_1, \omega_2) = -\sqrt{\omega_2 (x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}.$$

В обобщенной фотогравитационной ограниченной плоской задаче трех тел выражение $A(\omega_1, \omega_2)$ имеет вид

$$A(\omega_1, \omega_2) = -\left[\omega_2 \frac{25}{64}\Big((1-\mu)(0{,}8 \cdot Q_1^{2/3} - Q_{12}) Q_{11} / Q_1^{4/3} - \right.$$
$$\left. - \mu(0{,}8 Q_2^{2/3} - Q_{12}) Q_{22} / Q_2^{4/3}\Big)^2\right]^{1/2}, \tag{17}$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{36\mu(1-\mu)\left[2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_{11} - 1)^2 - 1\right]}{4Q_1^{2/3} \cdot Q_2^{2/3}}}\right]^{1/2},$$

которое при положительных значениях Q_1 и Q_2 нигде не обращается в нуль. Откуда следует [19], что в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел в области устойчивости линейной системы треугольные точки либрации всюду устойчивы по Ляпунову, за исключением множества точек, определяемого соотношением (12), для которых реализуется резонанс $\omega_1 = 2\omega_2$.

При наличии в системе резонанса четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ с помощью преобразования Биркгофа в исходном гамильтониане уничтожим члены третьей степени. Нормализованный при этом гамильтониан в полярных координатах примет следующий вид:

$$H^* = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + B(\omega_1, \omega_2) r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(r_1 + r_2)^{5/2}$$

Здесь $B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{3}\omega_2 \sqrt{3(x_{1003}^2 + y_{1003}^2)}$.

Используя результаты А.П. Маркеева [19] получим, что при резонансе четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$, определяемом множеством точек из области устойчивости линейной системы, треугольные точки либрации при

а) $|F_1| > F_2$ - устойчивы по Ляпунову, (18)

в) $|F_1| < F_2$ - неустойчивы, (19)

где $F_1 = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$, $F_2 = 3\sqrt{3}B(\omega_1, \omega_2)$.

Здесь коэффициенты c_{ij}, являющиеся инвариантами функции Гамильтона (5) относительно канонических преобразований, зависят от коэффициентов $h_{\nu_1 \nu_2 l_1 l_2}$ однородных полиномов (6) степени *m* (*m*=3, 4), которые в фотогравитационной задаче являются функциями параметров системы - коэффициентов редукции Q_1, Q_2 (или координат *x*, *y*) и безразмерного массового параметра μ. Вследствие громоздкости выражений этих коэффициентов, полученных в результате нормализации, исследования проводились на компьютере при помощи специально разработанной программы.

Доказано, что для всевозможных значений параметров системы резонансные множества точек 3-го порядка в обобщенной фотогравитационной ограниченной задаче трех тел всегда неустойчивы.

Построены области устойчивости треугольных точек при $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ для произвольных значений массового параметра μ в конфигурационном пространстве и в пространстве параметров системы (рис. 1-4). Были найдены участки области, где выполняется неравенство $|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}B(\omega_1, \omega_2)$, что свидетельствует об устойчивости по Ляпунову исследуемых точек либрации в плоском варианте задачи (в случае пространственной задачи имеет место устойчивость в 4-ом порядке); на других участках области, где неравенство меняет знак на обратный, имеет место неустойчивость исследуемых точек. Также указаны области (рис.2), в которых условие (13) не выполняется.

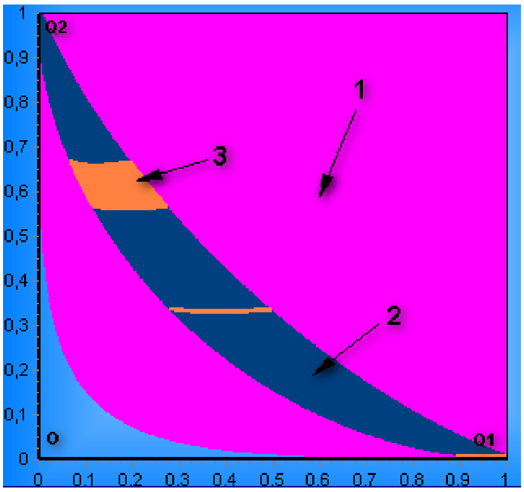


Рис.1 - Область устойчивости треугольных точек при μ=0,01.
1 - область линейной устойчивости ; 2 – устойчивые точки при $\omega_1 = 3\omega_2$; 3 – неустойчивые точки при $\omega_1 = 3\omega_2$;

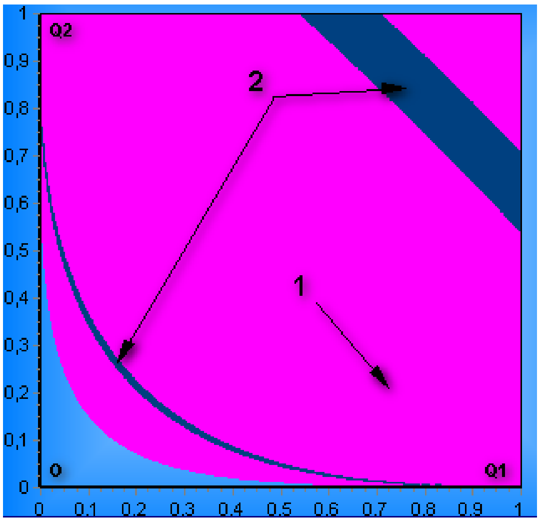


Рис. 2 - Область устойчивости треугольных точек либрации при μ=0,01.
1 - область линейной устойчивости; п 2 – точки, где $C(\omega_1, \omega_2) = 0$.

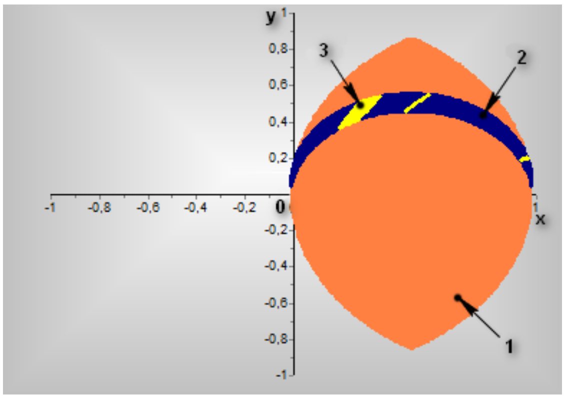


Рис.3 - Область устойчивости треугольных точек при μ=0,01.
1 - область линейной устойчивости;
2 – устойчивые точки при $\omega_1 = 3\omega_2$;
3 – неустойчивые точки при $\omega_1 = 3\omega_2$;

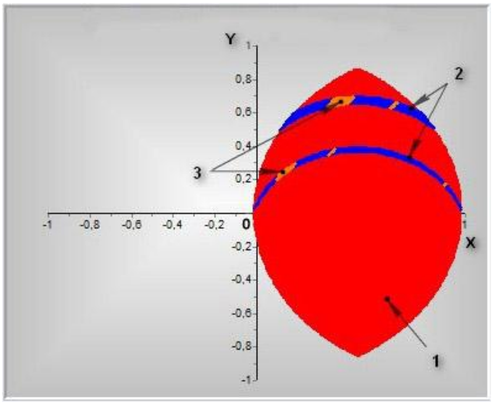


Рис.4 - Область устойчивости треугольных точек при μ=0,011.
1- область линейной устойчивости
2 – устойчивые точки при $\omega_1 = 3\omega_2$;
3 – неустойчивые точки при $\omega_1 = 3\omega_2$;

Таким образом, на основе КАМ-теории и результатов А.Л.Маркеева было доказано, что в области устойчивости в первом приближении треугольные точки плоской задачи трех тел всюду устойчивы по Ляпунову, за исключением множества точек, в которых реализуются резонансы третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. А при резонансе четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ треугольные точки могут быть устойчивы по Ляпунову или неустойчивы, в зависимости от выполнения условий теоремы А.П. Маркеева. Численным исследованием было установлено, что в области устойчивости в первом приближении для всех значений массового параметра из интервалов $0{,}0079625269\ldots > \mu > 0$ и $0{,}5 > \mu > 0{,}3860630212\ldots$ условия теоремы Арнольда – Мозера всегда выполняются, следовательно для этих значений μ треугольные точки либрации всюду имеет устойчивы по Ляпунову. Таким образом, вопрос об устойчивости треугольных точек либрации в плоской фотогравитационной круговой ограниченной задаче трех тел решается до конца.

4. Устойчивость треугольных точек либрации в пространственной задаче

При исследовании устойчивости треугольных точек либрации в пространственной задаче предположим, что частица *P*, совершающая движение в орбитальной плоскости, испытывает и пространственные начальные возмущения.

Теперь вопрос об устойчивости исследуемых решений сводится к задаче об устойчивости положений равновесия $q_i = p_i = 0$ (i=1,2,3) автономной гамильтоновой системы с тремя степенями свободы.

Раскладывая функцию Гамильтона в ряд по степеням q_i, p_i в окрестности рассматриваемого положения равновесия, сначала гамильтониан H_2 приводим к нормальной форме в виде

$$K_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3. \qquad (20)$$

Структура нормальных форм H_3 и H_4 зависит от вида резонансного соотношения

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 = 0 \quad , \qquad \left(|k_1| + k_2 + |k_3| \le 4\right), \qquad (21)$$

где частоты главных колебаний ω_i для рассматриваемых точек либрации равны

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{a}\right)/2}, \quad \omega_2 = \sqrt{\left(1+\sqrt{a}\right)/2}, \omega_3 \equiv 1, \\ &a = 1 - 36\mu(1-\mu)\sin^2(\psi_1 + \psi_2) = \\ &= 1 - 36(1-\mu)\frac{2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3})^2 - 1}{Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}} \end{aligned} \qquad (22)$$

.

$$\sin^2(\psi_1 + \psi_2) = \frac{2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - \Delta Q^2 - 1}{4Q_1^{2/3}\cdot Q_2^{2/3}}, \ \Delta Q = Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}.$$

Если ω_i не удовлетворяют условию (21), то после применения преобразования Биркгофа нормализованный до четвертого порядка включительно гамильтониан возмущенного движения в полярных координатах имеет вид

$$H^* = K_2(r_1, r_2, r_3) + K_4(r_1, r_2, r_3) \qquad (23)$$

Здесь K_4 определяется выражением

$$K_4 = c_{200}r_1^2 + c_{110}r_1r_2 + c_{101}r_1r_3 + c_{020}r_2^2 + c_{011}r_2r_3 + c_{002}r_3^2. \qquad (24)$$

Неустойчивость, обнаруженная в плоской задаче сохраняется и в рассматриваемой пространственной задаче.

Теперь используем исследования Арнольда по устойчивости гамильтоновых систем для большинства начальных условий [19]. Для этого, предполагая, что в системе отсутствуют резонансы вида $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$, составим определитель четвертого порядка

$$D_4 = \det\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 K_4}{\partial r_i \partial r_j} & \dfrac{\partial K_2}{\partial r_i} \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial r_j} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (25)$$

Раскрывая определитель (25, имеем

$$D_4 = \omega_1^2\left(c_{011}^2 - 4c_{020}c_{002}\right) + \omega_2^2\left(c_{101}^2 - 4c_{200}c_{002}\right) + \\ + 2\left[\omega_1\omega_2\left(c_{101}c_{011} - 2c_{002}c_{110}\right) - \omega_1\left(c_{011}c_{110} - 2c_{020}c_{101}\right) + \\ \omega_2\left(c_{110}c_{101} - 2c_{200}c_{011}\right)\right] + c_{110}^2 - 4c_{200}c_{020}. \qquad (26)$$

Положение равновесия $q_i = p_i = 0$ устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, если определитель $D_4 \neq 0$

Проверяя далее с помощью численного анализа выполнимость неравенства $D_4 \neq 0$, убеждаемся, что в пространственной обобщенной фотогравитационной задаче трех тел треугольные точки либрации устойчивы для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий при всех μ (кроме μ_1 и μ_2, отвечающих внутренним резонансам третьего $\omega_1 = 2\omega_2$ и четвертого $\omega_1 = 3\omega_3$ порядков), Q_1, Q_2 из области устойчивости линейной системы (рис. 5-7).

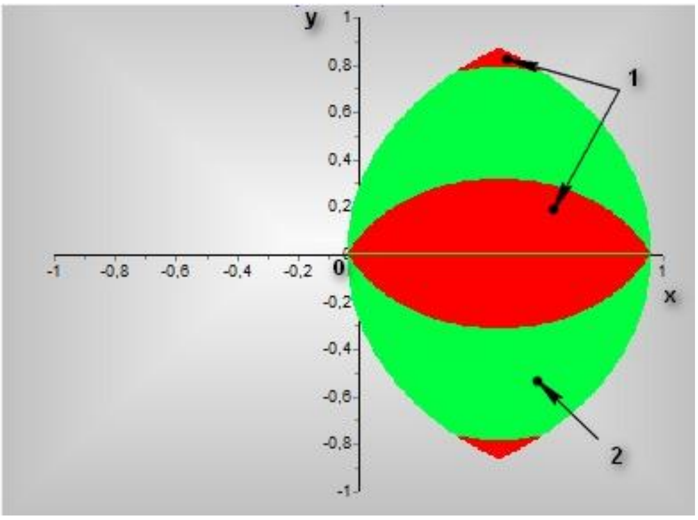


Рис.5 - Область устойчивости треугольных точек при $\mu = 0{,}035$.

1 - $D(\omega_1, \omega_2) \neq 0$; 2 - $D(\omega_1, \omega_2) = 0$

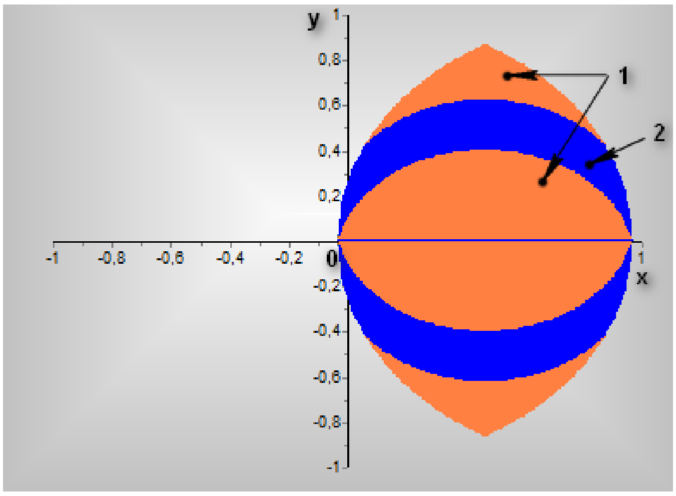


Рис.6 - Область устойчивости треугольных точек при $\mu = 0{,}03$.

1 - $D(\omega_1, \omega_2) \neq 0$; 2 - $D(\omega_1, \omega_2) = 0$

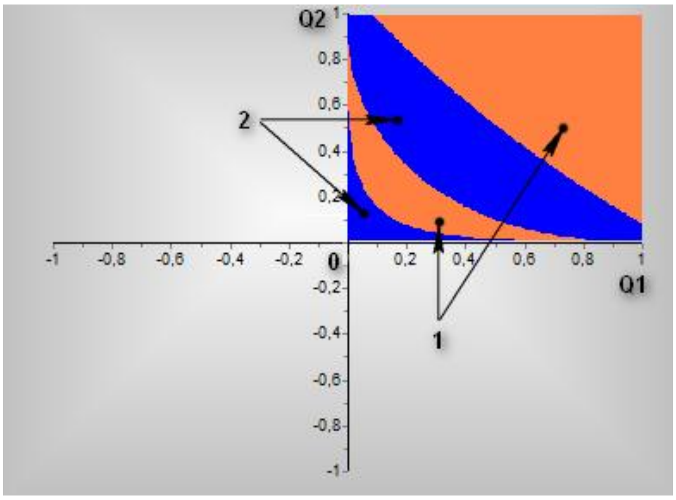


Рис.7 - Область устойчивости треугольных точек при $\mu = 0{,}03$.

1 - $D(\omega_1, \omega_2) \neq 0$; 2 - $D(\omega_1, \omega_2) = 0$

Наличие в системе устойчивости для большинства начальных условий означает, что движение частицы P вблизи начала координат $q_i = p_i = 0$ будет условно-периодическим для всех начальных условий, соответствующих несоизмеримым частотам ω_1, ω_2 главных колебаний. Для других начальных условий может иметь место неустойчивость рассматриваемых точек либрации. Таким образом, с вероятностью, близкой к единице, треугольные точки в пространственной задаче устойчивы.

Следует заметить, что выполнение условия Арнольда $D_4 \neq 0$ для системы с двумя степенями свободы совпадает с условием Арнольда-Мозера $C \neq 0$ (13), и, следовательно, гарантирует устойчивость по Ляпунову треугольных точек.

В пространственной фотогравитационной ограниченной задаче трех тел с двумя излучающими основными массами треугольные точки либрации формально устойчивы для почти всех значений параметров из области устойчивости в линейном приближении. Исключения составляют, кроме значений параметров, отвечающих исследованным резонансом, быть может, те значения μ, Q_1, Q_2 из области устойчивости, при которых реализуются резонансы выше четвертого порядка.

Наличие формальной устойчивости означает, что неустойчивость по Ляпунову на практически очень большом промежутке времени не обнаруживается при учете в разложении функции Гамильтона в ряд относительно координат q_i и p_i импульсов членов до сколь угодно высокого (но конечного) порядка. А это и говорит о том, что частицы достаточно долго будут находиться вблизи устойчивых точек либрации.

Литература:

1. Радзиевский В.В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления //Астрономический журнал. - 1950. - Т.27. - С. 249.
2. Радзиевский В.В. Пространственный случай ограниченной задачи трех излучающих и гравитирующих тел // Астрономический журнал. - 1953. - Т.30. - С. 265.
3. Kunitsyn, A. L. and Polyakhova, E. N. (1995) The restricted photogravitational three-body problem: A modern state, Astronomical & Astrophysical Transactions, 6:4, 283
4. Colombo, G., Lautman, D. A. and Shapiro, I. I. (1966) *J. Geophys. Res.* 71, 23, 5705.
5. Bhatnagar, K. B. and Chavla, J. M. (1979) *Indian J.* Pure *and Appl. Math.* 10, 10,1443.
6. Manju, K. and Choudry, R. K. (1985) On the stability of libration points taking into account the light pressure for the circular restricted problem of three bodies. *Celest. Mech.* 36**,** 2, 165.
7. Mignard, F. (1984) Stability of L4 and L5 against radiation pressure. *Celest. Mech.* 34, 1-4, 275.
8. Черников Ю.А. Фотогравитационная ограниченная задача трех тел. //Астрономический журнал. - 1970. - Т.47. 1.- С. 217.

9. Пережогин А.А. Об устойчивости точек либрации в ограниченной фотогравитационной круговой задаче трех тел // Космические исследования. - 1982. - Т.20.2. - С. 196.

10. Schuerman, D.W. (1980) The restricted three body problem including radiation pressure. *Astrophys*. J., 238, 1, 337.

11. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. журнал. - 1983. - Т.9. 7. - С. 432.

12. Kunitsin A.L., and Tureshbaev A.T. (1985) On the collinear libration in the photo-gravitational three-body problem. *Celest. Mech.,* 35, 2, 105.

13. Simmons, J.F.L., McDonald, A.J.C. and Brown, J.C. (1985). The restricted three-body problem with radiation pressure. *Celes. Mech*., 35, 145.

14. Куницын А. Л., Турешбаев А. Т. Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел. // Письма в Астрон. журнал. - 1985. - Т.11. 2. - С.145.

15. Лукьянов Л.Г. О семействе точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел // Астрон. журнал. - 1988. - Т.65.2. - С.422.

16. Пережогин А.А., Турешбаев А.Т. Об устойчивости треугольных точек либрации в фотогравитационной задаче трёх тел // Астрон. журнал. - 1989. - Т.66. - С.859.

17. Kumar, V. and Choudhry, R. K. (1988) *Celest. Mech.* 41, 1-4, 161.

18. Kumar, V. and Choudhry, R. K. (1989) *Indian J. pure appl. Math.*, 20(4): 403.

19. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. - М.: Наука, 1978. - 312 с.

Резюме

Исследуется устойчивость облачных скоплений микрометеоритных частиц и частиц газопылевой материи в поле двойных звездных систем. В качестве динамической модели рассматривается фотогравитационная ограниченная круговая задача трех тел, в которой оба основных гравитирующих тела являются излучающими. Проводится нелинейное исследование устойчивости лагранжевых решений - треугольных точек либрации и впервые построены области их устойчивости в конфигурационном пространстве и в пространстве параметров системы. Доказано, что в области устойчивости в первом приближении, за исключением множества точек, отвечающих резонансам 3-го и 4-го порядков, почти всюду имеет место устойчивость треугольных точек для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий и формальная устойчивость. Установлено, что при резонансе 3-го порядка исследуемые точки всегда неустойчивы. На некоторых участках области устойчивости линейной системы, отвечающих резонансам 4-го порядка, доказана устойчивость в четвертом порядке.

В области устойчивости линейной системы для значений произвольной массы из интервалов 0,0079625269… $> \mu > 0$ и 0,5 $> \mu > 0{,}3860630212\ldots$ условия теоремы Арнольда–Мозера всегда выполняются, что гарантируют устойчивость

Вопрос об устойчивости треугольных точек либрации в плоской фотогравитационной задаче тел решен полностью.

Ключевые слова: фотогравитационная задача трех тел, треугольные точки либрации, устойчивость по Ляпунову, нелинейный анализ, движение частицы, ограниченная круговая задача, двойные звезды, канонические уравнения движения, пространство параметров, функция Гамильтона, нормализация, коэффициенты нормальной формы, резонансы, область устойчивости в линейном приближении.

Түйіндеме

Қос жұлдыздар жүйесі өрісіндегі микрометеориттік бөлшектер мен газ-шаң бұлттары бөлшектерінің шоғырлануының орнықтылығы зерттелінеді. Динамикалық модель ретінде фотогравитациялық шектелген шеңберлік үш дене есебі қарастырылады. Мұндағы негізгі екі дене сәуле шығарады. Либрацияның үшбұрыштық нүктелері (лагранждық шешімдері) сызықтық емес тұрғыда зерттелініп, олардың орнықтылық облыстары алғаш рет конфигурациялық және жүйе параметрлері кеңістігінде құрылды.

Алғашқы жуықтау бойынша орнықтылық облысында 3-ші және 4-ші ретті резонанстарға жауап беретін нүктелер жиынынан басқа барлық нүктелерде көптеген алғашқы шарттардың аса басым көпшілігі үшін үшбұрыштық нүктелердің орнықтылығы және сонымен қатар формальді орнықты болатындығы дәлелденді. Зерттеу барысында 3-ші ретті резонанстарға сәйкес келетін нүктелердің орнықсыз болатындығы анықталды. Ал 4-ші ретті резонанстарға жауап беретін сызықсыз жүйенің орнықтылық аумақтарының көптеген нүктелер жиынтығының орнықты болатындығы дәлелденді.

$0{,}0079625269\ldots > \mu > 0$ және $0{,}5 > \mu > 0{,}3860630212\ldots$аралықтарынан қалауымызша алынған массалар үшін сызықтық жүйенің орнықтылық облысында Арнольд-Мозер теоремасының шарттары әрдайым орындалады, ал бұл шарттар зерттеп отырған нүктелердің орнықты болатындығының кепілі.

Фотогравитациялық шектелген жазықтықтық үш дене есебінде үшбұрыштың либрациялық нүктелерінің орнықтылығы туралы мәселе толық шешімін тапты.

Кілт сөздер: фотогравитациялық үш дене есебі, либрацияның үшбұрышты нүктелері, Ляпунов бойынша тұрақтылық, сызықсыз талдау, бөлшектер қозғалысы, шектелген шеңберлік есеп, қос жұлдыздар, қозғалыстың канондық теңдеуі, параметрлер кеңістігі, Гамильтон функциясы, қалыпқа келтіру, қалыпты форма коэффициенттері, резонанстар, сызықтық жуықтаудағы орнықтылық облысы

Summary

The photogravitational restricted problem of three bodies in which both cores gravitational bodies are sources of radiation of light energy is considered. Libration nonlinear research of stability of three-parametrical family of triangular points is carried out space of parametres of system taking into account resonant modes of 3rd and 4th usages. It is shown that in the field of stability of linear system stability on Lyapunov except for resonant set of points in which stability can be broken everywhere takes place. Thus, the question on stability of triangular points либрации in a flat photogravitational circular problem of three bodies is solved up to the end.

Key words: a photogravitational problem of three bodies, triangular points libration, stability on Lyapunov, the nonlinear analysis, the particle movement, the limited circular problem, double stars, the initial equations of movement, space of parametres, function of Hamilton, normalisation, normal form factors, resonances, stability area in linear approach.

ӘОЖ 378.851

АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯ ҚҰРАЛДАРЫН МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМ БЕРУДЕ ПАЙДАЛАНУ

Б.Е.ТҰРБАЕВ, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент,
М.Т. БЕГАЙДАРОВ, Н.САЛҚЫНБАЕВА – магистранттар
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті,
Қазақстан Республикасы

Елбасымыз Н.Ә.Назарбаевтың «Қазақстан-2050» Қазақстан халқына жолдауында білім беру саласындағы басымдықтардың ішінде: «...Ескірген немесе сұраныс жоқ ғылыми және білім пәндерінен арылу, сонымен бірге сұраныс көп және болашағы бар бағыттарды күшейту қажет. Орта және жоғары білім берудің оқу жоспарларының бағыттылығы мен басымдықтарын оларға тәжірибелік машықтарға үйрету бойынша және тәжірибелік біліктілікке ие болу бағдарламаларын қосып, өзгерту...»[1] деп атап көрсеткен болатын. Сондықтан жоғарғы оқу орындарына қойылып отырған бүгінгі күннің басты талабы – мамандардың жаңа буынын тәрбиелеу.

Білім – үдемелі индустриальді жаңа технологияға бағытталған мемлекетіміздің дамуы мен бәсекелестік мүмкіндігінің анықтауыш көрсеткіші болып табылады.

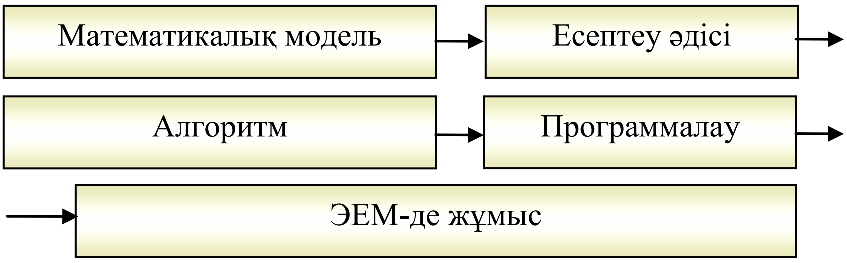
Соңғы кезде мұғалімнің кәсіби даярлығы төңірегіндегі сұрақтарға терең талдау жасайтын болсақ, бүгінгі қоғамның саяси-әлеуметтік, экономикалық дамуына сай, маман мұғалімдер даярлау ісіне қойылып отырған талаптардың өте жоғары екендігін көруге болады. Осы тұрғыда болашақ математика пәнінің мұғалімдерінің кәсіби тұрғыда сапалы маман болып қалыптасуы үшін, олардың жаңа инновациялық технологиялық жүйе негізінде белсенділігін арттыру, сенімділігін қалыптастыру, танымдық іс-әрекет негізінде шығармашылық қабілетін дамыту болып табылады. Осыған орай болашақ мұғалімдерді даярлауда мектептегі сыбайлас пәндердің байланысын, пәнаралық және пәнішілік байланысты орнықтыратын әдістемелік сұрақтардың орны ерекше жоғары. Себебі мектептегі оқу процесінде математика мен физиканы, геометрияны ұштастыра оқыту, сонымен бірге алгебра және анализ бастамалары бойынша пәннің ішкі байланыстарын пайдаланып оқыту әдістеріне жаңа инновациялық технологияны, атап айтқанда компьютерлік технологияны пайдалану математикадан тиімді әрі терең білім берудің негізгі шарттарының бірі болып табылады.

Математикалық білім беруде компьютерлік технологияны пайдалану негізінде мына нәтижелерге:

1) Білім алушылардың жеке тұлғалық қабілеттерінің дамуына, ашылуына;
2) Білім алушылардың танымдық қабілеттерінің қалыптасуына, шығармашылық жұмыс істеуіне;
3) Оқу-тәрбие процесін оң бағытта дамытуға мүмкіндік береді.

Компьютерлік технологияда есептеу техникасымен жұмыс жасау, пайдаланудың маңызды салаларының бірі – математикалық модельдеу.

Бұл жұмыста қарапайым дифференциалдық теңдеулерді шешуде математикалық модельдеу әдісін қолдану жолдары қарастырылады. Математикалық модельдеудің схемасы төмендегідей болады:



Енді нақты мысал қарастырайық.

1) $y'+2y=y^2e^x$ дифференциалдық теңдеуін шешейік.

Жаңа айнымалы енгіземіз: $y=\frac{1}{z},\ y'=-\frac{z'}{z^2}$

$$-\frac{z'}{z^2}+2\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2}e^x$$

$$z'-2z=-e^x$$

Алдымен сызықтық біртекті $z'-2z=0$ теңдеуін шешіп алайық.

$$\left[\begin{array}{l}\frac{dz}{z}=2dx,\\ z=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\int\frac{dz}{z}=2\int dx,\\ z=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\ln|z|=2x+\tilde{C},\\ z=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}z=\pm e^{\tilde{C}}e^{2x},\\ z=0\end{array}\right.\quad z=Ce^{2x}.$$

$z=C(x)e^{2x}$ деп алып,

$$C'(x)e^{2x}+2C(x)e^{2x}-2C(x)e^{2x}=-e^x,$$

$$C'(x)=-e^{-x},\ C(x)=e^{-x}+C,$$

Бұдан

$$z=\left(e^{-x}+C\right)e^{2x}=e^x\left(1+Ce^x\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{e^x\left(1+Ce^x\right)}\\ y=0\end{array}\right.$$

Осы есепті шешуді Mathematica 5.0 программасында орындауды көрсетейік.

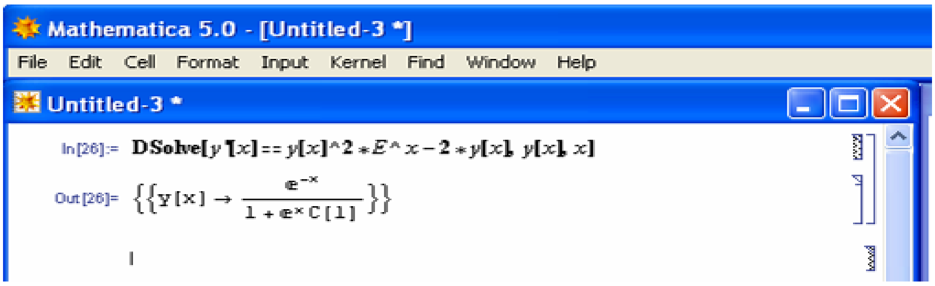
$$y'+2y=y^2e^x$$

1) $y'=y^2e^x-2y$ деп алып,

DSolve[y'[x]==y[x]^2*E^x-2*y[x],y[x],x]

контекстті менюден Evaluate Cells командасын басамыз.

Сонда $=\{\{y[x]\to\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}C[1]}\}\}$ шешімі көрінеді (1-сурет).



Сурет 1

2) Енді мына $y(0)=1$ нүктеден өтетін қисықтың графигін салып көрсетейік.

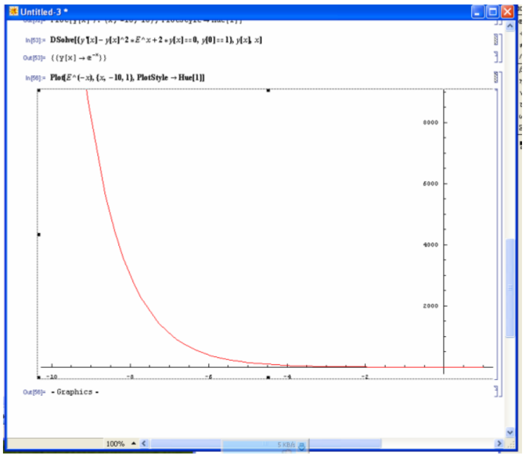
Ол үшін

DSolve[{y'[x]-y[x]^2*E^x+2*y[x]==0,y[0]==1},y[x],x]

Plot[E^(-x),{x,-10,10},PlotStyle→Hue[1]]

командаларын береміз (2-сурет).

Сонда



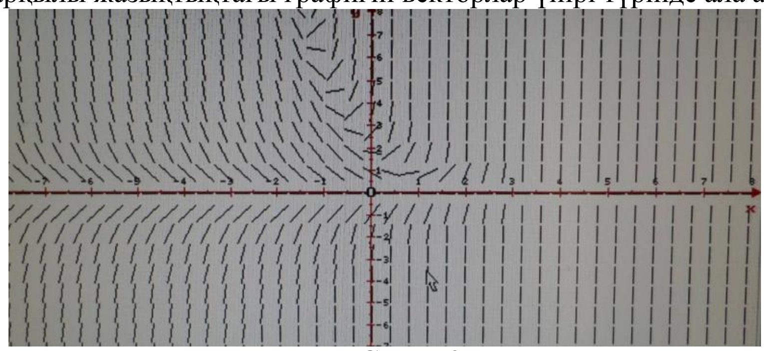
Сурет 2

3) <<Graphics ‘PlotField‘

PlotHamiltonianField[{y'[x]-y[x]^2*E^x+2*y[x]==0},

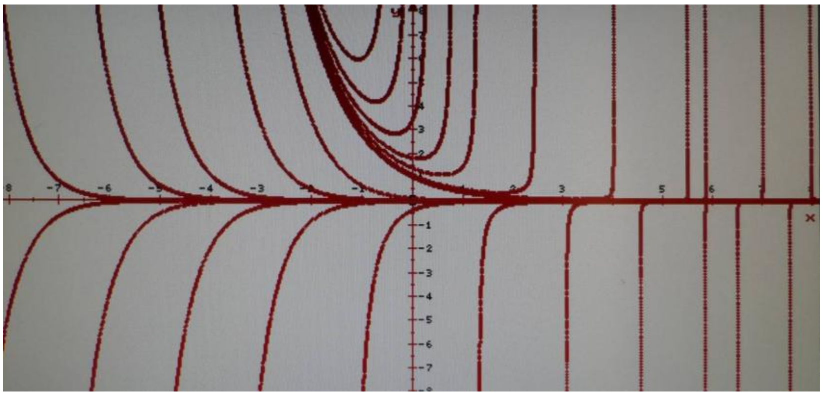
{x,-8,8},},{y,-8,8},y[x],x]

командасы арқылы жазықтықтағы графигін векторлар үйірі түрінде ала аламыз (3-сурет).



Сурет 3

4) Дифференциалдық теңдеудің шешімдер жиынын сол сияқты интегралдық қисықтар үйірімен де көрсетуге болады (4-сурет):



Сурет 4

XXI ғасыр – ақпараттар ағымына негізделген қоғам дәуірі. Бүгінгі күннің басты талабы – білім алушыларға ақпараттық білім жүйесінің негіздерін беру, танымдық мүмкіншіліктерін кеңейту, ақпараттық технологияны, ақпарат құралдарын білім беруде кеңінен қолдану. Бұл білім алушылардың шығармашылық қабілеттерін, дүниетанымын, нақты пәндерге деген қызығушылығын туғызады. Себебі, қазіргі кезде белгілі бір білім көлемімен шектелуге болмайды.

Қорыта айтқанда, ақпараттық технологияны оқыту процесінде қолдану, білім беру және оқыту құралы ретінде, білім беру үрдісін жетілдіріп, білім сапасы мен нәтижелілігін көтеруге мүмкіндік туғызады.

Әдебиеттер:

1. «Егемен Қазақстан» газеті. - 2012. – 15 желтоқсан.
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А. Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи // Высшая школа 2-е изд. - 1989.
3. Дьяченко С. Использование интегрированной символьной системы Mathematica при изучении курса высшей математики в вузе. – 2005.
4. Шмидский Я. К. Mathematica 5. Самоучитель. - М.: Диалектика, 2004.

Түйіндеме

Бұл мақалада қазіргі білімнің даму болашағы қоғамның даму үрдісімен анықталатынана арналған. Информациялық қоғам жағдайында жасөспірімдерге білім беру жан-жақты процесс болуы керек. Жаңаша оқыту әдістері қажет. Осы тұрғыда математиканың кейбір сұрақтары компьютерлендіру арқылы баяндалып, нақты мысалдар келтіріледі.

Кілт сөздер: ақпараттық технология, математикалық білім беру, дифференциалдық теңдеулер.

Резюме

Перспективы развития современного образования определяется развитием общества. В информационно развитом обществе, образовательный процесс подрастающего поколения, должен быть всесторонним. Требуется новые методы обучения. В данной работе рассматривается применение компьютерной технологии некоторым вопросам математики.

Ключевые слова: информационная технология, обучение математики, дифференциальные уравнения.

Summary

Prospects for the development of modern education are determined by the development of society. In the developed informational society, the educational process of the younger generations should be comprehensive. Requires new methods of learning. This paper considers the application of computer technologies some problems of mathematics.

Key words: information technology, mathematics education, differential equations.

УДК 539.3(043.3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК НА ПОВЕРХНОСТЬ СЛОИСТОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

У.У.УМБЕТОВ, доктор технических наук, профессор,
Таразский государственный университет имени М.Х.Дулати, Республика Казахстан
А.Ж.СЕЙТМУРАТОВ, доктор физико-математических наук,
Ж.Б.СЕЙСЕКЕ, магистр
Кызылординский государственный университет им.Коркыт Ата,
Республика Казахстан

В данной статье рассматриваются класс плоских задач о воздействии подвижных нагрузок на поверхность слоистой упругой полуплоскости. Задачи данного класса представляют большой прикладной интерес и, кроме того, могут служить эталоном для разработки тех или иных численных алгоритмов для решения динамических задач.

Среди различных периодических и непериодических движений деформируемых сред важное значение имеют плоские волны простого гармонического типа, распространяющиеся по поверхности тела или полуплоскости, влияние которых ограничивается окрестностью этой поверхности.

Предположим, что в среде распространяется плоская гармоническая волна, т.е. потенциалы φ и ψ имеет в виде

$$\varphi(x,z,t)=\Phi_0(z)\exp[i(pt-qx)]; \qquad \psi(x,z,t)=\Psi_0(z)\exp[i(pt-qx)], \tag{1}$$

а Φ_0 и Ψ_0 удовлетворяет уравнениям

$$\Phi_0'' - \left(q^2-\frac{p^2}{a^2}\right)\Phi_0=0; \qquad \Psi_0''-\left(q^2-\frac{p^2}{b^2}\right)\Psi_0=0. \tag{2}$$

Рассматривая колебания, затухающие с глубиной $z\to-\infty$, должно выполняться условие

$$q^2-\frac{p^2}{a^2}>0; \qquad q^2-\frac{p^2}{b^2}>0; \tag{3}$$

Но так как скорости a и b удовлетворяют неравенству $a>b$, то достаточно выполнения вместо условий (3) одного условия

$$\frac{p}{q}<b \tag{4}$$

Следовательно, решения уравнений (2), затухающие на бесконечности $z\to-\infty$, имеют вид

$$\Phi_0(z)=A\exp\left(\sqrt{q^2-\frac{p^2}{a^2}}\cdot z\right); \qquad \Psi_0(z)=B\exp\left(\sqrt{q^2-\frac{p^2}{b^2}}\cdot z\right), \tag{5}$$

а для потенциалов φ и ψ получаем выражения

$$\varphi=A\exp\left[i(pt-qx)+\sqrt{q^2-\frac{p^2}{a^2}}z\right]; \qquad \psi=B\exp\left[i(pt-qx)+\sqrt{q^2-\frac{p^2}{b^2}}z\right], \tag{6}$$

где A и B произвольные постоянные интегрирования.

Будем считать, что граница полуплоскости $z=0$ свободна от напряжений, т.е.

$$\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=0 \qquad (z=0) \tag{7}$$

Подставляя решения (5) в граничные условия (7), получим

$$A\left[2-\left(\frac{p}{qb}\right)^2\right]+2iB\sqrt{1-\left(\frac{p}{qb}\right)^2}=0; \qquad -2iA\sqrt{1-\left(\frac{p}{qa}\right)^2}+B\left[2-\left(\frac{p}{qb}\right)^2\right]=0. \tag{8}$$

Для того, чтобы решение задачи было не нулевое, необходимо, чтобы определитель системы (8) был отличен от нуля, т.е. чтобы выполнялось соотношение

$$\left[2-\left(\frac{p}{qb}\right)^2\right]^2-4\sqrt{1-\left(\frac{p}{qb}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{p}{qa}\right)^2}=0. \qquad (9)$$

Отношение (p/q) называется скоростью распространения поверхностной волны Релея. Обозначив $\xi=\left(\frac{p}{qb}\right)^2$ и введя коэффициент Пуассона ν, из соотношения (9) получим уравнение для безразмерной скорости поверхностной волны Релея $\sqrt{\xi}$:

$$\xi^3-8\xi^2+8\xi\frac{2-\nu}{1-\nu}-8\frac{1}{1-\nu}=0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) имеет единственный действительный положительный корень [3].

Если через z_1 и z_2 обозначить глубину проникновения, на которой амплитуда напряжений падает в e раз за счет продольной и поперечной волны, соответственно, то для них получим выражения

$$z_1=-\frac{l}{2\pi\sqrt{1-a^{-2}b^2\xi}}; \qquad z_2=-\frac{l}{2\pi\sqrt{1-\xi}},$$

при этом $l=\frac{1}{q}$ - длина волны. Например, при $\nu=0{,}5$ имеем

$$z_1=-\frac{l}{2\pi}; \qquad z_2\cong-\frac{l\sqrt{10}}{2\pi}.$$

Пусть по поверхности $z=0$ распространяется с постоянной скоростью D нормальная и касательная нагрузка интенсивности $-F_1(x+Dt)$ и $-F_2(x+Dt)$, т.е. при $z=0$ имеем граничные условия

$$\sigma_{zz}=-F_1(x+Dt); \quad \sigma_{xz}=-F_2(x+Dt). \qquad (11)$$

Начальные условия на такой задаче отсутствуют.

Введем подвижные координаты

$$x'=x+Dt; \quad y'=y,$$

причем штрихи в дальнейшем для простоты будем опускать. Тогда для потенциалов φ и ψ получаем уравнения

$$\alpha^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0; \quad \beta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0;$$
$$\alpha^2=(D/a)^2-1; \quad \beta^2=(D/b)^2-1. \qquad (12)$$

Общие решения уравнений (12) находятся методом Даламбера и имеют вид

$$\varphi(x,z)=\varphi_1(x+\alpha z)+\varphi_2(x-\alpha z); \qquad \psi(x,z)=\psi_1(x+\beta z)+\psi_2(x-\beta z). \qquad (13)$$

В силу отсутствия отраженных волн от нижней бесконечно удаленной границы функции φ_2 и ψ_2 должны обращаться в нуль, а для φ_1 и ψ_1 из граничных условий (1112) получаем функциональные соотношения

$$\begin{aligned}&(\beta^2-1)\varphi_1''(x)-2\beta\psi_1''(x)=-\frac{F_1(x)}{\rho D^2}(\beta^2+1)H(x);\\&2\alpha\varphi_1''(x)+(\beta^2-1)\psi_1''(x)=-\frac{F_2(x)}{\rho D^2}(\beta^2+1)H(x).\end{aligned} \qquad (14)$$

Из соотношений (14) получим

$$\varphi_1''(x) = \frac{\beta^2+1}{\rho D^2}\left[\left(\beta^2-1\right)F_1(x) + 2\beta F_2(x)\right]H(x)\Delta^{-1};$$

$$\psi_1''(x) = \frac{\beta^2+1}{\rho D^2}\left[2\alpha F_1(x) - \left(\beta^2-1\right)F_2(x)\right]H(x)\Delta^{-1};$$

$$\Delta = 4\alpha\beta + \left(\beta^2-1\right)^2. \tag{15}$$

С использованием зависимостей (15) для величин напряжений получаем выражения

$$\begin{gathered}
\Delta\cdot\sigma_{xx} = -\left(\beta^2-2\alpha^2+1\right)\left[\left(\beta^2-1\right)F_1(x+\alpha z)+2\beta F_2(x+\alpha z)\right]\times \\
\times H(x+\alpha z) + 2\beta\left[2\alpha F_1(x+\beta z) - \left(\beta^2-1\right)F_2(x+\beta z)\right]H(x+\beta z); \\
\Delta\cdot\sigma_{zz} = -\left(\beta^2-1\right)\left[\left(\beta^2-1\right)F_1(x+\alpha z)+2\beta F_2(x+\alpha z)\right]H(x+\alpha z) - \\
-2\beta\left[2\alpha F_1(x+\beta z) - \left(\beta^2-1\right)F_2(x+\beta z)\right]H(x+\beta z); \\
\Delta\cdot\sigma_{xz} = -2\alpha\left[\left(\beta^2-1\right)F_1(x+\alpha z)+2\beta F_2(x+\alpha z)\right]H(x+\alpha z) + \\
+\left(\beta^2-1\right)\left[2\alpha F_1(x+\beta z) - \left(\beta^2-1\right)F_2(x+\beta z)\right]H(x+\beta z);
\end{gathered} \tag{16}$$

$$H(\varsigma) = \begin{Bmatrix} 1, & \varsigma \ge 0 \\ 0, & \varsigma < 0 \end{Bmatrix},$$

а для перемещений u и w, соответственно

$$\begin{gathered}
u = -\frac{\beta^2+1}{\rho D^2\Delta}\left[\left(\beta^2-1\right)F_3(x+\alpha z)+2\beta F_4(x+\alpha z)\right]H(x+\alpha z) + \\
+\beta\frac{\beta^2+1}{\rho D^2\Delta}\left[2\alpha F_3(x+\beta z) - \left(\beta^2-1\right)F_4(x+\beta z)\right]H(x+\beta z); \\
w = -\alpha\frac{\beta^2+1}{\rho D^2\Delta}\left[\left(\beta^2-1\right)F_3(x+\alpha z)+2\beta F_4(x+\alpha z)\right]\times \\
\times H(x+\alpha z) - \frac{\beta^2+1}{\rho D^2\Delta}\left[2\alpha F_3(x+\beta z) - \right. \\
\left. -\left(\beta^2-1\right)F_4(x+\beta z)\right]H(x+\beta z),
\end{gathered} \tag{17}$$

где

$$F_3(x) = \int_0^x F_1(\xi)d\xi; \qquad F_4(x) = \int_0^x F_2(\xi)d\xi.$$

Пусть $F_2 = 0$ и рассмотрим напряжение σ_{xx} на границе $z = 0$. Получим

$$\sigma_{xx} = F(v, D_0)F_1(x); \qquad D_0 = D/a,$$

где

$$F(v, D_0) = \frac{A_1(v, D_0) - A_2(v, D_0)B(v, D_0)}{A_1(v, D_0) - A_2(v, D_0)};$$

$$A_1 = (1-2v)^{3/2}\sqrt{\left(D_0^2-1\right)(1-v)-(1-2v)}; \qquad A_2 = \left[D_0^2(1-v)-(1-2v)\right];$$

$$B = \left[D_0^2(1-v) - \left(D_0^2-1\right)(1-2v)\right].$$

Пусть на полупространстве $z \le -h$ лежит упругий слой $0 \ge z > -h$ $|x| < \infty$, по поверхности которого распространяется нормальная нагрузка, т.е. при $z = 0$ имеем граничные условия

$$\sigma_{zz}^{(0)} = -F(x+Dt); \qquad \sigma_{xz}^{(0)} = 0. \tag{18}$$

Величины и параметры слоя будем обозначать индексом "0", а полпространства – индексом "1".

На границе контакта $z = -h$ можно задать условия:

жесткий контакт

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(1)}; \quad \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)}; \quad u_0 = u_1; \quad w_0 = w_1; \tag{19}$$

идеальный контакт

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(1)}; \quad \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)} = 0; \quad w_0 = w_1; \tag{20}$$

Можно задавать и другие условия при $z = -h$.

В подвижных координатах решения уравнений для потенциалов в слое и полуплоскости имеет вид

$$\alpha_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0; \qquad \beta_j^2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^2} = 0;$$

$$\left(x' = \frac{x + Dt}{h}; \quad y' = \frac{y}{h}; \quad \varphi_0 = \frac{\varphi_0}{h^2}; \quad \psi_0 = \frac{\psi_0}{h^2} \right). \tag{21}$$

Подставляя (21) в граничные условия (19), получим систему функциональных уравнений, которую, используя в выражениях для перемещений u_j, w_j и напряжений σ_{ij} получим решение задачи. Задачи данного класса могут служить эталоном для разработки численных алгоритмов при решении динамических задач.

Литература:

1. Дубошин Г.Н. Основы теории устойчивости движения. - М.: МГУ, 1952.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. -807с.
3. Филиппов И.Г. Чебан В.Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988. – 190 с.

Резюме

В статье рассматривается класс плоских задач о воздействии подвижных нагрузок на поверхность слоистой упругой полуплоскости. Задачи данного класса представляют большой прикладной интерес и, кроме того, могут служить эталоном для разработки тех или иных численных алгоритмов для решения динамических задач.

Ключевые слова: слоисто упругая деформация, гармонические плоские волны, волны Релея.

Түйіндеме

Бұл мақалада қозғалмалы күштің қатпарлы серпімді, жартылай кеңістік бетіне әсер ететін жазықтық есептерінің тобы қарастырылады. Бұл мағынадағы есептер қолданбалы жағдайларда үлкен қызығушылық көрсетуде. Әдіс динамикалық есептерді шешудегі сандық алгоритмдердің тиімдісі болып табылады. Деформацияланатын әртүрлі периодты және периодты емес ортада жай гармоникалық жазық толқындардың үлкен мәні бар.

Кілт сөздер: қатпарлы серпімді, деформация, гармоникалық жазық толқындар, Релей толқындары.

Summary

The article deals with the class of flat tasks concerning the impact of flexible loads on the surface of the stratified elastic semi-plane. The tasks of this class are of great interest and besides, they can be the basis for the development of some other numerical algorithms for the solving dynamical problems.

Key words: stratified elastic, deformation, harmonious flat waves, Riley’s waves.

ӘОЖ 533.9.01

ФИЗИКАЛЫҚ ҚҰБЫЛЫСТАРДЫ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

А.У.УМБЕТОВ, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент
Ы.Алтынсарин атындағы Арқалық мемлекеттік педагогикалық институты,
Қазақстан Республикасы

Модельдеу әдісі ғылымда кең түрде қолданылады. Бұл әдіс өмірдің барлық саласында, тұрмыста, өндірісте жиі қолданылады. Бізді қоршаған орта күрделі, әртүрлі және көп жақты болып келеді. Табиғат құбылыстары мен заңдарын зерттеу барысында, оларды танып, білу үрдісінде құбылыстардың ең маңызды қасиеттерін, қарастырылып отырған сәттегі көрініп тұрған жақтарын ғана алып, қалған жақтарын ескермейміз. Осы жағдай модельдеу әдісінің негізін құрайды. Сандық байланыстарды анықтау үшін күрделі құралдар мен қондырғылар жасалады. Бұл қондырғыларда құбылыстың қажетті қасиеті ғана тіркеліп, қалған қасиеттері тіркелінбейді. Тіркелінген шамалар бойынша тәжірибелі сандық заңдылықтарды анықтайды. Көптеген табиғат заңдарының мазмұндары осындай әдістермен құралады.

Табиғаттың іргелі заңдары немесе денелердің физикалық қасиеттері зерттелінген жағдайда зерттеуші тікелей тәжірибелер жүргізеді. Мысалы, бүкіл әлемдік тартылыс заңын қарастырған жағдайда екі дененің арасындағы тартылыс күшін есептеу қажет. Бұл кезде қоршаған ортада осы екі денеден басқа денелер жоқ деп есептейміз. Себебі, басқа денелер болған жағдайда олардың арасындағы бір-біріне тартылыс күшінің мәні күрделене түседі. Сондықтан, қарастырылып отырған жүйені идеализациялау (қарапайымдылыққа келтіру) қажет. Осындай жағдай зарядталған денелердің арасындағы әсерлесу заңдылығын (Кулон заңы) қарастырғанда қолданылады. Жалпы жағдайда бұл заңның өрнегін алу күрделі. Ал әсерлесетін дене екеу және оларды нүктелік деп қарастырсақ, қарастырып отырған заңның идеализацияланған екі нүктелік заряд моделі үшін қарапайым өрнегін аламыз. газдардағы құбылыстарды қарастырған кезде де идеализация әдісі қолданылады. Осы әдістің негізінде идеалды газ заңдарын аламыз.

Физика ғылымы табиғаттағы құбылыстар мен заңдылықтарды қарастыратын болғандықтан, оларды сандық түрде есептеу үшін әрбір табиғаттағы құбылыстарды белгілі бір физикалық шамалармен сипаттаймыз. Осы физикалық шамалар жиыны бізге әлемнің физикалық көрінісін береді. Бұл табиғатты идеализациялау, яғни модельдеудің жолдары болып табылады. Ал шын мәнінде табиғат құбылыстары мен заңдары өздерінің толық болу жағдайымен қарастырылған дұрыс. Сол кезде ғана біз нағыз анық жүретін құбылыстар мен заңдарды аламыз. Құбылыстар мен заңдар табиғатта дәлелденбесе оның дұрыстығы расталмайды.

Қазіргі уақытта ғылымдағы жағдай өзгеру үстінде. Көптеген тәжірибелерде іргелі заңдарды ашу талап етілмейді, тек нақты денелердің өзгеру ерекшеліктері мен қандай да бір үрдістің өту сипаты қажет етіледі. Мысалы, жүзу кемесінің жаңа формасын ойлап таптыңыз, енді оның жүзу сапасын тексеруіңіз қажет. Ол үшін бүкіл жүзу кемесінің моделін нақты өлшемінде жасаудың қажеті жоқ. Оның қосымша бөліктерін алдын ала тәжірибеден өткізген дұрыс.

Сонымен, заманауи зерттеуші нақты денелердің жеке қасиеттерін, күрделі құбылыстарды зерттеу үшін көмекші денелерді құрастырады. Осы көмекші денелермен тәжірибе жүргізу жеңіл. Себебі, қажетті құбылыстарды бақылау ыңғайлы. Нақты объектіні тәжірибеде басқамен алмастыруға негізделген тәжірибелік зерттеу әдісін модельдеу деп атаймыз. Ал тәжірибе жүргізілетін көмекші объект – модель деп аталады.

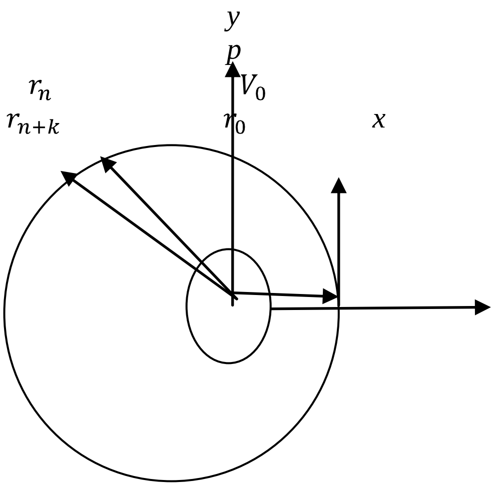
Орталық тартылыс өрісіндегі қозғалысты қарастырайық.

Орталық тартылыс өрісіндегі денелердің қозғалысы жөніндегі есеп жалпы физикалық заңдарға бағынатын денелердің ерекшклігін зерттеуге ыңғайлы мысал болып табылады. Мысалы, үлкен тартатын орталықтың маңындағы кіші дененің инерциалды қозғалысы берілсін. Массасы үлкен денені Жер, ал массасы кіші денені жердің жасанды серігі (спутник) ретінде қарастырамыз. спутниктің мүмкін траекториясын және ол Жерге құлап түспес үшін қандай жылдамдықпен қозғалу қажеттігін зерттейміз. Спутниктің бастапқы ең аз жылдамдығы болу керек, оның траекториясы тұйық болмас үшін және спутник Жерден қашықтап кету үшін.

Модельдің үлгісіне бүкіл әлемдік тартылыс заңы алынады. Денеге тек ауырлық күші әсер етеді, сонда Ньютон теңдеуі келесі түрде жазылады.

$$ma = -\frac{GMm}{r^8}r\,, \tag{1}$$

Мұндағы m және M - спутник пен тартатын массалары, G - гравитациялық тұрақты, r - радиус-вектор, ол спутниктің тартатын ортаға қатысты орнын көрсетеді, a - спутниктің үдеуі. Дененің қозғалысы орталық күштің әсерінен бір жазықтықта жатады. Оның орны дененің бастапқы орны мен бастапқы жылдамдығын анықтайтын вектормен анықталады. Декартты координаттар жүйесінің басы тартылыс орталығында болады және санақ уақыты қозғалыс х, у жазықтығында дене қозғалысының бастапқы сәтінде х осіне перпендикуляр болатындай етіп аламыз (1-сурет).



Сурет 1 - Координаттар жүйесі және спутниктің мүмкін траекториясы.

Сонда бастапқы шарттарды келесідей жазамыз:

$$t=0,\ x=x_0\ ,\ y=0\ ,\ V_x = 0\ ,\ V_y = V_0 \qquad (2)$$

(1)теңдеу (2) бірге спутниктің траекториясын және оның қасиеттерін толық анықтайды.

Есепті сандық түрде талдау өлшеу бірлігі ретінде сәйкес өлшемдерді қолданған жағдайда ыңғайлы. Ұзындықтың өлшем бірлігі ретінде X_0алған қолайлы. Ол Жердің спутнигі үшін Жердің радиусымен шамалас және R+h шамасына тең. Мұндағы h– жер бетінен спутниктің қашықтығы. Әрбір қашықтың ондағы X_0шамасының орналасу дәрежесімен анықталады. Өлшем бірліксіз Х шамасы вектормен өлшенген Х шамасын, сондай метрмен өлшенген X_0шамасына бөлу арқылы анықталады. Уақыт бірлігін гравитациялық тұрақтысымен тартқыш орталықтың сипаттамаларының көмегімен құраймыз. (1) өрнектен көретініміз. Көбейткішінің өлшем бірлігі үдеудікімен сәйкес (м/с^2). Қашықтықтың орнына X_0шамасын аламыз және өрнекті уақыттың өлшемділігіне келтіреміз $(X_0\ /(GM/X_0^3)^{-\frac{1}{2}},)$ яғни$(GM/X_0)^{1/2}$

Осы бірлікте өлшенген удеудің проекциялары келесі теңдеулермен анықталады

$$a_x = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\ ,\ a_y = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

Ал бастапқы шарттар келесі түрде беріледі:

$$t=0,\ x=1,\ y=0,\ V_x=0,\ V_y=V_0, \qquad (4)$$

$$V_0 = V_0(X_0\ /GM)^{1/2}$$

Барлық физикалық шамалар салыстырмалы өлшем бірлікпен өлшенеді және барлық жүйелер «спутник тартқыш орта» үшін бірде болады. Есептегі параметрлер саны да азаяды. Бір өлшемсіз шама V_0 бастапқы сәтте спутниктің кинетикалық және потенциялды энергиялары өзара қандай қатынаста болатынын көрсетеді. Әртүрлі уақыт сәтінде спутниктің жылдамдығының проекциясымен оның координаталарын анықтау үшін уақыт осінде үздікті нүктелерді t_nтаңдап аламыз. Ол нүктелер бір-бірінен Δt аз шамаға ығысқан болады. Сонда t_{n+1}уақыт сәтінде жылдамдықтар проекциясы $v_x^{(n+1)}$және $v_y^{(n+1)}$жуық түрде келесідей анықталады.

$$v_x^{(n+1)} = v_x^{(n)}+\Delta t \cdot a_x^{(n)} \qquad (5)$$

$$v_y^{(n+1)} = v_y^{(n)}+\Delta t \cdot a_y^{(n)} \qquad (6)$$

Ал бұл сәттегі координаторды бірқалыпты қозғалыс негізіндегідей анықтаймыз.

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta t \cdot v_x^{(n+1)} \quad (7)$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta t \cdot v_y^{(n+1)} \quad (8)$$

Уақыттың бастапқы сәтінде жылдамдық проекциясы және координатасы белгілі $t_0 = 0,\ x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 0, v_x^{(0)} = 0,\ v_y^{(0)} = v_0$.

(5)-(8) теңдеулерді жүйесі адым адыммен D_t шамасының аз жағдайында спутниктің траекториясы мен оның барлық сипаттамалырын жеткілікті дәрежеде дәл есаептейді.

Траекторияны сипаттау үшін оны эксцентриситемін е есептеу ыңғайлы. Координаттардың жүйесінде эксцентриситемті есептеу үшін траекториядағы x=0 нүктесіне қатысты y =p координатасын анықтау қажет. Сонда e=/p-1/ . Егер e<1 болса, онда траектория тұйық болады (шеңбер немесе эллипс). e=1 болғанда траектория парабола, ал e>1 болғанда траектория гипербола болады.

Айтылып өткен моделдеудің нәтижесінде физикалық үрдістерді ыңғайлы есептеулерге келтіріп қажетті заңдылықтарды алуға және шамаларды дәл есептеп тәжірибе негізінде тексеруге мүмкіндік аламыз.

Әдебиеттер:

1. Савельев И. В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1987. - Т.1.
2. Яворский В. М. Справочник по физике. – М.: Наука, 1985.
3. Аккушкарова К. А. Механика. Учебное пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2000.

Түйіндеме

Жұмыста физикалық процестерді модельдеу мысалы қарастырылады. Физикалық процестердің табиғат заңдылықтарын өрнектейтін жолдары көрсетіледі. Әлемнің физикалық көрінісін құру жолдары келтіріледі. Нақты мысал негізінде кіші дененің үлкен тартылыс ортаның өрісінде қозғалысы қарастырылады. Және келтірілген дене қозғалысының траекториясы зерттеледі.

Кілт сөздер: физикалық процестер, бүкіләлемдік тартылыс заңын модельдеу, траектория, доға, парабола, гипербола, әлемнің физикалық картасы.

Резюме

В работе рассматриваются проблемы моделирования физических процессов. Указываются направления описания законов природы, связанное физическими процессами. Приведены пути формирования физической картины мира. На конкретном примере расследается движения тела малой массы около тела большой массы. Изучен характер движения малой массы около «притягивающего центра» и получен вид траектории.

Ключевые слова: физические процессы, моделирование закона всемирного тяготения, траектория, окружность, парабола, гипербола, физическая картина мира.

Summary

This paper consides the problem of modeling physical process. There are types of indicating the description of the nature lows, related to physical processes. The items forming a physical picture of the world is shown. A specific example shows the movement of the small mass body around large bordy mass. The nature of the movement of small mass is studied near “the centre of attraction” and example is trajectory get.

Key words: Physical processes, modeling, low of world attraction, projection of circumference, parabola, hyperbola, physical picture of the world.

УДК 681.5:66.012

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

ХУ ВЕН-ЦЕН, доктор технических наук, профессор
Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г.Шымкент,
Республика Казахстан

Важный класс промышленных объектов оптимального автоматизированного управления образуют сложные технологические системы (СТС). К ним относятся технологические процессы масштаба завершенных производств и крупных производственных комплексов [1]. В объектах данного класса часто эффективны децентрализованные системы управления с иерархической структурной организацией, представляющие совокупность локальных систем управления (ЛСУ) различных уровней иерархии, подконтрольных на своих уровнях головной системе управления – координирующему органу (КО), выполняющему функцию согласования ЛСУ в целях решения глобальной задачи управления СТС в целом.

В основе децентрализованного принципа управления лежит декомпозиция задачи управления. т.е. сведение ее к совокупности локальных задач управления и глобальной задаче координации, решаемых совместно в рамках итеративной процедуры межуровневого обмена информацией между КО и ЛСУ, в процессе которого локальные задачи решаются с учетом заданных координирующих воздействий, а координирующие воздействия выбираются с учетом решений локальных задач.

В настоящей работе будет рассмотрен предлагаемый универсальный подход к децентрализованному решению задач управления СТС на основе ее полной пространственно-временной декомпозиции.

Задача управления СТС в общем виде может быть сформулирована следующим образом:

$$F(x,u,y,t) \to \max_{u(t)\in U},$$

$$U = \{u : g(x,u,y,t) = 0, \quad h(x,u,y,t) \ge 0\} \tag{1}$$

где F – заданная скалярная функция, отождествляемая с критерием оптимальности хода технологического процесса; t – физическое время; x, u, y – векторы возмущающих воздействий, управлений и выходов СТС; U – множество допустимых управлений; g – заданная векторно-значная функция, соответствующая математической модели СТС; h – векторно-значная функция, задающая ограничения на технологические параметры.

Решение данной задачи предполагает определение функции времени $u(t)$, доставляющей максимум целевой функции $F(x,u,y,t)$ при изменении во времени возмущающего воздействия $x(t)$.

Можно предположить, что в задаче (1) изменение возмущений $x(t)$ имеет характер кусочно-постоянной функции, поскольку основные возмущающие воздействия в СТС возникают при изменении показателей качества сырья, либо при изменении нагрузок на оборудование, которые устанавливаются неизменными на достаточно длительный срок. Отсюда, в период T, сохранения постоянного значения $x(t)=const$, задача (1) будет эквивалентна статической задаче управления вида:

$$F(x,u,y) \to \max_{u\in U}$$

$$U = \left\{ u : \begin{matrix} g(x,u,y) = 0 \\ h(x,u,y) \ge 0 \end{matrix} \right\}. \tag{2}$$

В результате, динамическая задача (1) сводится к последовательно решаемым статическим задачам (2), для значений возмущений x в моменты принятия управляющих решений.

Обозначим множество переменных задачи (2) через M, полагая, что оно представляет объединение множеств входных переменных X, управлений U и выходов Y, т.е.

$$M = X \cup U \cup Y. \tag{3}$$

Предположим, что множество M может быть разбито на подмножество переменных координации $К$ и подмножество $Л$ переменных локальных задач управления подсистемами СТС

$$К \subset M, \quad К = \overline{X} \cup \overline{U} \cup \overline{Y}, \tag{4}$$

$$\overline{X} \subset X, \quad \overline{U} \subset U, \quad \overline{Y} \subset Y, \tag{5}$$

$$Л \subset M, \quad Л = \widehat{X} \cup \hat{U} \cup \hat{Y}, \tag{6}$$

$$\widehat{X} \subset X, \quad \widehat{U} \subset U, \quad \widehat{Y} \subset Y, \tag{7}$$

где $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{Y}$ – множества переменных, предназначаемых для использования в качестве параметров координации; $\widehat{X}$, $\widehat{U}$, $\widehat{Y}$ – множества переменных локальных задач.

Предположим далее, что множество $Л$ допускает разбиение на совокупность подмножеств переменных $Л_i$, i=1,2,…,N, определяющих состояния отдельных подсистем в составе СТС. Этому требованию удовлетворяет возможность представления множества $Л$ в виде декартового произведения подмножеств $Л_i$ с соблюдением следующих условий:

$$Л = Л_1 \times Л_2 \times \ldots \times Л_N, \tag{8}$$

$$Л_i \subset Л, \quad Л_i = \widehat{X}_i \cup \widehat{Y}_i \cup \widehat{U}_i, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{9}$$

$$\widehat{X}_i \subset X, \quad \widehat{U}_i \subset U, \quad \widehat{Y}_i \subset Y, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{10}$$

где $\widehat{X}_i$, $\widehat{U}_i$, $\widehat{Y}_i$, $i = 1,2,\ldots,N$ – подмножества переменных i-х локальных задач.

Пусть при этом обеспечена взаимообусловленность выделяемых подмножеств, которая заключается в том, что отображение переменных координации из множества $К$ на множество $Л$ производится в подмножества $Л_i$, $i=1,2,\ldots,N$, т.е. имеют место отображения

$$R: К \to Л, \quad Л \to Л_i, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{11}$$

или

$$Л = R(К) \Rightarrow Л_i = R_i(К), \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{12}$$

Это означает, что переменные локальных задач являются функциями от параметров координации.

Имеет место также обратное отображение

$$S: Л_i \to Л, \quad i = 1,2,\ldots,N: \quad Л \to К, \tag{13}$$

т.е.

$$К = S(Л) \Rightarrow К = S_i(Л_i), \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{14}$$

Это выражается в том, что значения независимых переменных в задаче координации выбираются с учетом решений локальных задач, которые они обуславливают.

Тогда исходная задача управления СТС (2) может быть эквивалентным образом сформулирована в виде

$$\begin{gathered} F(f_i(x_i, u_i, y_i), i = 1,2,\ldots, N) \to \max_{u \in U}, \\ u = (u_1, u_2, \ldots, u_N) \\ U = \cup U_i, \quad i = 1,2,\ldots, N \\ U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N \\ U_i = \{u_i: \quad g_i(x_i, u_i, y_i) = 0, \quad h_i(x_i, u_i, y_i) \ge 0\}, \quad i = 1,2,\ldots, N, \end{gathered} \tag{15}$$

где f_i – скалярная целевая функция для i-й подсистемы СТС $П_i$; x_i, u_i, y_i – векторы входов, управлений и выходов $П_i$, соответственно; U_i - множество допустимых значений переменной u_i; g_i, h_i – заданные векторно-значные функции в математических моделях и ограничениях на управления для $П_i$.

В свою очередь данная задача, при определенных условиях, может быть сведена к N локальным задачам управления для Π_i вида:

$$f_i(x_i(\overset{0}{s_i}), u_i(\overset{0}{s_i}), y_i(\overset{0}{s_i})) \rightarrow \max_{u_i(s_i) \in U_i}$$

$$U_i = \left\{ u_i(s_i): \quad g_i(x_i(\overset{0}{s_i}), u_i(\overset{0}{s_i}), y_i(\overset{0}{s_i})) = 0, \quad h_i(x_i(\overset{0}{s_i}), u_i(\overset{0}{s_i}), y_i(\overset{0}{s_i})) \geq 0 \right\} \quad (16)$$

$$i=1,2,\ldots N$$

и задаче координации вида:

$$F(f(\overset{0}{x_i}(s_i), \overset{0}{u_i}(s_i), \overset{0}{y_i}(s_i)),\ i = 1,2,\ldots, N) \rightarrow \max_{s \in S}$$

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_N) \quad (17)$$

$$S = \left\{ s : \overset{0}{u_i}(s_i) \in U_i, \forall i - \textit{существуют} \right\}$$

решаемым совместно.

Здесь s – вектор некоторых параметров координации, обуславливающих значения переменных в локальных задачах; $\overset{0}{s_i}, i = 1,2,\ldots, N$ - заданные значения параметров координации, учитываемые при решении локальных задач; S – множество допустимых значений вектора параметров координации s; $\overset{0}{x_i}(s_i), \overset{0}{u_i}(s_i), \overset{0}{y_i}(s_i)$ - решение i-ой локальной задачи, соответствующее текущему значению переменной координации s.

Условия, при которых сведение исходной задачи управления СТС (2) к совместно решаемым задачам (16), (17) является корректным, заключаются в обеспечении эквивалентности совместных решений задач (16),(17) решениям задачи (2). Указанная эквивалентность в общем случае не очевидна и требует дополнительных обоснований. Подобное обоснование известно [2] для случая, когда задача управления удовлетворяет свойству выпуклости и сепарабельности. В этом случае к задачам (16,17) могут быть применены известные классические методы декомпозиции, называемые методами явной декомпозиции (feasible decomposition method) и неявной декомпозиции (nonfeasible decomposition method) [3,4].

Общепринятая схема декомпозиции задач управления предполагает, что система управления СТС оперирует вектором управляющих параметров u, покомпонентный состав и структура которого остаются неизменными. Остается в целом неизменной и структура исходной задачи управления (2), т.е. выработка управляющих решений всякий раз основывается на решении по существу одной и той же задачи. В этом смысле задача управления СТС может быть охарактеризована как стационарная во времени.

В предлагаемом подходе происходит модификация задачи управления (2) в момент принятия управляющих решений, направленная на максимальное упрощение задачи путем сведения к минимуму числа учитываемых переменных и соответствующего преобразования целевой функции и условий в ограничениях. С этой целью учитываются только те переменные, которые значимы на момент принятия управляющего решения. В результате, задача управления (2) приобретает свойство задачи с переменной структурой. Вследствие этого, в моменты принятия управляющих решений решаются по существу различные задачи. Притом, что всякий раз модифицированная задача сохраняет эквивалентность исходной задаче применительно к конкретному случаю. Это позволяет говорить о своеобразной декомпозиции задачи (2), поскольку она сводится к совокупности упрощенных задач, решаемых раздельно.

Декомпозиция, реализуемая подобным образом, может трактоваться как временная, т.е. осуществляемая во времени, что отражает факт модификации задачи управления СТС от одного момента принятия управляющего решения к другому очередному моменту.

Модификации задачи управления (2) могут основываться на учете ситуаций, складывающихся в СТС в моменты принятия управляющих решений. На основе анализа текущей ситуации определяется состав эффективных переменных задачи управления СТС, структура целевой функции, модели и условий в ограничениях. Все несущественные переменные отбрасываются, целевая функция, математическая модель и ограничения соответствующим образом преобразуются и упрощаются, что приводит к упрощению задачи управления (2) в целом путем сведения ее к частной задаче.

Поскольку общая статическая задача управления (2) сводится к совокупности более простых частных подзадач, соответствующих определенным ситуациям в СТС, возникает дополнительная задача распознавания ситуаций, с учетом которых происходит обращение к соответствующим частным задачам. Указанная задача может трактоваться как аналог задачи координации, тогда как частная задача - рассматриваться в качестве аналога локальной задачи управления применительно к децентрализованным системам управления.

Задача распознавания ситуаций в общем виде может быть сформулирована следующим образом:

$$(\overset{o}{x},\overset{o}{u},\overset{o}{y}):\xrightarrow{R} i,\overline{D}_i\,, \tag{18}$$

где $\overset{o}{x},\overset{o}{u},\overset{o}{y}$ – конкретные значения входных переменных *x*, управлений *u* и выходов *y* СТС соответственно; *i* – номер ситуации; $\overline{D_i}$ – множество переменных задачи управления (2), учитываемых в *i*-й ситуации, $\overline{D}_i \subset D = X \bigcup U \bigcup Y$; *X, U, Y* – множества переменных *x, u, y* соответственно; *R* – оператор отображения вектора $\left(\overset{o}{x},\overset{o}{u},\overset{o}{y}\right)$ в пару *i*, $\overline{D_i}$

Смысл данной задачи заключается в том, что вектор текущих значений переменных *x,u,y* в момент принятия управляющего решения, посредством оператора *R* отображается в номер ситуации *i* и множество $\overline{D_i}$ переменных задачи (2), эффективных в ситуации с номером *i*. Значения функций *f, g* и *h*, не принимаются в расчет, поскольку они однозначно определяются значениями своих аргументов *x, u, y*.

Частную задачу управления СТС, учитывающую *i*-ю ситуацию, можно представить в виде

$$F_i(x_i,u_i,y_i)\to \max_{u_i \in U_i \subset U}$$

$$U_i=\left\{u_i:\begin{array}{c} g_i\left(x_i,u_i,y_i\right)=0 \\ h_i\left(x_i,u_iy_i\right)\geq 0\end{array}\right\} \tag{19}$$

$$\bigcup U_i = U$$

$$i=1,2,...,N.$$

где *i* – номер текущей ситуации; *N* – число возможных ситуаций; x_i, u_i, y_i – модифицированные векторы входов, управлений и выходов СТС; F_i – модифицированная целевая функция; U_i – модифицированное множество допустимых решений задачи, обусловленное модифицированными функциями g_i, h_i,; *U* – множество допустимых решений общей задачи (2).

Покомпонентный состав векторов переменных x_i, u_i, y_i в задаче (19) может быть различным и представлять в каждом отдельном случае некоторое подмножество $\overline{D_i}$ множества полного состава переменных *D*. Сформированные таким образом модифицированные векторы x_i, u_i, y_i включают только наиболее эффективные компоненты в учитываемой ситуации.

Рассмотренная схема декомпозиции общей задачи управления СТС (1) может быть охарактеризована, как полная пространственно-временная декомпозиция, поскольку она охватывает все аспекты и возможные варианты декомпозиции по ходу решения задачи.

Литература:

1. Ху Вен-Цен. Особенности оптимального управления сложными технологическими системами // Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М.Тынышпаева. -2008. -№3(52). -С. 78-83.
2. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. -М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. –352 с.
3. Brosilow C., Lasdon L.A., Pearson J. Feasible optimization methods for interconnected systems. //JACC Preprints Papers. -1965. -P. 79-84.
4. Brosilow C., Lasdon L.A. Two levee optimization technique for recycle processes. //I.A.Ch.E. – I.Chem.E., Symposium Series. -1965. -№4. – p.75-83.

Резюме

Рассмотрен предложенный декомпозиционный подход к решению динамических задач оптимального управления промышленными объектами класса сложных технологических систем. Предполагается сведения исходной динамической задачи управления к последовательно решаемым статическим задачам. Для решения возникающих статических задач могут быть применены известные методы декомпозиции. Предлагаемый подход основан на адаптации указанных задач к ситуациям, на моменты принятия управляющих решений. Адаптация заключается в учете только значимых переменных применительно к рассматриваемым ситуациям, что позволяет упростить решаемую задачу.

Ключевые слова: управление, оптимальное управление, декомпозиция, иерархическое управление, децентрализованное управление.

Түйіндеме

Кластың өндірістік объектілерінің күрделі технологиялық жүйелерін тиімді басқарудың динамикалық есептерін шешудің декомпозициялық тәсілі қарастырылған. Шығарылатын динамикалық есептерді басқаратын дәйекті статикалық есептер арқылы шығарылатын мәлімет болжанады. Статикалық есептерді шешу үшін декомпозициялық тәсілдің әйгілі әдістері қолданылуы мүмкін. Берілген дәйек көрсетілген есептердің адаптацияға негізделген басқарушы есептерді қабылдауға арналған. Адаптация тіркеуде тек қана мағыналы айнымалыға қорытындыыланады, шығарылатын есепті жеңілдетуге мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: басқару, оптималды басқару, декомпозиция, иерархиялық басқару, орталықтандырылмаған басқару.

Summary

The offered decomposition approach to the solution of dynamic problems of optimum control is considered by industrial facilities of a class of difficult technological systems. Data of an initial dynamic problem of management to consistently solved static tasks are supposed. Known methods of decomposition can be applied to the solution of arising static tasks. Offered approach is based on adaptation of the specified tasks to situations for the moments of adoption of operating decisions. Adaptation is in the accounting of only significant variables, in relation to considere situations that allows to simplify a solved task.

Key words. Control, optimum control, decomposition, the hierarchical control, the decentralized control.

УДК 004.588

ВИЗУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОДУЛЯ ГЕНЕРАЦИИ УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Е.А. ЧЕРТКОВА, доктор технических наук, доцент,
Московский государственный машиностроительный университет, г.Москва, Россия,
К.К. ДАУРЕНБЕКОВ, кандидат технических наук
Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата,
Республика Казахстан

Компьютерные обучающие системы, как правило, состоят из подсистем (модулей), которые реализуют дополнительные функции всего программного комплекса. Одной из подсистем, входящих в состав интегрированной компьютерной обучающей системы, может быть модуль генерации учебно-тренировочных заданий (МГУТЗ), существенно расширяющий возможности системы.

Применение современных методов программной инженерии для разработки компьютерных обучающих систем позволяет создать модульную архитектуру системы и пакет визуальных исполняемых моделей для последующей автоматической кодогенерации. При визуальном моделировании модуля генерации учебно-тренировочных заданий должны быть решены следующие задачи: определение структуры или поведения подсистемы; получение образца, позволяющего сконструировать подсистему; документирование принимаемых решений на основе полученных моделей.

Унифицированный язык моделирования – Unified Modeling Language (UML), разработанный компанией Rational Software Corporation, позволяет создать своеобразный чертеж, подробно описывающий архитектуру системы, поскольку за каждым графическим символом стоит хорошо определенная семантика [1]. С помощью такого описания (или модели) упрощается разработка и обновление программной системы и повышается адекватность реализации всех технических требований к приложениям. Инструментальные средства, поддерживающие UML и содержащие генераторы кода, позволяют на основе созданных моделей получить программный код на различных языках.

В данной статье рассматриваются вопросы визуального объектно-ориентированного моделирования модуля генерации учебно-тренировочных заданий с использованием стандартного языка Unified Modeling Language и CASE-средств Rational Rose и IBM Data Modeler.

Пакет визуальных моделей модуля генерации учебно-тренировочных заданий

Модуль генерации учебно-тренировочных заданий предназначен для компьютерной обучающей системы, состоящей из следующих компонентов: компьютерного учебника, тестовой программы проверки знаний и тренажера (рис. 1). Модуль должен работать как программный интерфейс с базой данных, содержащей вопросы и задания для студентов.

Цель данного модуля:

- автоматизировать формирование тестовых заданий для различных уровней контроля знаний;
- обеспечить выборку и компоновку проверочных вопросов для компьютерного учебника;
- осуществлять генерацию учебно-тренировочных задач для тренажера;
- реализовать протокольный мониторинг контроля знаний и уровня практических навыков студентов.

Одним из фундаментальных процессов технологии разработки систем в соответствии с современными тенденциями программной инженерии является специфицирование программного обеспечения, определяющее все функции и действия, которые будет выполнять МГУТЗ [2]. Этот процесс, называемый в терминологии программной инженерии «разработка требований», является критическим этапом в создании программного обеспечения, поскольку ошибки, допущенные на этом этапе, ведут к возникновению проблем на этапах проектирования и разработки компьютерных систем.

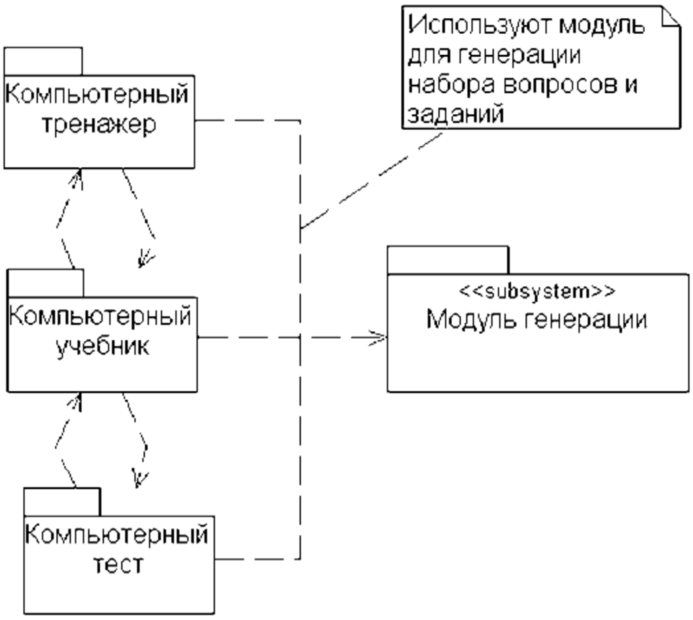


Рис. 1 - Схема взаимодействия МГУТЗ с модулями и базой данных интегрированной обучающей системы

Для полномасштабного отражения требований к проекту в дополнение к документу-концепции в пакет спецификации включена визуальная модель прецедентов в виде UML-диаграммы Use Case. Основанный на прецедентах способ описания функциональных требований отражает взаимодействие пользователей с системой. Этот подход целесообразно использовать для проектирования компьютерных обучающих систем, поскольку именно прецеденты в языке моделирования UML являются представлением требований к системе [3].

Фрагмент диаграммы прецедентов, которые инициируются одним из пользователей системы – студентом, представлен на рис. 2.

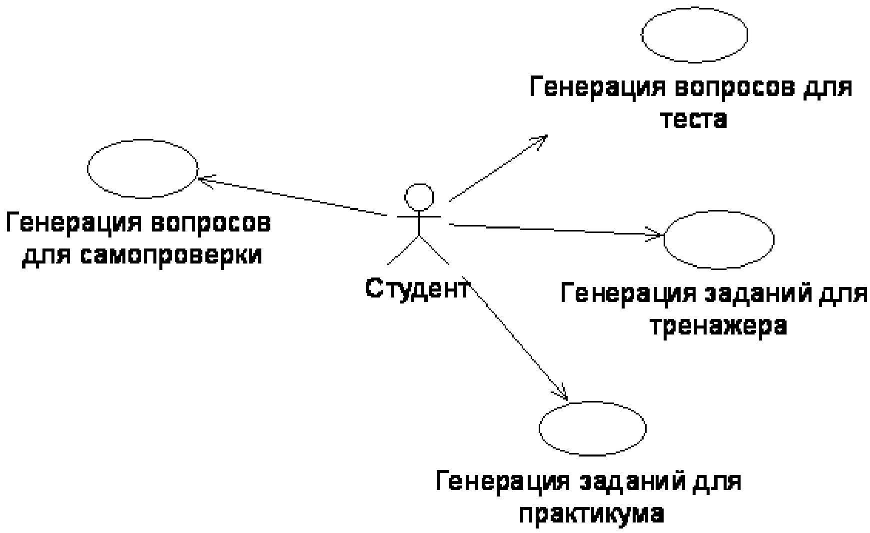


Рис. 2 - Фрагмент диаграммы прецедентов модуля генерации учебно-тренировочных заданий

При этом прецеденты представляют собой следующие компоненты общей модели системы:

- завершенный фрагмент функциональных возможностей (включая основной поток логики управления, его вариации и исключительные условия (альтернативные потоки);
- фрагмент внешне наблюдаемых функций;
- ортогональный фрагмент функциональных возможностей;
- фрагмент функциональных возможностей, инициируемый субъектом;

• фрагмент функциональных возможностей, который представляет субъекту ощутимый полезный результат, достигаемый в пределах одного прецедента.

В соответствии с модельными конструкциями UML прецеденты реализуются посредством кооперации (collaboration), которые представляют собой сообщества классов, интерфейсов и других элементов, кооперируемых для получения определенного поведения. Кооперации имеют структурную часть, задающую структуру системы (классы, элементы, интерфейсы и подсистемы), и поведенческую, задающую динамику взаимодействия элементов для получения результата.

На рис. 3 и 4 представлен пример реализации одного из прецедентов – «Генерация вопросов для самоконтроля» – в динамической модели модуля генерации учебно-тренировочных заданий в виде диаграмм взаимодействия, созданных в программно-инструментальной среде Rational Rose.

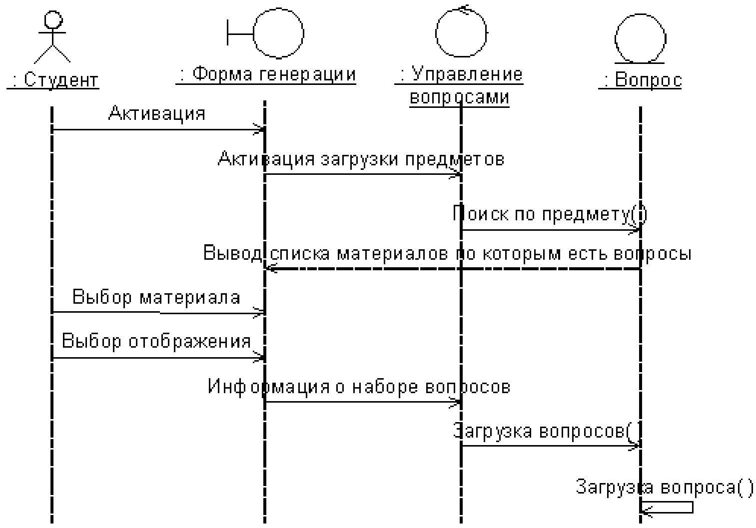


Рис. 3 - Диаграмма последовательности для прецедента «Генерация вопросов для самоконтроля»

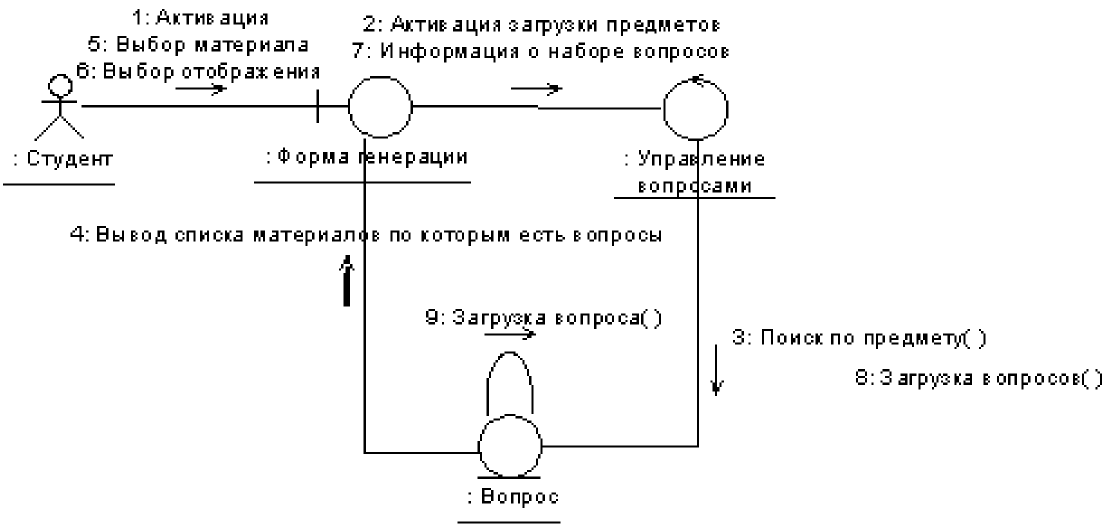


Рис. 4 - Диаграмма кооперации для прецедента «Генерация вопросов для самоконтроля»

Визуальные модели динамического поведения системы отражают основные и альтернативные потоки событий для каждого прецедента. Таким образом, совокупность всех визуальных моделей последовательности и кооперации является ядром динамической модели модуля, в котором определено поведение системы во время выполнения действий пользователя.

На этапе анализа и проектирования осуществляется перевод системных требований к модулю в технические инструкции, проектируется архитектура. Диаграмма классов модуля генерации учебно-тренировочных заданий представлена на рис. 5.

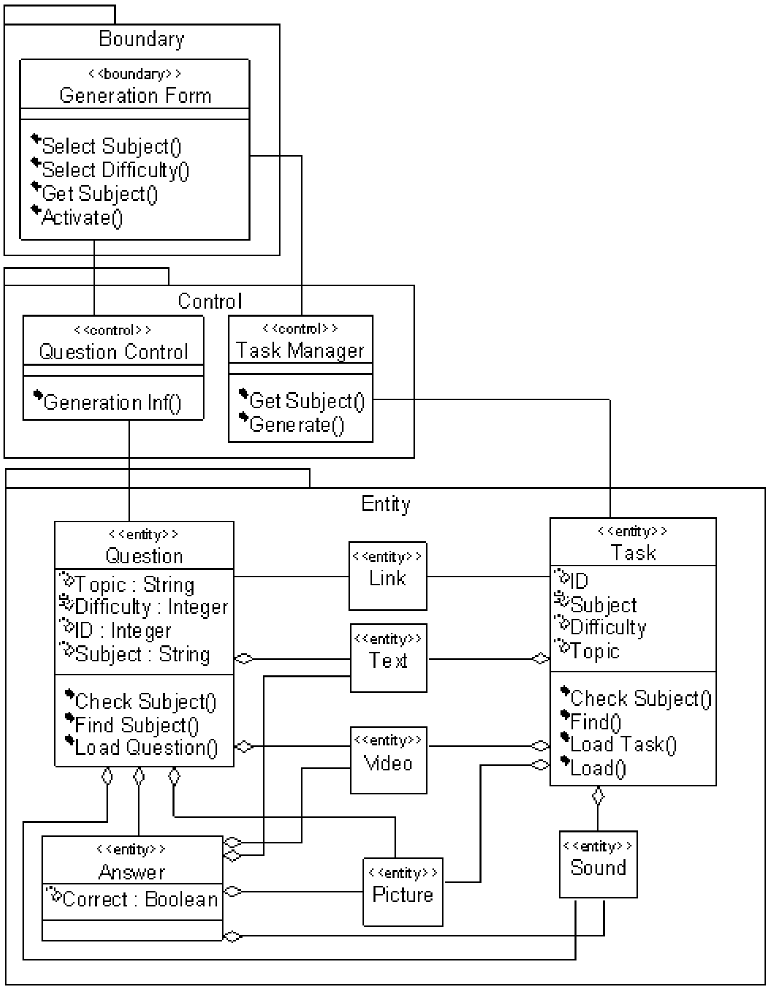


Рис. 5 - Диаграмма классов модуля генерации учебно-тренировочных заданий (в нотации UML)

Эта модель проектирования представляет собой основу для получения каркаса базы данных модуля генерации учебно-тренировочных заданий. Для данного проекта выбран способ сохранения информации о системе в реляционной базе данных.

Следующим этапом разработки модуля генерации учебно-тренировочных заданий является реализация классов и объектов, определенных в модели проектирования, посредством физических программных компонентов (исходных, двоичных, выполняемых и т.п.), которые будут использоваться для создания выполняемой программы.

Заключение

Разработан пакет визуальных исполняемых моделей модуля генерации учебно-тренировочных заданий, входящего в состав интегрированной компьютерной обучающей системы. Моделирование осуществлялось с использованием стандартного языка Unified Modeling Language и CASE-средств Rational Rose и IBM Data Modeler. Модуль спроектирован как программный интерфейс для работы с базой данных, содержащей вопросы и задания для различных форм контроля знаний обучаемых, а также практические работы тренажерного модуля. Дальнейшая работа с исполняемыми визуальными моделями заключается в автоматической кодогенерации.

Литература:

1. Буч Г., Рамбо Дж., Джекобсон А. Язык UML. Руководство пользователя. Пер. с англ. - М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2004. - 432 с.

2. Соммервилл И. Инженерия программного обеспечения.: Пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2002. – 624 с.

3. Софиев А.Э., Черткова Е.А. Компьютерные обучающие системы. Монография: ─ М.: Изд. ДеЛи, 2006. - 296 с.

4. Черткова Е.А., Карпов В.С. Визуальное моделирование компьютерных обучающих систем // Дистанционное и электронное обучение. – 2010. - № 12. - С.56-70.

Резюме

В данной статье рассматриваются вопросы визуального объектно-ориентированного моделирования модуля генерации учебно-тренировочных заданий для компьютерной обучающей системы с использованием стандартного языка Unified Modeling Language и CASE-средств Rational Rose и IBM Data Modeler. Модуль спроектирован как программный интерфейс для работы с базой данных, содержащей вопросы и задания для различных форм контроля знаний обучаемых.

Ключевые слова: обучающие системы, визуальное моделирование, проектирование, разработка.

Түйіндеме

Бұл мақалада Unified Modeling Language стандартты тілін және CASE-құрылғылардың Rational Rose мен IBM Data Modeler-ді пайдалана отырып компьютерлік оқу жүйелері үшін оқу жаттығу тапсырмаларын генерациялайтын модулдерін объектіге бағыттай визуалды моделдеу ерекшеліктері қарастырылған. Модул мәліметтер қорымен жұмыс істеу үшін бағдарламалық интерфейс ретінде жобаланған. Ол білім алушылардың білімін тексерудің түрлі формаларын үшін тапсырмалар жиынтығынан тұрады.

Кілт сөздер: оқыту жүйесі, визуалды модельдеу, жобалау, өңдеу.

Summary

This article deals with the visual object-oriented modeling generation module of training assignments for a computer training system using the standard Unified Modeling Language language and CASE-tools Rational Rose and IBM Data Modeler. The unit is designed as a software interface to the database that contains questions and activities for different forms of control students' knowledge.

Key words: Training systems, visual modeling, design, development.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ, АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА: ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Сборник трудов международной научно-практической конференции, посвященной научно-педагогической деятельности академика А.Д.Тайманова

Научное издание

Подписано в печать 18.10.13г.

Формат 84х108 $^{1}/_{16}$

Печ.л. 32,5.

Тираж 300 экз.

Министерство образования и науки РК

Комитет науки

РГП «Ғылым ордасы»

050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28

Отпечатано в типографии

РГП «Ғылым ордасы»

КН МОН РК

г. Алматы